

# Les éléments finis : de la théorie à la pratique

André Fortin  
GIREF  
Professeur titulaire  
Département de mathématiques et de statistique  
Université Laval

et

André Garon  
GIREF  
Professeur titulaire  
Département de génie mécanique  
École Polytechnique de Montréal

©1997-2020

29 mai 2020





# Avant-propos

La résolution des équations différentielles ou plus généralement des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. Chacune de ces disciplines apporte une contribution différente mais complémentaire à la compréhension et à la résolution de tels problèmes.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différences finies, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc. On peut sans aucun doute affirmer que la plus largement répandue est la méthode des éléments finis. Cette popularité n'est pas sans fondement. La méthode des éléments finis est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qui est fort utile, même sur le plan très pratique. En effet, cette base mathématique permet de prévoir jusqu'à un certain point la précision de notre approximation et même d'améliorer cette précision, via les méthodes adaptatives.

Ce texte est donc une introduction à la méthode des éléments finis. Nous poursuivrons ainsi deux objectifs. Bien sûr, nous souhaitons introduire la méthode des éléments finis et en donner une description relativement classique. Mais notre principal objectif est d'en dégager aussi les bases mathématiques plus fondamentales. On peut se demander s'il y a vraiment besoin de s'attarder autant sur les aspects plus mathématiques. La réponse nous est apparue de plus en plus évidente au fur et à mesure que se développaient les multiples applications de cette méthode. Les notions de convergence, de normes, d'espaces fonctionnels sont de plus en plus nécessaires pour aborder les problèmes modernes notamment en ce qui concerne les méthodes adaptatives, les méthodes de stabilisation et le développement de discrétisations compatibles dans le cas de problèmes à plusieurs variables comme les équations de Navier-Stokes ou les problèmes de coques. Pour travailler sérieusement sur ces problèmes, une connaissance superficielle de la méthode des éléments finis ne suffit plus et on doit aller plus en profondeur.

Il va de soi que poursuivre ces deux objectifs ne va pas sans difficultés. Au risque de déplaire à tous, nous visons un auditoire assez vaste allant du débutant au lecteur plus aguerri ayant déjà une connaissance de base en éléments finis.

Cet ouvrage s'adresse donc principalement aux étudiants en ingénierie, bien que les étudiants en mathématiques pourront y voir un complément pratique à leur formation plus théorique. Nous implorons la patience des étudiants ingénieurs. Les premiers chapitres vous paraîtront peut-être très théoriques mais soyez assurés que nous avons réduit au minimum les considérations théoriques et que nous nous limitons à l'essentiel. Nous implorons aussi l'indulgence des lecteurs ayant une formation mathématique plus avancée car, comme nous l'avons déjà mentionné, la rigueur mathématique n'est pas notre obsession, bien que nous ayons fait notre possible pour rester rigoureux.

Nous avons essayé d'illustrer la méthode des éléments finis à l'aide de nombreux exemples.

Pour ce faire, nous avons utilisé le logiciel **MEF++**, développé par le Groupe Interdisciplinaire de Recherches en Éléments Finis (**GIREF**) de l'Université Laval depuis 1996. Cet ouvrage a en fait été écrit en parallèle avec le développement de **MEF++**. La philosophie générale de **MEF++** est basée sur ce qu'il est convenu d'appeler des termes de formulation qui seront décrits dans cet ouvrage. Ces termes de formulation ne sont rien d'autres que les différents blocs constituant les formulations variationnelles associées aux différentes applications. Puisque ces termes de formulation sont souvent communs à plusieurs applications, on peut les voir comme des «briques» qui peuvent être assemblées suivant nos besoins. Il en résulte une grande flexibilité d'utilisation.

Dans la mesure du possible, cet ouvrage est auto-suffisant. On retrouve en annexe quelques rappels de notions mathématiques élémentaires portant sur les tenseurs et les changements de systèmes de coordonnées qui sont d'une grande utilité dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Une connaissance des méthodes d'analyse numérique élémentaire est requise et en particulier des notions d'interpolation de Lagrange et d'intégration numérique de Gauss qui sont également rappelées en annexe.

Enfin, nous souhaitons remercier tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cet ouvrage. De nombreux étudiants ont émis des commentaires constructifs qui nous ont incités à améliorer certains passages plus difficiles. Soyez tous assurés de notre reconnaissance.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et exemples</b>	<b>1</b>
1.1	Bref historique . . . . .	1
1.2	Applications . . . . .	1
1.3	Brève introduction à la problématique . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Espaces fonctionnels</b>	<b>7</b>
2.1	Les distributions . . . . .	7
2.1.1	Définitions et propriétés générales . . . . .	7
2.1.2	Distributions de plusieurs variables . . . . .	19
2.2	Espaces fonctionnels linéaires . . . . .	21
2.3	Quelques espaces de Sobolev . . . . .	27
2.3.1	L'espace $H^1(\Omega)$ . . . . .	27
2.3.2	L'espace $H^2(\Omega)$ . . . . .	32
2.4	Un résultat d'approximation . . . . .	36
2.5	Exercices . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Théorème de Lax-Milgram</b>	<b>39</b>
3.1	Formes linéaires et bilinéaires . . . . .	39
3.2	Applications . . . . .	43
3.2.1	Problèmes d'ordre 2 . . . . .	43
3.2.2	Problèmes d'ordre 4 . . . . .	49
3.2.3	Résumé . . . . .	52
3.3	Exercices . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Méthode de Ritz</b>	<b>57</b>
4.1	Principes généraux . . . . .	57
4.2	Exemples . . . . .	59
4.3	Les figures de Chladni . . . . .	64
4.4	Exercices . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Éléments finis unidimensionnels</b>	<b>73</b>
5.1	Équations différentielles d'ordre 2 . . . . .	73
5.1.1	Problème type . . . . .	73
5.1.2	Le maillage . . . . .	75

5.1.3	Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	80
5.1.4	Passage à l'élément de référence . . . . .	82
5.1.5	Construction des fonctions d'interpolation $\hat{\psi}_i(\xi)$ . . . . .	84
5.1.6	Évaluation du système élémentaire . . . . .	89
5.1.7	Assemblage . . . . .	92
5.1.8	Imposition des conditions aux limites . . . . .	101
5.1.9	Solution du système global . . . . .	102
5.1.10	Présentation des résultats . . . . .	105
5.1.11	Exemples et applications . . . . .	105
5.2	Équations différentielles d'ordre 4 . . . . .	111
5.2.1	Problème type . . . . .	111
5.2.2	Le maillage . . . . .	113
5.2.3	Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	114
5.2.4	Passage à l'élément de référence . . . . .	116
5.2.5	Construction des fonctions d'interpolation . . . . .	117
5.2.6	Évaluation du système élémentaire . . . . .	120
5.2.7	Assemblage . . . . .	120
5.2.8	Imposition des conditions aux limites . . . . .	120
5.2.9	Solution du système global . . . . .	121
5.2.10	Exemples et applications . . . . .	121
5.3	Exercices . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Éléments finis multidimensionnels</b> . . . . .	<b>131</b>
6.1	Problème type . . . . .	131
6.2	Le maillage . . . . .	132
6.2.1	Les nœuds . . . . .	132
6.2.2	Les degrés de liberté . . . . .	133
6.2.3	Numérotation des degrés de liberté . . . . .	133
6.3	Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	134
6.4	Passage à l'élément de référence . . . . .	135
6.5	Construction des fonctions d'interpolation . . . . .	145
6.6	Évaluation du système élémentaire . . . . .	146
6.7	Assemblage . . . . .	146
6.8	Imposition des conditions aux limites . . . . .	146
6.9	Résolution du système linéaire global . . . . .	147
6.10	Présentation des résultats . . . . .	147
6.11	Exemples et applications . . . . .	147
6.12	Exercices . . . . .	158
<b>7</b>	<b>Analyse de convergence</b> . . . . .	<b>161</b>
7.1	Bases théoriques . . . . .	161
7.2	Quelques exemples . . . . .	164

<b>8</b>	<b>Problèmes non linéaires</b>	<b>175</b>
8.1	Rappel sur les systèmes d'équations non linéaires . . . . .	176
8.2	Dérivée d'une fonctionnelle . . . . .	179
8.3	Application aux formulations variationnelles . . . . .	181
8.4	Exercices . . . . .	186
<b>9</b>	<b>Problèmes instationnaires</b>	<b>187</b>
9.1	Rappel sur les équations différentielles ordinaires . . . . .	187
9.1.1	Ordre de convergence . . . . .	188
9.1.2	Stabilité absolue . . . . .	189
9.2	Formulation quasi-variationnelle . . . . .	191
9.3	Les schémas BDF implicites . . . . .	193
9.3.1	Variante de type points fixes . . . . .	194
9.3.2	Linéarisation par la méthode de Newton . . . . .	196
9.4	Le theta-schéma . . . . .	197
9.4.1	Cas linéaire . . . . .	198
9.4.2	Cas linéaire où la matrice masse est constante . . . . .	199
9.4.3	Cas général non linéaire . . . . .	200
9.5	Résultats numériques . . . . .	202
9.5.1	Problème thermique . . . . .	202
9.5.2	Interactions prédateurs-proies . . . . .	205
9.6	Dérivées temporelles d'ordre 2 . . . . .	209
9.6.1	Convergence . . . . .	210
9.6.2	Stabilité . . . . .	210
9.6.3	Application du schéma de Newmark . . . . .	213
9.7	Exercices . . . . .	218
<b>10</b>	<b>Problèmes de convection-diffusion et stabilisation SUPG</b>	<b>219</b>
10.1	Introduction . . . . .	219
10.2	Résolution par différences finies . . . . .	220
10.3	Résolution par éléments finis (cas unidimensionnel) . . . . .	221
10.3.1	Une première approche par éléments finis . . . . .	224
10.3.2	Une deuxième approche par éléments finis . . . . .	225
10.4	Méthode SUPG en dimension supérieure . . . . .	228
10.5	Exercices . . . . .	240
<b>11</b>	<b>Application aux problèmes d'élasticité</b>	<b>241</b>
11.1	Problèmes d'élasticité linéaire . . . . .	241
11.2	Matériau linéaire élastique isotrope . . . . .	244
11.3	Matériau linéaire élastique orthotrope . . . . .	247
11.4	État plan de contraintes et état plan de déformation . . . . .	248
11.4.1	État plan de déformation . . . . .	248
11.4.2	État plan de contraintes . . . . .	249
11.5	Le maillage . . . . .	250
11.6	Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	252

11.7	Construction des fonctions d'interpolation . . . . .	253
11.8	Passage à l'élément de référence . . . . .	255
11.9	Évaluation du système élémentaire . . . . .	256
11.10	Assemblage et imposition des conditions aux limites . . . . .	257
11.11	Résolution du système global . . . . .	257
11.12	Visualisation des résultats . . . . .	257
11.13	Applications . . . . .	257
11.13.1	Essai en cisaillement . . . . .	257
11.13.2	Plaque trouée en élongation . . . . .	258
11.14	Exercices . . . . .	263
<b>12</b>	<b>Problème de Stokes</b> . . . . .	<b>265</b>
12.1	Introduction . . . . .	265
12.2	Le problème continu . . . . .	266
12.2.1	Cadre fonctionnel . . . . .	268
12.2.2	Existence et unicité . . . . .	269
12.3	Le problème discret . . . . .	270
12.4	Formulation point-selle (facultative) . . . . .	272
12.5	Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	273
12.6	Choix des éléments . . . . .	275
12.6.1	Pression continue . . . . .	275
12.6.2	Pression discontinue . . . . .	276
12.7	Résultats numériques : cas newtonien . . . . .	280
12.7.1	L'écoulement de Poiseuille . . . . .	280
12.8	Problème de Stokes non linéaire . . . . .	285
12.8.1	Résultats numériques : cas viscoplastique . . . . .	286
12.9	Les équations de Navier-Stokes . . . . .	291
12.9.1	Résultats numériques : cas Navier-Stokes . . . . .	292
12.10	Exercices . . . . .	299
<b>13</b>	<b>Formulations mixtes en élasticité linéaire</b> . . . . .	<b>301</b>
13.1	Cas isotrope . . . . .	301
13.2	Cas anisotrope . . . . .	304
13.3	Résultats numériques . . . . .	307
13.3.1	Plaque trouée en élongation . . . . .	307
13.4	Exercices . . . . .	312
<b>14</b>	<b>Matériaux en grandes déformations</b> . . . . .	<b>313</b>
14.1	Introduction . . . . .	313
14.2	Déformations et tenseurs associés . . . . .	313
14.3	Tenseurs de Green-Lagrange et Piola-Kirchhoff . . . . .	319
14.4	Matériaux hyperélastiques . . . . .	323
14.4.1	Le cas quasi-incompressible . . . . .	330
14.4.2	Le cas incompressible . . . . .	332
14.5	Formulations variationnelles . . . . .	337

14.5.1	Intégrales volumiques	338
14.5.2	Intégrales surfaciques	339
14.5.3	Pression suiveuse	340
14.5.4	Formulation variationnelle sur la configuration initiale	340
14.6	Linéarisation et méthode de Newton	342
14.6.1	Formulation en déplacement seulement	342
14.6.2	Formulation mixte en déplacements-pression	344
14.6.3	Formulation pénalisée	347
14.7	Liens avec la géométrie différentielle intrinsèque	348
14.7.1	Variation du jacobien	348
14.7.2	Variation du jacobien surfacique	349
14.7.3	Variation de la normale	350
14.7.4	Pression suiveuse	351
14.8	Formulation Lagrangienne actualisée	352
14.8.1	Formulation en déplacement seulement	352
14.8.2	Formulation Lagrangienne actualisée mixte	356
14.8.3	Équivalence des formulations	357
14.8.4	Algorithme complet	357
14.9	Exercices	358
<b>15</b>	<b>Adaptation de maillages</b>	<b>359</b>
15.1	Introduction	359
15.2	Adaptation basée sur un estimateur d'erreur hiérarchique	360
15.2.1	Construction de la solution enrichie	362
15.2.2	Le cas unidimensionnel	366
15.3	Notion d'optimalité du maillage	367
15.3.1	Minimisation de l'erreur sur un élément	367
15.3.2	Le cas quadratique	370
15.4	Stratégie d'adaptation de maillage	370
15.4.1	Division d'arête	372
15.4.2	Élimination d'un sommet	373
15.4.3	Retournement d'arête	373
15.4.4	Déplacement d'un sommet	375
15.5	Exemples	377
<b>A</b>	<b>Rappels sur le théorème de la divergence</b>	<b>383</b>
A.1	Gradient, divergence et laplacien	383
A.2	Intégrales curvilignes et surfaciques	384
A.2.1	Rappel sur les intégrales curvilignes	384
A.2.2	Rappel sur les intégrales surfaciques	384
A.3	Théorème de la divergence	385
A.4	Exercices	389

<b>B</b>	<b>Interpolation de Lagrange</b>	<b>391</b>
B.1	Interpolation en dimension 1 . . . . .	392
B.2	Interpolation en dimension 2 . . . . .	394
B.2.1	Interpolation sur les triangles . . . . .	395
B.2.2	Sur les quadrilatères . . . . .	398
B.3	Interpolation en dimension 3 . . . . .	399
B.3.1	Sur les tétraèdres . . . . .	399
<b>C</b>	<b>Intégration numérique</b>	<b>401</b>
C.1	En dimension 1 . . . . .	401
C.2	En dimension 2 ou 3 . . . . .	404
C.2.1	Sur les quadrilatères . . . . .	404
C.2.2	Sur les triangles . . . . .	404
C.2.3	Sur les tétraèdres . . . . .	404
<b>D</b>	<b>Rappels sur les tenseurs</b>	<b>407</b>
D.1	Notions de base . . . . .	407
D.1.1	Les vecteurs . . . . .	407
D.1.2	Les tenseurs d'ordre 2 . . . . .	409
D.2	Calcul variationnel avec les tenseurs . . . . .	412
D.2.1	Résultats généraux . . . . .	412
D.2.2	Dérivées des invariants . . . . .	415
D.2.3	Application aux grandes déformations . . . . .	417
D.3	Exercices . . . . .	420
<b>E</b>	<b>Estimation des dérivées</b>	<b>421</b>
E.1	Estimation des dérivées aux noeuds . . . . .	421
	Réponses aux exercices du chapitre 2 . . . . .	425
	Réponses aux exercices du chapitre 3 . . . . .	426
	Réponses aux exercices du chapitre 4 . . . . .	428
	Réponses aux exercices du chapitre 5 . . . . .	429
	Réponses aux exercices du chapitre 6 . . . . .	431
	Réponses aux exercices du chapitre 8 . . . . .	433
	Réponses aux exercices du chapitre 14 . . . . .	436
	<b>Bibliographie</b>	<b>440</b>

# Table des figures

1.1	Solution par différences finies . . . . .	3
2.1	Fonction $\phi(x) = e^{\frac{R^2}{(x-p)^2 - R^2}}$ ( $R = 2$ , $p = 0$ ) . . . . .	9
2.2	Fonction $\phi(x) = e^{\frac{R^2}{x_1^2 + x_2^2 - R^2}}$ ( $R = 2$ et $\mathbf{p} = 0$ ) . . . . .	10
2.3	Espaces de fonctions $L^1_{loc}(\Omega)$ et de distributions $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ . . . . .	14
2.4	Fonction de Heaviside . . . . .	16
2.5	Fonction $f(x) =  x $ . . . . .	17
2.6	Domaines $\Omega_1$ et $\Omega_2$ séparés par une courbe $C$ . . . . .	20
2.7	Espace $L^2(\Omega)$ . . . . .	24
4.1	Solutions $u(x)$ et $u'(x)$ pour $N = 1$ , $N = 3$ et $N = 5$ . . . . .	61
4.2	Méthode de Ritz ( $N = 2$ ) . . . . .	62
4.3	Géométrie et conditions aux limites . . . . .	63
4.4	Méthode de Ritz en dimension 2 : fonctions $\delta_u(x)$ et $u(x)$ . . . . .	65
4.5	Quelques unes des figures de Chladni . . . . .	67
5.1	Maillage en dimension 1 . . . . .	75
5.2	Noeuds géométriques et de calcul sur un l'élément $K$ . . . . .	76
5.3	Maillage : $n_{el} = 3, n_g^K = 2, n_c^K = 3$ . . . . .	77
5.4	Fonctions d'interpolation linéaires sur $\hat{K}$ . . . . .	86
5.5	Fonctions d'interpolation linéaires sur $K$ . . . . .	87
5.6	Fonctions d'interpolation quadratiques sur $\hat{K}$ . . . . .	88
5.7	Fonctions d'interpolation quadratiques sur $K$ . . . . .	88
5.8	Fonctions d'interpolation hiérarchiques sur $K$ . . . . .	89
5.9	Fonctions de Ritz linéaires par élément . . . . .	94
5.10	Fonctions de Ritz quadratiques par élément . . . . .	96
5.11	Déflexion verticale d'un câble . . . . .	106
5.12	Maillage pour la déflexion verticale d'un câble . . . . .	107
5.13	Solution numérique : $u(x)$ et $T(x)u'(x)$ . . . . .	112
5.14	Fonctions d'interpolation d'Hermite ( $h^K = 1$ ) . . . . .	119
5.15	Problème de la poutre encastree . . . . .	121
5.16	Déformation de la poutre encastree . . . . .	126

6.1	Structure de la matrice avant et après renumérotation	135
6.2	Élément de référence triangulaire à 3 nœuds ( $n_g^K = 3$ )	136
6.3	Élément de référence triangulaire à 6 nœuds ( $n_g^K = 6$ )	136
6.4	Élément de référence quadrangulaire à 4 nœuds ( $n_g^K = 4$ )	137
6.5	Élément de référence quadrangulaire à 9 nœuds ( $n_g^K = 9$ )	137
6.6	Élément de référence tétraédrique à 4 nœuds ( $n_g^K = 4$ )	138
6.7	Transformation linéaire sur un triangle ( $n_g^K = 3$ )	141
6.8	Transformation quadratique sur un triangle ( $n_g^K = 6$ )	143
6.9	Géométrie courbe en dimension 2	144
6.10	Transformation linéaire sur un tétraèdre ( $n_g^K = 4$ )	144
6.11	Numérotation des éléments et des nœuds et des (degrés de liberté)	148
6.12	Maillage fin et Isovaleurs de la fonction $u(x, y)$ pour l'exemple 6.7	155
6.13	Géométrie et conditions aux limites	156
6.14	Maillage et isothermes pour l'exemple 6.8	157
6.15	Élément de référence triangulaire de degré 3 ( $n_g^K = 10$ )	158
6.16	Maillage et numéros de degrés de liberté	159
6.17	Élément $K$	160
7.1	Maillages et solutions	167
7.2	Maillages et solutions (suite)	168
7.3	Erreurs commises pour les approximations linéaire et quadratique	170
7.4	Transfert thermique : maillages et solutions	172
7.5	Coupe de la température sur l'axe $y = 1$	173
9.1	Transfert thermique instationnaire	203
9.2	Transfert thermique instationnaire (suite)	204
9.3	Évolution des concentrations de phyto et de zooplancton	207
9.4	Évolution des concentrations de phyto et de zooplancton (suite)	208
9.5	Plan de phase	216
9.6	Plan de phase	217
10.1	Maillage de deux éléments	221
10.2	Équation de convection-diffusion : différences centrées et éléments finis linéaires	222
10.3	Équation de convection-diffusion : différences arrières	223
10.4	Fonctions de Ritz au nœud $x_i$	224
10.5	Premier schéma de type SUPG avec $\alpha$ défini par 10.8	226
10.6	Fonction de Ritz modifiée de type SUPG	228
10.7	Schéma général de type SUPG	229
10.8	Méthode de Galerkin classique avec 20, 40 et 80 éléments ( $Pe = 100$ )	230
10.9	Perturbation singulière : maillage et solution SUPG.	233
10.10	Perturbation singulière : solution Galerkin et solution SUPG.	234
10.11	Convection pure : géométrie et conditions aux limites	235
10.12	Convection pure : maillage de base et maillage plus fin.	235



10.13	Convection pure et méthode de Galerkin : solutions linéaire (haut) et quadratique (bas).	237
10.14	Convection pure avec SUPG : solutions linéaire (haut) et quadratique (bas).	238
10.15	Transport pur avec SUPG : solutions linéaire (haut) et quadratique (bas) sur maillage plus fin.	239
11.1	Maillage, numéros d'éléments et numéros noeuds de calcul	251
11.2	Maillage et déformation en cisaillement	258
11.3	Plaque trouée : géométrie et conditions aux limites	259
11.4	Maillages initial et déformés pour $\nu = 0,3$ , $\nu = 0,4$ et $\nu = 0,4999$	260
11.5	Contraintes $\sigma_{11}$ pour $\nu = 0,3$ , $\nu = 0,4$ et $\nu = 0,4999$	261
11.6	Contrainte $\sigma_{11}$ pour $\nu = 0,49999999$	262
12.1	Élément Mini ( $O(h)$ )	276
12.2	Élément Mini en dimension 3 ( $O(h)$ )	276
12.3	Élément de Taylor-Hood $P_2 - P_1$ ( $O(h^2)$ )	277
12.4	Élément $P_2 - P_1$ en dimension 3 ( $O(h^2)$ )	277
12.5	Élément $Q_2 - Q_1$ ( $O(h^2)$ )	277
12.6	Élément $Q_2 - Q_1$ en dimension 3 ( $O(h^2)$ )	278
12.7	Élément incompatible à pression discontinue $Q_1 - Q_0$	278
12.8	Élément incompatible $Q_1 - Q_0$ en dimension 3	278
12.9	Élément à pression discontinue $P_2 - P_0$ ( $O(h)$ )	279
12.10	Élément à pression discontinue de Crouzeix-Raviart $P_2^+ - P_1$ ( $O(h^2)$ )	279
12.11	Élément à pression discontinue $Q_2 - P_1$ ( $O(h^2)$ )	279
12.12	Écoulement de Poiseuille (géométrie et conditions aux limites)	281
12.13	Écoulement de Poiseuille : maillages rectangulaire et triangulaire	282
12.14	Écoulement de Poiseuille pour l'élément $Q_1 - Q_0$ : maillages initial et perturbé	283
12.15	Écoulement de Poiseuille pour l'élément Mini et $P_2 - P_1$	284
12.16	Écoulement de Poiseuille : loi puissance avec $n = 1$ , $n = 0,7$ et $n = 0,4$	288
12.17	Profil de vitesse en sortie : $n = 1$ , $n = 0,7$ et $n = 0,4$	289
12.18	Perte de charge dans le canal : $n = 1$ , $n = 0,7$ et $n = 0,4$	289
12.19	Maillage, perte de charge et module de vitesse en sortie de filière	290
12.20	Écoulement autour d'un cylindre : géométrie et conditions aux limites	293
12.21	Maillage pour l'écoulement autour d'un cylindre	296
12.22	Cas stationnaire : lignes de courant à $Re = 1,45$ et $100$	297
12.23	Cas instationnaire : lignes de courant à $Re = 100$ sur approximativement une période	298
13.1	Maillages initial et déformés pour $\nu = 0,3$ , $\nu = 0,4$ et $\nu = 0,4999$	308
13.2	Contrainte $\sigma_{11}$ pour $\nu = 0,3$ , $\nu = 0,4$ et $\nu = 0,4999$	309
13.3	Champs de pression pour $\nu = 0,3$ , $\nu = 0,4$ et $\nu = 0,4999$	310
13.4	Contrainte $\sigma_{11}$ et pression pour $\nu = 0,49999999$	311
14.1	Description cinématique	314
14.2	Comparaison d'une condition de Neumann et d'une pression suiveuse	345

15.1	$u_h^{(k)} + c_h^{(k+1)} = \hat{u}_h^{(k+1)}$ , for $k = 1, 2$ . . . . .	363
15.2	Triangles optimaux pour des fonctions quadratiques définies positives. . . . .	369
15.3	Hessien indéfini. . . . .	370
15.4	Division d'une arête . . . . .	372
15.5	Élimination d'un noeud . . . . .	373
15.6	Retournement d'une arête interne . . . . .	374
15.7	Retournement d'une arête de bord . . . . .	374
15.8	Retournement d'arête dans une coquille à trois tétraèdres : coquille initiale (gauche et centre) et finale (à droite). . . . .	375
15.9	Retournement d'arête dans une coquille à quatre tétraèdres : coquille initiale (gauche), polygone associé (centre) et coquilles finales (droite). . . . .	376
15.10	Déplacement d'un sommet . . . . .	377
15.11	Solutions à $Pe = 100$ . . . . .	379
15.12	Solutions à $Pe = 100$ . . . . .	380
15.13	Solution linéaire à $Pe = 10\,000$ . . . . .	381
A.1	Ouvert $\Omega$ de frontière $\Gamma$ . . . . .	385
E.1	Patch d'éléments et ses noeuds autour d'un sommet $N$ . . . . .	423

# Chapitre 1

## Introduction et exemples

### 1.1 Bref historique

L'idée fondamentale derrière la méthode des éléments finis remonte loin en arrière. Les grecs par exemple avaient reconnu que l'on peut approcher la solution d'un problème complexe en le divisant en problèmes plus simples. On peut par exemple approcher le périmètre d'un cercle en calculant le périmètre d'un polygone à  $n$  côtés, pourvu que  $n$  soit suffisamment grand. Il suffit alors de connaître la longueur d'un segment de droite, problème beaucoup plus simple que celui de la longueur d'un arc de cercle.

L'application à la solution des équations aux dérivées partielles est évidemment plus récente et est intimement liée au développement de l'informatique. Courant [16] a introduit le concept de formulation variationnelle, qui est à la base de toute méthode d'éléments finis.

Pour la méthode de Ritz [53], on part d'un problème posé dans un espace de dimension infinie. On approche ensuite la solution du problème initial en cherchant une solution dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. Ces problèmes approchés sont en général beaucoup plus facile à résoudre. On peut de plus espérer que la solution du problème en dimension infinie peut être obtenue par un passage à la limite. Le choix des fonctions de base constituant ces espaces de dimension finie est délicat et initialement on les construisait globalement sur le domaine. C'est Courant qui eut l'idée d'introduire des fonctions à support local qui simplifient grandement leur construction.

La théorie derrière la méthode des éléments finis a pris une forme plus rigoureuse avec les travaux de Strang et Fix [56]. à compléter ...

### 1.2 Applications

On retrouve les premières applications véritables de la méthode des éléments finis en 1956 en mécanique des structures. Un groupe de chercheurs (Turner, Clough, Martin et Topp [59]) de Boeing utilisent cette méthode pour calculer la voilure d'un avion. à compléter ...

La méthode des éléments finis est maintenant reconnue comme l'une des principales méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) dans des géométries quelconques, que ce soit en dimension un, deux ou trois. On trouve même des méthodes d'éléments finis en dimension

4, soit en espace-temps...

Les applications sont tout aussi nombreuses et variées. Les ingénieurs de diverses disciplines utilisent les éléments finis, que ce soit en mécanique des fluides ou des solides, mais aussi pour les problèmes thermiques, électro-magnétiques, chimiques, etc. On retrouve aussi des applications en physique, et notamment en astrophysique. à compléter ...

### 1.3 Brève introduction à la problématique

Pour illustrer le fonctionnement de la méthode des éléments finis et pour justifier l'introduction d'un certain nombre d'outils mathématiques, nous allons considérer un exemple très simple et effectuer une comparaison avec la méthode des différences finies.

Soit donc l'équation différentielle :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $f(x)$  est une fonction connue. On cherche donc à obtenir une approximation de la solution  $u(x)$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour ce faire, subdivisons cet intervalle en  $N$  sous-intervalles de longueur  $h = 1/N$  (les sous-intervalles peuvent éventuellement être de longueurs différentes). On obtient ainsi  $N + 1$  points  $x_i$  vérifiant  $x_0 = 0$ ,  $x_N = 1$  et pour les points intermédiaires :

$$x_i = \frac{i}{N}, \quad x_{i+1} - x_i = h$$

On note  $u_i$ , l'approximation de  $u(x_i)$  au point  $x_i$ . Les conditions aux limites imposent que  $u_0 = u_N = 0$ . La méthode des différences finies consiste à *discrétiser* directement l'équation différentielle en remplaçant les dérivées de  $u(x)$  par des *différences finies* et ce, en chaque point  $x_i$ . On peut par exemple utiliser une différence centrée d'ordre 2 (voir Fortin, réf. [25]) :

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + O(h^2) \simeq \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

L'équation différentielle s'écrit en chaque point  $x_i$  :

$$-u''(x_i) = f(x_i)$$

de sorte qu'en remplaçant par la différence centrée, on obtient :

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

et ce pour  $i$  allant de 1 jusqu'à  $N - 1$ . Dans l'équation précédente, on a bien sûr négligé le terme d'erreur  $O(h^2)$  et il en résulte une approximation d'ordre 2. On obtient ainsi un système linéaire de  $(N - 1)$  équations en  $(N - 1)$  inconnues de la forme :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

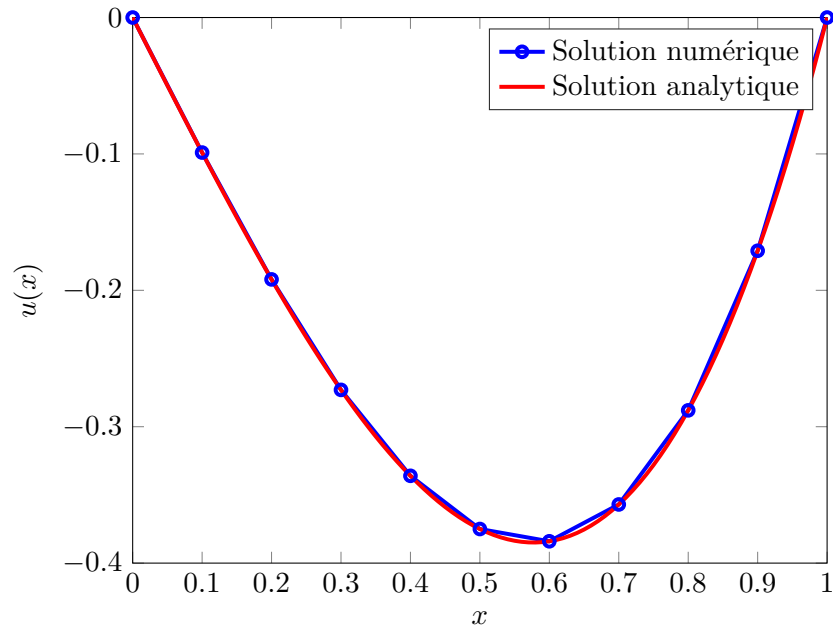


Figure 1.1 – Solution par différences finies

La résolution de ce système linéaire tridiagonal est simple et fournit une solution approximative de l'équation différentielle de départ aux points  $x_i$ . Ainsi, à la figure 1.1, on peut voir la solution numérique obtenue avec 10 intervalles ( $h = 0,1$ ) et la fonction  $f(x) = -6x$ . Dans ce cas, on vérifie facilement que la solution analytique est  $u(x) = x^3 - x$ . On peut dès lors constater que la solution numérique est une bonne approximation de la solution analytique.

La méthode des éléments finis procède tout autrement. Nous allons donc reprendre l'exemple précédent par cette méthode, mais sans justifier toutes les étapes puisque nous ne sommes pas encore en mesure de le faire. Multiplions l'équation différentielle 1.1 par une fonction dite *test*  $w(x)$  que nous supposons pour l'instant quelconque et intégrons sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On obtient :

$$\int_0^1 -u''(x)w(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

Intégrons maintenant par parties (en supposant que  $w(x)$  soit suffisamment régulière) pour obtenir :

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx - (u'(1)w(1) - u'(0)w(0)) = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

Si on suppose maintenant que  $w(0) = w(1) = 0$ , on obtient une *formulation variationnelle* qui consiste à déterminer une fonction  $u(x)$ , vérifiant  $u(0) = u(1) = 0$  et telle que :

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx \quad \forall w(x) \mid w(0) = w(1) = 0 \quad (1.2)$$

**Remarque 1.1.** La formulation variationnelle 1.2 ne fait apparaître que la dérivée d'ordre 1 de la fonction  $u(x)$  (et de la fonction test  $w(x)$ ) et demande donc moins de régularité que l'équation différentielle elle-même qui, dans ce cas, est d'ordre 2. La formulation variationnelle 1.2 est donc aussi appelée *formulation faible* (ou *forme faible*) de l'équation différentielle 1.1 par opposition à l'équation différentielle elle-même dite *formulation forte*. ◀

Il est évident que toute solution de 1.1 vérifie la formulation variationnelle 1.2. Par contre, l'inverse n'est pas aussi évident. Démontrons-le, toujours formellement. Soit donc  $u(x)$  une solution de la formulation variationnelle 1.2. Essayons de refaire le chemin inverse, jusqu'à l'équation différentielle 1.1. En intégrant par parties, on trouve :

$$\int_0^1 -u''(x)w(x)dx + u'(1)w(1) - u'(0)w(0) = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

c.-à-d.

$$\int_0^1 (-u''(x) - f(x)) w(x)dx = 0$$

qui est valide pour toute fonction  $w(x)$  qui s'annule en 0 et 1. Il nous faut déduire de cette équation que :

$$-u''(x) - f(x) = 0$$

Pour y arriver, il faut effectuer un choix judicieux de fonction  $w(x)$ . Considérons d'abord la fonction  $\phi(x) = x(1-x)$  qui est positive dans l'intervalle  $]0, 1[$  et qui s'annule en  $x = 0$  et  $x = 1$ . Choisissons ensuite :

$$w(x) = \phi(x)(-u''(x) - f(x))$$

Cette fonction test  $w(x)$  s'annule bien en  $x = 0$  et en  $x = 1$  et est donc admissible. On obtient ainsi :

$$\int_0^1 (-u''(x) - f(x))^2 \phi(x)dx = 0$$

Puisque l'intégrand est toujours positif et que son intégrale est nulle, on en conclut que :

$$(-u''(x) - f(x))^2 \phi(x) = 0$$

Puisque  $\phi(x)$  ne s'annule pas à l'intérieur de l'intervalle, on peut affirmer que :

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{dans } ]0, 1[$$

et donc que  $u(x)$  vérifie l'équation différentielle. Il y a donc équivalence entre l'équation différentielle 1.1 et la formulation variationnelle 1.2.

Plusieurs questions importantes demeurent en ce qui concerne le développement précédent dont plusieurs étapes restent largement à justifier.

1. Comment déterminer précisément les fonctions tests  $w(x)$  admissibles ?
2. Sous quelles conditions la formulation variationnelle (1.2) possède-t-elle une solution unique ?
3. Sous quelles conditions la formulation variationnelle (*formulation faible*) est-elle équivalente à l'équation différentielle (*formulation forte*) ?

4. Comment peut-on discrétiser cette formulation variationnelle pour en tirer une solution numérique comme nous l'avons fait par la méthode des différences finies ?
5. Cette solution numérique converge-t-elle vers la solution analytique ? Et à quelle vitesse ?

C'est à toutes ces questions et à d'autres que nous tâcherons de répondre dans ce texte. La méthode des éléments finis est de fait une technique d'approximation des formulations variationnelles des équations aux dérivées partielles. En essayant de répondre aux questions précédentes, nous verrons la nécessité d'introduire un certain nombre d'outils mathématiques. C'est l'objet des deux chapitres suivants.





## Chapitre 2

# Espaces fonctionnels

L'analyse de la méthode des éléments finis requiert une bonne dose d'analyse fonctionnelle, outil fondamental pour une véritable compréhension de cette méthode. C'est l'objet de ce chapitre. Précisons dès le départ que notre objectif n'est pas de donner un cours d'analyse fonctionnelle complet mais bien de donner les outils de base nécessaires à l'utilisation efficace de la méthode des éléments finis.

Parmi les outils de base, on retrouve les notions de distributions, d'espaces de Hilbert, de Sobolev, etc. L'étude de ces notions pourrait faire l'objet d'un livre (et même de plusieurs) et il va de soi que nous nous contenterons d'un survol assez rapide mais relativement complet. Nous omettrons toutefois beaucoup de détails et de subtilités qui ont bien sûr leur importance mais qui ne sont pas essentielles à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

### 2.1 Les distributions

Les distributions sont aux fonctions ce que les nombres irrationnels sont aux nombres rationnels. Les distributions sont en fait une généralisation de la notion de fonction. Nous en ferons une présentation sommaire en nous limitant aux notions essentielles comme la dérivation d'une distribution. Nous référons le lecteur à Gasquet-Witowski, réf. [31] pour un traitement simple et moderne de la théorie des distributions. Le lecteur plus averti peut consulter le texte de L. Schwartz, réf. [55] pour un traitement plus complet et plus classique.

#### 2.1.1 Définitions et propriétés générales

Dans ce qui suit,  $\Omega$  désignera un ensemble ouvert de  $R^n$  dont la frontière  $\Gamma$  est régulière. Rappelons maintenant deux notions importantes pour la suite.

##### **Définition 2.1: Support d'une fonction**

Le *support* d'une fonction  $f(\mathbf{x})$  est le plus petit ensemble fermé de valeurs de  $\mathbf{x}$  en dehors duquel la fonction  $f(\mathbf{x})$  est identiquement nulle. C'est donc la fermeture de l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  tels que  $f(\mathbf{x}) \neq 0$ .

**Définition 2.2: Sous-ensemble compact**

Un sous-ensemble de  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit *compact* s'il est fermé et borné.

**Exemple 2.3.** La fonction :

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

a comme support l'intervalle fermé  $[-1, 1]$  qui est un ensemble compact.  $\blacklozenge$

Un ensemble compact  $A$  contient donc tous ses points frontières et de plus, puisqu'il est borné, il existe une constante  $M$  telle que :

$$A \subset \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq M\}$$

où  $\|\mathbf{x}\|_2$  désigne la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  :

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (2.1)$$

Le compact  $A$  est ainsi inclus dans un disque de rayon  $M$ , pourvu que  $M$  soit suffisamment grand.

**Définition 2.4: Espace  $\mathcal{D}(\Omega)$** 

On appelle  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions infiniment différentiables sur  $\Omega$  et dont le support est compact et inclus dans  $\Omega$ .

Les fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  possèdent donc la propriété de s'annuler identiquement au voisinage du bord de  $\Omega$  ou lorsque la norme de  $\mathbf{x}$  est suffisamment grande, ce qui nous sera très utile par la suite. Elles sont de plus extrêmement régulières puisqu'infiniment différentiables et leurs dérivées s'annulent également au voisinage de la frontière du domaine  $\Omega$ .

**Exemple 2.5.** Les fonctions  $e^x$ ,  $x^n$  ( $n$  entier positif),  $\sin x$ , etc. sont infiniment différentiables mais ne sont pas à support compact dans tout intervalle  $]a, b[$  ou même dans  $\mathcal{R}$ . Elles n'appartiennent donc pas à  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Inversement, la fonction  $f(x) = |x|$  si  $|x| \leq 1$  et 0 partout ailleurs est à support compact (son support est l'intervalle  $[-1, 1]$ ) mais n'est pas différentiable en  $x = 0$  et  $x = \pm 1$ . Cette fonction n'appartient donc pas à  $\mathcal{D}(\Omega)$ .  $\blacklozenge$

**Exemple 2.6.** Les fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  ne sont pas triviales à construire. L'exemple le plus simple en dimension 1 est la fonction :

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{R^2}{|x-p|^2 - R^2}\right) & \text{si } |x-p| < R \\ 0 & \text{si } |x-p| \geq R \end{cases}$$

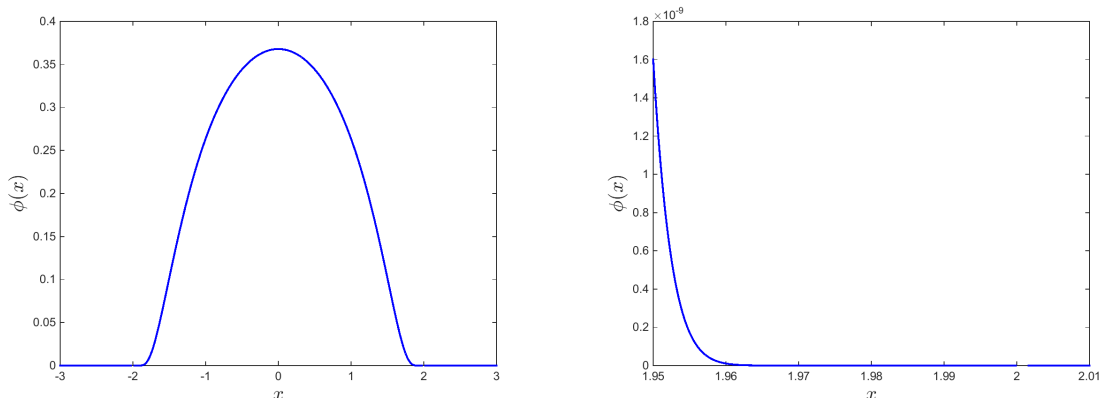


Figure 2.1 – Fonction  $\phi(x) = e^{\frac{R^2}{(x-p)^2 - R^2}}$  ( $R = 2$ ,  $p = 0$ )

centrée en  $x = p$  et de rayon  $R$  et que l'on peut voir à la figure 2.1 dans le cas où  $R = 2$  et  $p = 0$ . Le support de cette fonction est l'intervalle fermé  $[p - R, p + R]$ . On choisit les paramètres  $R$  et  $p$  de sorte que ce support soit inclus dans le domaine  $\Omega$ . Sur l'agrandissement de la figure 2.1, on constate aisément la transition très douce (infiniment différentiable) en  $x = 2$  ( $x = R$  dans le cas général). On peut généraliser en plusieurs dimensions cette fonction par la formule suivante :

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(\frac{R^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|_2^2 - R^2}\right) & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|_2 < R \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|_2 \geq R \end{cases} \quad (2.2)$$

Le point  $\mathbf{p}$  désigne en quelque sorte le centre de la fonction et  $R$  le rayon de la bulle. Ici encore, le disque fermé de centre  $\mathbf{p}$  et de rayon  $R$  doit être inclus dans  $\Omega$ . La figure 2.2 illustre en dimension 2 le cas où  $R = 2$  et  $\mathbf{p}$  est situé à l'origine. On peut ainsi varier le point  $\mathbf{p}$  et le rayon  $R$  pour obtenir toute une famille de fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . ♦

Pour arriver aux distributions, il est nécessaire d'introduire un peu de terminologie. Une fonction  $\psi$  est une application qui associe à un point  $x$  un scalaire  $\psi(x)$ . On peut généraliser cette définition et ainsi introduire la notion de fonctionnelle.

#### Définition 2.7: Fonctionnelle

Une *fonctionnelle*  $T$  est une application qui associe à une fonction  $\psi(x)$  d'un ensemble  $E$ , un scalaire noté  $\langle T, \psi \rangle$ . L'ensemble de fonctions  $E$  est appelé le *domaine de définition de la fonctionnelle*.

Une fonctionnelle est une fonction agissant sur des fonctions c.-à-d. une « fonction de fonctions ». Les exemples abondent de fonctionnelles qui nous seront très utiles. En voici quelques unes.

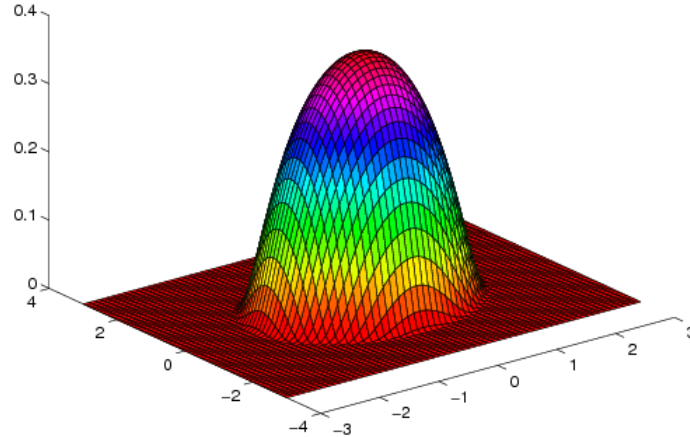


Figure 2.2 – Fonction  $\phi(\mathbf{x}) = e^{\frac{R^2}{x_1^2+x_2^2-R^2}}$  ( $R = 2$  et  $\mathbf{p} = 0$ )

**Exemple 2.8.** Si  $\psi(\mathbf{x})$  est une fonction intégrable sur  $\Omega$ , on peut alors définir :

$$\langle T_1, \psi \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \, dv \quad (2.3)$$

Le domaine de définition de cette première fonctionnelle est donc l'ensemble des fonctions intégrables sur  $\Omega$  c.-à-d. les fonctions pour lesquelles :

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \, dv < \infty$$

Notre deuxième exemple est la « fonction » de Dirac définie par :

$$\langle \delta_{\mathbf{a}}, \psi \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \psi(\mathbf{a}) \quad (2.4)$$

Nous verrons plus loin qu'il ne s'agit pas du tout d'une fonction. Par contre, il s'agit bien d'une fonctionnelle dont le domaine de définition est l'ensemble des fonctions définies au point  $\mathbf{a}$ .

Enfin, si  $f(\mathbf{x})$  est une fonction donnée, on peut alors définir une autre fonctionnelle de la façon suivante :

$$\langle T_f, \psi \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \, dv \quad (2.5)$$

Il nous faudra préciser un peu plus tard le domaine de définition de cette fonctionnelle c.-à-d. pour quelles fonctions  $f(\mathbf{x})$  et  $\psi(\mathbf{x})$  une telle expression a un sens. On remarque que la fonctionnelle  $T_1$  correspond au cas  $f(x) = 1$ .  $\blacklozenge$

**Remarque 2.9.** Dans l'exemple précédent, la définition même des intégrales est imprécise. Pour leur donner un sens rigoureux, il faut faire appel à la théorie de la *mesure* et plus particulièrement à l'*intégrale de Lebesgue* (voir par exemple Bartle, réf. [4] ou Jean, réf. [41]). La théorie de Lebesgue donne un sens précis à des expressions de la forme :

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \, dv \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} \psi(s) \, ds$$

et en particulier à  $dv$  et  $ds$  qui sont alors des mesures. Le lecteur non familier avec cette théorie peut voir l'intégrale de Lebesgue comme une généralisation de l'intégration classique de Riemann. Nous ne ferons dans cet ouvrage que quelques références occasionnelles à la notion de mesure. ◀

**Exemple 2.10.** On peut également définir des fonctionnelles agissant sur un vecteur de fonctions :

$$\mathbf{w} = (w_1(x_1, x_2, x_3), w_2(x_1, x_2, x_3), w_3(x_1, x_2, x_3))$$

On considère par exemple un corps fait d'un matériau isotrope (en dimension 3) et soumis à des forces externes (forces par unité de volume en  $\text{N/m}^3$ ) :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = (r_1(x_1, x_2, x_3), r_2(x_1, x_2, x_3), r_3(x_1, x_2, x_3))$$

Sous l'effet de ces sollicitations, le corps se déformera de manière à minimiser la *fonctionnelle énergie* définie par :

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \lambda \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\mu}{4} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) dv - \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv \quad (2.6)$$

Le premier terme de cette expression est l'énergie de déformation tandis que le deuxième terme correspond à l'énergie potentielle des forces externes. On cherchera donc, parmi les déplacements admissibles  $\mathbf{w}$  (en m), celui qui minimise cette fonctionnelle non linéaire. Les unités de  $J(\mathbf{w})$  sont des N m, ce qui correspond bien à une énergie. ♦

### Définition 2.11: Fonctionnelle linéaire

Une fonctionnelle  $T$  est dite *linéaire* sur l'ensemble de fonctions  $E$  si elle vérifie les conditions suivantes :

1.  $\langle T, \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle T, \psi_1 \rangle + \langle T, \psi_2 \rangle, \quad \forall \psi_1 \text{ et } \forall \psi_2 \in E;$
2.  $\langle T, \beta \psi \rangle = \beta \langle T, \psi \rangle, \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \psi \in E;$

On peut contracter ces deux conditions en vérifiant que  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  et  $\forall \psi_1, \psi_2 \in E$ , on a :

$$\langle T, \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \rangle = \alpha_1 \langle T, \psi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T, \psi_2 \rangle$$

Les fonctionnelles 2.3, 2.4 et 2.5 sont linéaires, comme on peut facilement le constater. Prenons par exemple la fonctionnelle  $T_f$ . On a alors :

$$\langle T_f, \beta\psi \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\beta\psi(\mathbf{x}) \, dv = \beta \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \, dv = \beta \langle T_f, \psi \rangle$$

De plus :

$$\begin{aligned} \langle T_f, \psi_1 + \psi_2 \rangle &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) (\psi_1(\mathbf{x}) + \psi_2(\mathbf{x})) \, dv = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\psi_1(\mathbf{x}) \, dv + \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\psi_2(\mathbf{x}) \, dv \\ &= \langle T_f, \psi_1 \rangle + \langle T_f, \psi_2 \rangle \end{aligned}$$

Par contre, la fonctionnelle :

$$\langle T, \psi \rangle = \int_{\Omega} (\psi(\mathbf{x}))^2 \, dv$$

ne l'est pas puisque  $(\psi_1 + \psi_2)^2 \neq \psi_1^2 + \psi_2^2$ . Il en est de même pour la fonctionnelle 2.6 qui est en fait quadratique comme nous le verrons plus loin.

**Remarque 2.12.** Pour compléter le tableau, il nous faudrait introduire la notion de *continuité* d'une fonctionnelle. Pour cela, il serait nécessaire d'introduire une *topologie* sur l'ensemble  $E$  et de définir la notion de *fonctionnelle continue*. Cela ne nous paraît pas essentiel à ce stade-ci pour bien comprendre la suite. Nous reviendrons un peu plus loin sur la notion de continuité dans le cadre des espaces de Hilbert. ◀

### Définition 2.13: Distribution

Une fonctionnelle linéaire (et continue) définie sur l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est une *distribution*. L'ensemble des distributions possède une structure d'espace vectoriel que nous notons  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

L'espace  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est aussi appelé *espace dual* de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Nous reviendrons sur la notion d'espace dual un peu plus loin. Les trois fonctionnelles linéaires que nous avons vues sont des distributions. En particulier, la *distribution de Dirac* :

$$\langle \delta_{\mathbf{a}}, \phi \rangle = \phi(\mathbf{a}) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.7)$$

est sans doute la plus connue.

**Remarque 2.14.** Bien que cela soit souvent le cas, les distributions ne sont pas toujours associées à ce qu'on pourrait qualifier de forme intégrale comme cela est le cas pour les distributions  $T_1$  et  $T_f$ . Ainsi, la distribution de Dirac ne peut s'écrire sous forme intégrale bien que l'on trouve parfois la notation :

$$\int_{\Omega} \delta_{\mathbf{a}} \phi \, dv = \phi(\mathbf{a})$$

Nous verrons un peu plus loin qu'il n'existe pas de fonction « classique » vérifiant une telle propriété. Cette notation est donc erronée et ne devrait pas être employée. *Il faut donc éviter d'associer automatiquement l'expression  $\langle T, \phi \rangle$  avec une forme intégrale.* ◀

On peut manipuler les distributions, un peu comme les fonctions et définir l'addition, la multiplication d'une distribution par un scalaire et l'égalité de deux distributions.

— **Addition de deux distributions :**

On définit l'addition de deux distributions  $T_1$  et  $T_2$  par :

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.8)$$

— **Multiplication d'une distribution  $T$  par un scalaire  $\beta \in \mathbb{R}$  :**

$$\langle \beta T, \phi \rangle \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \beta \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.9)$$

— **Multiplication d'une distribution  $T$  par une fonction infiniment différentiable  $h(\mathbf{x})$  :**

$$\langle hT, \phi \rangle \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \langle T, h\phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.10)$$

— **Égalité de deux distributions :**

Les distributions  $T_1$  et  $T_2$  sont dites égales si :

$$\langle T_1, \phi \rangle = \langle T_2, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.11)$$

On remarque que les distributions ne sont définies que par l'effet qu'elles produisent sur les fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Les définitions paraissent alors naturelles et il est important de noter que deux distributions sont réputées égales si elles ont le même effet sur toutes les fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

## Fonctions localement intégrables et distributions régulières

### Définition 2.15: Fonction localement intégrable

Une fonction  $f(\mathbf{x})$  est dite *localement intégrable* si elle est intégrable sur tout compact inclus dans  $\Omega$  ou encore si :

$$\int_A |f(\mathbf{x})| dv < \infty \quad \forall \text{ compact } A \subset \Omega \quad (2.12)$$

L'ensemble des fonctions localement intégrables forme un espace noté  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

Notons immédiatement qu'une fonction peut ne pas être intégrable sur tout le domaine  $\Omega$  mais être tout de même localement intégrable. On pense par exemple à la fonction  $f(x) = 1$  lorsque  $\Omega = \mathbb{R}$ .

On peut associer à une fonction localement intégrable  $f(\mathbf{x}) \in L^1_{loc}(\Omega)$  une distribution  $T_f$  définie par :

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) dv \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Il est facile de constater que l'expression précédente a un sens c.-à-d. :

$$\left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) dv \right| \leq \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})| dv \leq M_{\phi} \int_{K_{\phi}} |f(\mathbf{x})| dv < \infty$$

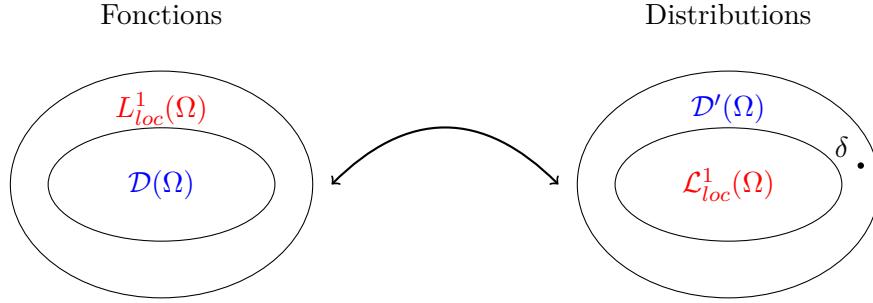


Figure 2.3 – Espaces de fonctions  $L^1_{loc}(\Omega)$  et de distributions  $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$

car l'intégrale porte en fait sur le support compact  $K_\phi$  de la fonction  $\phi$  qui y est bornée par  $M_\phi$ . Ainsi, à toute fonction localement intégrable, nous avons associé une distribution. Une telle distribution est dite *régulière*. Nous noterons  $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$  l'espace des distributions associées à une fonction de  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Inversement, pour une distribution quelconque, il n'est pas toujours possible de lui associer une fonction localement intégrable. L'espace  $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$  est donc un sous-espace propre de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  tel qu'illustré à la figure 2.3.

**Lemme 2.16**

La distribution de Dirac n'est pas régulière.

*Démonstration.* On doit montrer qu'il n'existe pas de fonction  $f(\mathbf{x})$  localement intégrable telle que :

$$\langle \delta_{\mathbf{a}}, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \, dv = \phi(\mathbf{a}) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Si une telle fonction  $f(\mathbf{x})$  existait, en posant  $\phi(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{x})$ , où  $\phi_n(\mathbf{x})$  est la fonction définie par l'équation 2.2 centrée en  $\mathbf{a}$  ( $\mathbf{p} = \mathbf{a}$ ) et de rayon  $1/n$  ( $R = 1/n$ ), on aurait :

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x}) \, dv = \phi_n(\mathbf{a}) = e^{-1}$$

Si  $C(\mathbf{a}, n)$  désigne le disque de centre  $\mathbf{a}$  et de rayon  $1/n$ , on aurait de plus :

$$e^{-1} = |\phi_n(\mathbf{a})| \leq \int_{C(\mathbf{a}, n)} |f(x)| |\phi_n(\mathbf{x})| \, dv \leq e^{-1} \int_{C(\mathbf{a}, n)} |f(x)| \, dv$$

puisque les fonctions  $\phi_n(\mathbf{x})$  sont toutes bornées par  $e^{-1}$ . La dernière inégalité constitue une contradiction puisque le terme de droite tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. ■



## Dérivées d'une distribution

On peut généraliser la notion de dérivée aux distributions, ce qui nous sera très utile pour les équations aux dérivées partielles. Nous nous limiterons pour l'instant aux fonctions d'une variable et nous supposons que l'ouvert  $\Omega$  est tout simplement l'intervalle ouvert  $]a, b[$ . Soit donc une fonction continue  $f(x)$  dont la dérivée est *continue par morceaux* c.-à-d. dont la dérivée possède éventuellement un nombre fini de *discontinuités de première espèce* (sauts de hauteur finie) dans l'intervalle  $]a, b[$ . On associe alors à la dérivée  $f'(x)$  une distribution  $T_{f'}$  définie par :

$$\langle T_{f'}, \phi \rangle = \int_a^b f'(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]a, b[)$$

On peut alors intégrer par parties et écrire :

$$\begin{aligned} \langle T_{f'}, \phi \rangle &= - \int_a^b f(x)\phi'(x)dx + f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a) \\ &= - \int_a^b f(x)\phi'(x)dx \end{aligned}$$

Les termes de bord de l'intégration par parties s'annulent car les fonctions  $\phi$  sont à support compact dans l'intervalle  $]a, b[$  et doivent donc s'annuler en  $a$  et  $b$ . Il vient alors que :

$$\langle T_{f'}, \phi \rangle = - \int_a^b f(x)\phi'(x)dx = - \langle T_f, \phi' \rangle$$

Le raisonnement précédent n'est valide que pour les fonctions  $f(x)$  dont la dérivée est continue par morceaux. Par contre, nous nous servons de la dernière relation comme définition de la dérivée d'une distribution. L'idée derrière cela est que ce qui est vrai pour les fonctions usuelles doit être encore valide pour les distributions. On peut faire un raisonnement similaire, sous des hypothèses de régularité appropriées sur la fonction  $f(x)$ , pour traiter les dérivées d'ordre supérieur. Il en résulte alors de manière naturelle la définition suivante.

### Définition 2.17: Dérivée d'une distribution

On définit la dérivée d'une distribution  $T$  par la relation :

$$\langle T', \phi \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} - \langle T, \phi' \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]a, b[) \quad (2.13)$$

On définit de manière similaire, la dérivée d'ordre  $n$  :

$$\langle T^{(n)}, \phi \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} (-1)^n \langle T, \phi^{(n)} \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]a, b[) \quad (2.14)$$

La dérivée de la distribution  $T$  est passée, via l'intégration par parties aux fonctions  $\phi$  qui sont infiniment différentiables. Il en résulte que, contrairement aux fonctions, les distributions sont toutes infiniment différentiables.

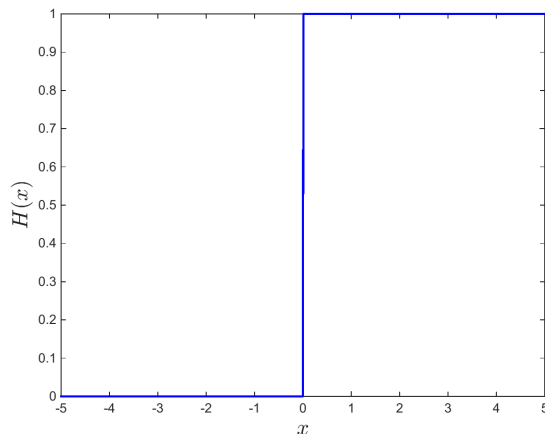


Figure 2.4 – Fonction de Heaviside

**Exemple 2.18.** Nous supposons dans cet exemple que l'ouvert  $\Omega$  est  $] -\infty, \infty[$ . La fonction de Heaviside ou fonction échelon s'écrit :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et est illustrée à la figure 2.4. La fonction n'est pas définie en 0 et n'est bien sûr pas dérivable au sens classique à cet endroit. Cette fonction étant localement intégrable, on lui associe une distribution que nous notons  $T_H$  définie par :

$$\langle T_H, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi(x)dx = \int_0^{\infty} \phi(x)dx$$

et dont la dérivée est à son tour définie à l'aide de la relation 2.13 :

$$\begin{aligned} \langle T'_H, \phi \rangle &\stackrel{\text{déf.}}{=} -\langle T_H, \phi'(x) \rangle = -\int_0^{\infty} \phi'(x)dx \\ &= -(\phi(\infty) - \phi(0)) = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

On en conclut immédiatement que :

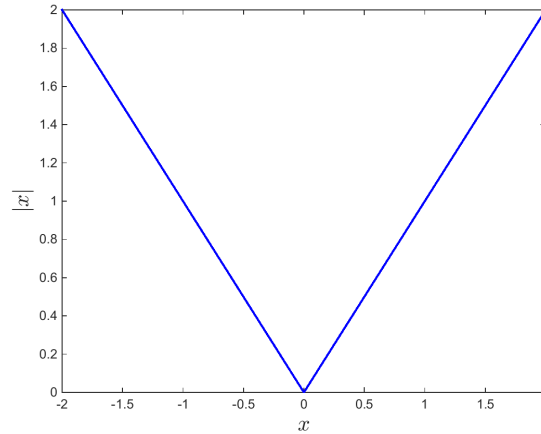
$$\langle T'_H, \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et donc, en vertu de la relation 2.11, la dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside est tout simplement la distribution de Dirac en 0. ♦

**Exemple 2.19.** Les distributions étant toutes différentiables, on s'intéresse à la dérivée de la distribution de Dirac. On a ainsi :

$$\langle \delta'_a, \phi \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} -\langle \delta_a, \phi' \rangle = -\phi'(a) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

♦

Figure 2.5 – Fonction  $f(x) = |x|$ 

**Remarque 2.20.** Il est tentant d'identifier une fonction localement intégrable et la distribution régulière qui lui est associée. Ainsi la fonction de Heaviside serait confondue avec la distribution  $T_H$  définie plus haut. Nous essaierons d'éviter cette association qui peut mener à des abus. ◀

**Exemple 2.21.** La fonction  $f(x) = |x|$  n'est pas différentiable en 0, comme l'illustre la figure 2.5. On peut par contre lui associer une distribution  $T_{|x|}$  définie par :

$$\langle T_{|x|}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \phi(x) dx$$

qui elle est infiniment différentiable et dont la dérivée première est aussi définie à l'aide de la relation 2.13. Au sens des distributions, on a :

$$\begin{aligned} \langle T'_{|x|}, \phi \rangle &\stackrel{\text{déf.}}{=} - \langle T_{|x|}, \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} |x| \phi'(x) dx \\ &= - \left( \int_{-\infty}^0 -x \phi'(x) dx + \int_0^{\infty} x \phi'(x) dx \right) \\ &= x \phi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx - x \phi(x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \phi(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx + \int_0^{\infty} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi(x) dx \\ &= \langle T_g, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

où  $T_g$  est la distribution régulière associée à la fonction localement intégrable :

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et en ce sens,  $T'_{|x|} = T_g$ . Très souvent, on note abusivement  $|x|' = g$  ce qui n'est pas rigoureusement vrai. Regardons maintenant la dérivée seconde  $T''_{|x|}$ . De l'équation 2.14 avec  $n = 2$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle T''_{|x|}, \phi \rangle &\stackrel{\text{déf.}}{=} (-1)^2 \langle T_{|x|}, \phi'' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \phi''(x) dx \\ &= \left( \int_{-\infty}^0 -x \phi''(x) dx + \int_0^{\infty} x \phi''(x) dx \right) \\ &= -x \phi'(x) \Big|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \phi'(x) dx + x \phi'(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \phi'(x) dx - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx \\ &= (\phi(0) - \phi(-\infty)) - (\phi(\infty) - \phi(0)) = 2\phi(0) \\ &= \langle 2\delta_0, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

La dérivée seconde de la distribution associée à la fonction valeur absolue est donc tout simplement deux fois la distribution de Dirac en 0. Ici encore, on note parfois abusivement  $|x|'' = 2\delta_0$ , notation qu'il convient d'éviter le plus possible. Le cas général se déduit facilement de la discussion et des exemples précédents. ♦

### Proposition 2.22: Dérivée d'une fonction avec sauts

Soit  $f(x)$  une fonction continue et dérivable sauf aux points  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  où elle possède des discontinuités de première espèce (c.-à-d. les limites à gauche et à droite de  $f(x)$  existent et sont finies). La dérivée au sens des distributions de  $f(x)$  s'écrit :

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^n s_i^f \delta_{x_i} \quad (2.15)$$

où  $s_i^f$  est le saut de la fonction  $f(x)$  en  $x = x_i$  qui est défini par :

$$s_i^f = f(x_i^+) - f(x_i^-)$$

**Remarque 2.23.** Il faut savoir interpréter correctement ce résultat. Il nous assure que la dérivée de la distribution associée à  $f(x)$  n'est autre que la distribution associée à la fonction  $f'(x)$  (partout où cette dérivée existe) plus une contribution provenant des sauts de  $f(x)$  et faisant intervenir les distributions de Dirac aux points correspondants. De toute évidence, si la fonction  $f(x)$  est continue, alors  $T'_f = T_{f'}$ .

La dérivée de la fonction de Heaviside entre dans le cadre de ce théorème. Cette fonction possède un saut de hauteur 1 en  $x = 0$  et de plus,  $T_{H'} = 0$ , ce qui signifie que  $T'_H = \delta_0$ . ◀

## 2.1.2 Distributions de plusieurs variables

Nous pouvons maintenant revenir au cas plus général en dimension  $n$ . Soit  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  un multi-indice. La dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  s'écrit :

$$\frac{\partial^{\mathbf{m}} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{m}}} = \frac{\partial^{|\mathbf{m}|} f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}$$

où  $|\mathbf{m}| = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

Suivant cette notation, on peut définir les dérivées partielles d'une distribution.

### Définition 2.24: Dérivée partielle d'une distribution

La dérivée partielle de la distribution  $T$  par rapport au multi-indice  $\mathbf{m}$  est :

$$\left\langle \frac{\partial^{\mathbf{m}} T}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{m}}}, \phi \right\rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} (-1)^{|\mathbf{m}|} \left\langle T, \frac{\partial^{\mathbf{m}} \phi}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{m}}} \right\rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.16)$$

Terminons cette section par quelques exemples dans le cas bidimensionnel.

**Exemple 2.25.** La *simple couche* est en quelque sorte la généralisation en 2 dimensions de la distribution de Dirac. Soit  $C$  une courbe du plan et  $f(\mathbf{x})$  une fonction intégrable sur  $C$ . On pose alors :

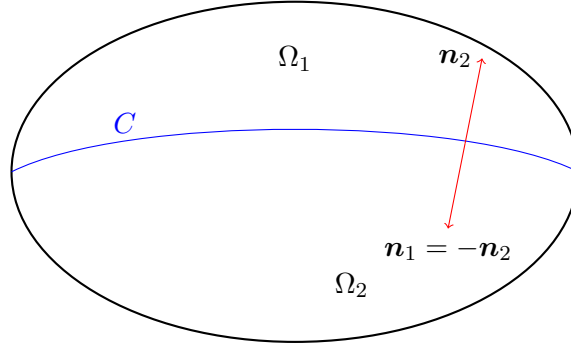
$$\left\langle \delta_C^f, \phi \right\rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_C f \phi \, ds \quad (2.17)$$

Il est facile de vérifier que  $\delta_C^f$  est une distribution. En fait, la généralisation de la distribution de Dirac correspond au cas où  $f(\mathbf{x}) = 1$ . ♦

**Exemple 2.26.** On peut sans difficulté parler de distribution vectorielle de la forme  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)$  où chaque composante  $T_i$  est une distribution. On a alors :

$$\left\langle \mathbf{T}, \phi \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \left\langle T_i, \phi_i \right\rangle \quad \forall \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$$

On peut alors généraliser certains résultats connus pour les fonctions vectorielles. ♦

Figure 2.6 – Domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  séparés par une courbe  $C$ 

**Exemple 2.27.** En plusieurs dimensions, les opérateurs essentiels de dérivation sont le gradient, la divergence et le laplacien. Dans le cas des distributions, par analogie avec la relation A.3 valide pour les fonctions suffisamment régulières, on définit la divergence d'une distribution par l'équation :

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{T}, \phi \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} - \langle \mathbf{T}, \nabla \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.18)$$

en rappelant que les fonctions  $\phi$  s'annulent sur la frontière de  $\Omega$ . ♦

**Exemple 2.28.** Soit un champ de vecteurs  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  défini sur un ouvert  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \mathcal{R}^3$  par la relation :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$

On suppose les deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de frontière  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  séparés par une surface  $C$  (ou une courbe en dimension 2 tel qu'illustré à la figure 2.6). On suppose de plus que le champ  $\mathbf{u}$  est dérivable dans le complémentaire de  $C$  (c.-à-d. partout sauf sur la courbe  $C$ ) et que sur cette surface, les champs  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$  sont discontinus et possèdent un saut de hauteur  $\mathbf{s} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ .

On peut bien sûr associer à  $\mathbf{u}$  une distribution régulière que nous noterons  $T_{\mathbf{u}}$ . On a alors en vertu de la relation 2.18 :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot T_{\mathbf{u}}, \phi \rangle &\stackrel{\text{déf.}}{=} - \langle T_{\mathbf{u}}, \nabla \phi \rangle = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \, dv \\ &= - \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \phi \, dv - \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \phi \, dv \end{aligned}$$

On peut appliquer la relation A.3 à chacune des deux dernières intégrales pour obtenir :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot T_{\mathbf{u}}, \phi \rangle &= \int_{\Omega_1} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \phi \, dv - \int_{\Gamma_1} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \phi \, ds \\ &+ \int_{\Omega_2} \nabla \cdot \mathbf{u}_2 \phi \, dv - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \phi \, ds \end{aligned}$$

Les fonctions  $\phi$  s'annulent identiquement sur la frontière de  $\Omega$  et les intégrales surfaciques ne portent en définitive que sur la surface  $C$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot T_{\mathbf{u}}, \phi \rangle &= \int_{\Omega_1} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \phi \, dv - \int_C \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \phi \, ds \\ &+ \int_{\Omega_2} \nabla \cdot \mathbf{u}_2 \phi \, dv - \int_C \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \phi \, ds \end{aligned}$$

On choisit maintenant de manière arbitraire de poser sur la surface  $C$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  et on trouve :

$$\langle \nabla \cdot T_{\mathbf{u}}, \phi \rangle = \int_{\Omega_1} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \phi \, dv + \int_{\Omega_2} \nabla \cdot \mathbf{u}_2 \phi \, dv + \int_C (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \phi \, ds$$

Il en résulte le résultat très important suivant :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot T_{\mathbf{u}}, \phi \rangle &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u}_i \phi \, dv + \langle \delta_C^{\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}}, \phi \rangle \\ &= \langle T_{\nabla \cdot \mathbf{u}} + \delta_C^{\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}}, \phi \rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

◆

L'interprétation de ce résultat est importante. Si un champ de vecteurs est discontinu le long d'une interface  $C$ , la divergence de la distribution associée à ce champ comporte deux parties : une première qui n'est rien d'autre que la distribution régulière associée à la divergence de  $\mathbf{u}$  dans chaque sous-domaine (la divergence y étant bien définie), et une autre partie qui tient compte de la discontinuité sur  $C$  par l'entremise d'une simple couche. Il est clair que ce résultat généralise l'équation 2.15.

**Remarque 2.29.** Notons que le signe du saut du champ  $\mathbf{u}$  à travers l'interface  $C$  est fixé par le choix de la normale  $\mathbf{n}$  à cette même interface et vice versa. Si on change l'orientation de la normale, on change le signe du saut mais le produit  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$  ne change pas puisque  $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_1$ .

◀

## 2.2 Espaces fonctionnels linéaires

### Définition 2.30: Espace fonctionnel linéaire

Un *espace fonctionnel linéaire* est un ensemble  $S$  de fonctions définies sur  $\Omega$  et vérifiant :

1. Si  $u \in S$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , alors  $\beta u \in S$ ;
2. Si  $u \in S$  et  $w \in S$ , alors  $(u + w) \in S$ ;

C'est donc un *espace vectoriel de fonctions*.

**Exemple 2.31.** L'ensemble des fonctions continues sur un ouvert  $\Omega$ , noté  $C^0(\Omega)$ , est un espace fonctionnel linéaire. De même, l'ensemble des fonctions  $k$  fois différentiables, noté  $C^k(\Omega)$ , est aussi un espace fonctionnel linéaire. Par contre, l'ensemble :

$$S = \{u \in C^0(\Omega) \mid u(0) = 1\}$$

n'est pas un espace fonctionnel linéaire. En effet, si  $u$  et  $w$  sont dans  $S$  alors leur somme vérifie  $(u + w)(0) = 2$  et la somme n'appartient donc pas à  $S$ . ♦

L'un des espaces fonctionnels qui nous sera le plus utile est l'espace  $L^2(\Omega)$ .

### Définition 2.32: Espace $L^2(\Omega)$

On note  $L^2(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de carré sommable c.-à-d.

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} (u(\mathbf{x}))^2 dv < \infty \right\}$$

**Remarque 2.33.** La définition précédente est beaucoup plus subtile qu'elle n'y paraît. La théorie de Lebesgue ne fait pas de distinction entre des fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble dit de *mesure nulle*. Pour fixer les idées, mentionnons simplement qu'un ensemble de mesure nulle contient très peu de points. Les ensembles finis ou dénombrables de points sont de mesure nulle. Par exemple, la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est un nombre irrationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ est un nombre rationnel} \end{cases}$$

sera identifiée à la fonction  $f(x) = 0$  car les nombres rationnels sont dénombrables et donc de mesure de Lebesgue nulle.

Par la suite, nous ne ferons pas de distinction entre 2 fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle. On écrira par exemple :

$$u_1 \stackrel{\text{p.p.}}{=} u_2$$

signifiant ainsi que les fonctions  $u_1$  et  $u_2$  sont égales presque partout (p.p.) c.-à-d. sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle. ◀

### Proposition 2.34

$L^2(\Omega)$  est un espace fonctionnel linéaire.

*Démonstration.* Pour démontrer que  $L^2(\Omega)$  est un espace fonctionnel, il nous faut établir que si  $u$  est de carré sommable, alors  $\beta u$  est de carré sommable. Mais :

$$\int_{\Omega} (\beta u(\mathbf{x}))^2 dv = \beta^2 \int_{\Omega} (u(\mathbf{x}))^2 dv < \infty$$



et la première propriété est démontrée. La deuxième propriété concernant la somme de 2 fonctions requiert un résultat préliminaire qui lui-même est très important.

**Théorème 2.35: Inégalité de Cauchy-Schwartz**

Si  $u$  et  $w$  sont des fonctions de  $L^2(\Omega)$ , alors :

$$\left| \int_{\Omega} uw \, dv \right| \leq \left( \int_{\Omega} u^2 \, dv \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} w^2 \, dv \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

*Démonstration.* Soit  $t$  un nombre réel quelconque. La fonction  $(u + tw)^2$  étant positive quel que soit  $t$ , on a :

$$0 \leq \int_{\Omega} (u + tw)^2 \, dv \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ce qui peut également s'écrire :

$$0 \leq \int_{\Omega} u^2 \, dv + 2t \int_{\Omega} uw \, dv + t^2 \int_{\Omega} w^2 \, dv \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ou encore :

$$0 \leq At^2 + Bt + C \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où :

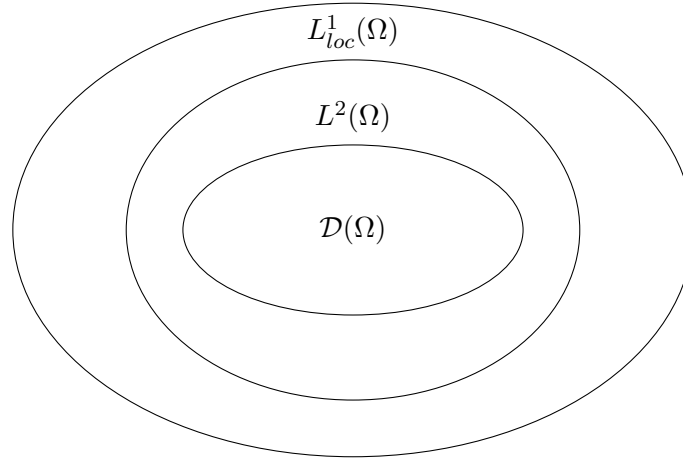
$$A = \int_{\Omega} w^2 \, dv, \quad B = 2 \int_{\Omega} uw \, dv, \quad C = \int_{\Omega} u^2 \, dv$$

Il s'agit donc d'un polynôme de degré 2 en la variable  $t$  qui est toujours positif. Cela n'est possible que si le discriminant  $B^2 - 4AC$  est négatif ou nul c.-à-d.  $B^2 - 4AC \leq 0$ . En remplaçant les valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on trouve immédiatement l'inégalité de Cauchy-Schwartz ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Nous sommes en mesure de démontrer que la somme de deux fonctions de  $L^2(\Omega)$  est également dans  $L^2(\Omega)$ . En effet :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u + w)^2 \, dv &= \int_{\Omega} u^2 \, dv + 2 \int_{\Omega} uw \, dv + \int_{\Omega} w^2 \, dv \\ &\leq \int_{\Omega} u^2 \, dv + 2 \left( \int_{\Omega} u^2 \, dv \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} w^2 \, dv \right)^{1/2} + \int_{\Omega} w^2 \, dv \\ &= \left[ \left( \int_{\Omega} u^2 \, dv \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} w^2 \, dv \right)^{1/2} \right]^2 < \infty \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration du théorème. ■

Figure 2.7 – Espace  $L^2(\Omega)$ **Corollaire 2.36**

On a l'inclusion  $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ .

*Démonstration.* Ce résultat découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. En effet, si  $f(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$  et si  $A$  est un compact inclus dans  $\Omega$ , alors :

$$\begin{aligned} \int_A |f(\mathbf{x})| dv &= \int_A |f(\mathbf{x})| 1 dv \leq \left( \int_A f^2(\mathbf{x}) dv \right)^{1/2} \left( \int_A 1^2 dv \right)^{1/2} \\ &= (\text{vol } A)^{1/2} \left( \int_A f^2(\mathbf{x}) dv \right)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

où  $\text{vol } A$  est le volume de  $A$  (ou l'aire suivant la dimension) qui est forcément fini. Les fonctions de  $L^2(\Omega)$  sont en quelque sorte encore plus régulières que celles de  $L^1_{loc}(\Omega)$  comme en témoigne la figure 2.7. ■

**Exemple 2.37.** Choisissons, pour les exemples qui suivent,  $\Omega = ]0, 1[$ . La fonction  $f(x) = x^{-1/4}$  est dans  $L^2(]0, 1[)$ , et ce même si elle n'est pas continue en  $x = 0$ . En effet :

$$\int_0^1 (x^{-1/4})^2 dx = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2 < \infty$$

Par contre, la fonction  $f(x) = x^{-1/2}$  n'appartient pas à  $L^2(]0, 1[)$  car :

$$\int_0^1 (x^{-1/2})^2 dx = \int_0^1 x^{-1} dx = \ln x|_0^1 = \infty$$

Toutefois, si on choisit un intervalle  $]a, b[$  ne comprenant pas l'origine, la fonction  $f(x) = x^{-1/2}$  sera dans  $L^2(]a, b[)$ . ♦

La notion d'espace fonctionnel linéaire n'est pas suffisante pour atteindre notre objectif de résoudre les équations aux dérivées partielles. Il nous faut introduire une métrique sur les espaces fonctionnels qui nous permettra de traiter aisément des questions de convergence des méthodes d'éléments finis. Une métrique permet de mesurer la « distance » entre 2 fonctions. Auparavant, nous définissons le produit scalaire dans un espace fonctionnel qui nous mènera à la notion de métrique et donc de norme.

### Définition 2.38: Produit scalaire

Un *produit scalaire* sur un espace fonctionnel linéaire  $S$  est une application définie sur le produit  $S \times S$  qui associe à un couple  $(u, w)$  de  $S \times S$  un scalaire noté  $((u, w))_S$  et vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $((u, w))_S = ((w, u))_S \quad \forall u, w \in S$ ;
2.  $((\beta u, w))_S = ((u, \beta w))_S = \beta((u, w))_S \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall u, w \in S$ ;
3.  $((u_1 + u_2, w))_S = ((u_1, w))_S + ((u_2, w))_S \quad \forall u_1, u_2, w \in S$ ;
4.  $((u, u))_S \geq 0$ , le produit scalaire n'étant égal à 0 que si et seulement si  $u \stackrel{\text{P.P.}}{=} 0$ ;

L'espace des fonctions de carré sommable  $L^2(\Omega)$  fournit un premier exemple de produit scalaire. On définit en effet le produit scalaire dans cet espace fonctionnel par :

$$((u, w))_{0,\Omega} = \int_{\Omega} uw \, dv \quad (2.21)$$

et on vérifie relativement facilement les 4 propriétés du produit scalaire. En fait, seule la dernière pose des difficultés puisque  $((u, u))_{0,\Omega}$  peut être nul et ce, même si  $u$  ne s'annule pas en quelques points (plus précisément sur un ensemble de mesure nulle). En pratique, comme nous l'avons déjà mentionné, on ne fait pas de distinction entre 2 fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle.

### Définition 2.39: Norme

Une *norme* sur un espace fonctionnel linéaire  $S$  est une application de  $S$  dans  $\mathbb{R}$  qui associe à une fonction  $u$  de  $S$  un scalaire noté  $\|u\|_S$  et qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. La norme d'une fonction est toujours positive :

$$\|u\|_S > 0, \quad \forall u \in S; \quad \|u\|_S = 0 \Leftrightarrow u \stackrel{\text{P.P.}}{=} 0 \quad (2.22)$$

2. Si  $\beta$  est un scalaire, alors :

$$\|\beta u\|_S = |\beta| \|u\|_S \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in S \quad (2.23)$$

où  $|\beta|$  est la valeur absolue de  $\beta$ .

3. L'inégalité triangulaire :

$$\|u + w\|_S \leq \|u\|_S + \|w\|_S \quad \forall u, w \in S \quad (2.24)$$

Toute application vérifiant ces trois propriétés est une norme. Un espace linéaire peut posséder plusieurs normes. En particulier, si un espace linéaire possède un produit scalaire, il possède automatiquement une norme dite *induite*.

#### Définition 2.40: Norme induite par le produit scalaire

La norme induite sur l'espace  $S$  par le produit scalaire  $((\cdot, \cdot))_S$  est définie par :

$$\|u\|_S = ((u, u))_S^{1/2}$$

Il est facile de vérifier que la norme induite est bel et bien une norme. Nous avons déjà introduit un produit scalaire sur  $L^2(\Omega)$  par la relation 2.21. La norme induite par ce produit scalaire est donc :

$$\|u\|_{0,\Omega} = ((u, u))_{0,\Omega}^{1/2} = \left( \int_{\Omega} u^2 \, dv \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

ce qui semble raisonnable, vu la définition de cet espace. Suivant cette notation, l'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit plus succinctement sous la forme :

$$|((u, w))_{0,\Omega}| \leq \|u\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega} \quad (2.26)$$

**Remarque 2.41.** Pour en finir avec la notion d'espace fonctionnel linéaire, il nous faudrait parler de la *complétude* d'un espace. Pour ce faire, il faut définir la notion de *suite de Cauchy* et s'assurer que toute suite de Cauchy est convergente dans  $S$ . On dit alors que l'espace  $S$  est *complet*. Encore ici, cela nous entraînerait dans des considérations non essentielles à une bonne compréhension de la suite. ◀

#### Définition 2.42: Espace de Hilbert

Un espace fonctionnel linéaire muni d'un produit scalaire (et donc d'une norme induite) et qui est complet est un *espace de Hilbert*.

#### Proposition 2.43

L'espace linéaire  $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire 2.21 est un espace de Hilbert.

Les espaces de Hilbert jouent un rôle fondamental en éléments finis ainsi que certains espaces de Sobolev que nous introduisons dans la section suivante.

## 2.3 Quelques espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles restés sans réponse jusque là. Nous nous limiterons aux espaces les plus utiles en gardant bien à l'esprit que la théorie sous-jacente est beaucoup plus vaste.

Dans ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, on suppose l'ouvert  $\Omega$  borné.

### 2.3.1 L'espace $H^1(\Omega)$

#### Définition 2.44: Espace $H^1(\Omega)$

On note  $H^1(\Omega)$  l'espace fonctionnel linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté  $((u, w))_{1, \Omega}$  :

$$((u, w))_{1, \Omega} = \int_{\Omega} \left( uw + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dv$$

et par le fait même d'une norme induite :

$$\|u\|_{1, \Omega} = ((u, u))_{1, \Omega}^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \left( u^2 + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) dv \right)^{1/2}$$

**Remarque 2.45.** Dans la définition de l'espace  $H^1(\Omega)$ , il est important de noter que l'on considère la fonction  $u$  et ses dérivées partielles comme des distributions régulières associées à des fonctions qui sont non seulement dans  $L^1_{loc}(\Omega)$  mais dans  $L^2(\Omega)$  (voir la figure 2.7). Si on dénote  $T_u$  la distribution associée à  $u$ , alors on a :

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u \phi \, dv \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et le terme de droite de cette expression est parfaitement défini puisque  $u \in L^2(\Omega)$ . De plus, si  $u \in H^1(\Omega)$ , il existe des fonctions  $f_i \in L^2(\Omega)$  telles que :

$$\left\langle \frac{\partial T_u}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = - \left\langle T_u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dv = \int_{\Omega} f_i \phi \, dv \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En effet, si de telles fonctions  $f_i$  existent, alors de la relation 2.16, on a  $\frac{\partial T_u}{\partial x_i} = f_i$  au sens des distributions, ce que l'on note abusivement  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$ . ◀

**Remarque 2.46.** Si une fonction  $u$  est dans  $H^1(\Omega)$ , alors  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  sont automatiquement dans  $L^2(\Omega)$  de sorte que  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  et que :

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2$$

On a ainsi les inégalités :

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \text{ et } \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \quad (2.27)$$

◀

Le produit scalaire  $((u, w))_{1,\Omega}$  semble naturel car en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz 2.26, toutes les intégrales impliquées sont finies et la linéarité de l'intégration permet de vérifier aisément les propriétés d'un produit scalaire.

**Remarque 2.47.** Le produit scalaire et la norme de  $L^2(\Omega)$  ont été notés  $((u, w))_{0,\Omega}$  et  $\|u\|_{0,\Omega}$  par analogie avec l'espace  $H^1(\Omega)$ , puisque l'on peut dire dans ce cas que la fonction et ses dérivées « d'ordre 0 » sont dans  $L^2(\Omega)$ . ◀

Lors de la résolution des équations aux dérivées partielles, il nous faudra introduire des conditions aux limites, ce qui nous amène à parler de la restriction à la frontière  $\Gamma$  d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ . Bien que cela semble tout-à-fait naturel de le faire, il faut s'assurer que cette restriction au bord ait un sens du point de vue mathématique. Heureusement, bien que nous ne le justifierons pas de manière tout-à-fait rigoureuse, ces valeurs au bord sont bien définies. Pour s'en convaincre en dimension 1, on peut faire le raisonnement suivant. On suppose que  $\Omega = ]a, b[$  et que  $w \in H^1(]a, b[)$ . On peut donner un sens à la valeur à la frontière  $w(b)$  (et par un argument similaire à  $w(a)$ ) en considérant le fait que l'on a :

$$\left( w(x) \frac{(x-a)}{(b-a)} \right)' = w'(x) \frac{(x-a)}{(b-a)} + w(x) \frac{1}{(b-a)}$$

dont on déduit, en intégrant sur  $]a, b[$  que :

$$w(b) = \int_a^b w'(x) \frac{(x-a)}{(b-a)} dx + \int_a^b w(x) \frac{1}{(b-a)} dx$$

Chacun des termes de droite de cette équation est bien défini en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz car  $w(x)$  et  $w'(x)$  sont dans  $L^2(]a, b[)$ . Il en ressort de plus, toujours en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz que :

$$|w(b)| \leq \|w'(x)\|_{0,\Omega} \left\| \frac{(x-a)}{(b-a)} \right\|_{0,\Omega} + \|w(x)\|_{0,\Omega} \left\| \frac{1}{(b-a)} \right\|_{0,\Omega} \leq C \|w\|_{1,\Omega} \quad (2.28)$$

Dans cette inégalité, la constante  $C$  ne dépend que de la géométrie c.-à-d. de  $a$  et  $b$ .

**Remarque 2.48.** Le raisonnement précédent n'est plus valide si la fonction  $w$  n'est que dans  $L^2(\Omega)$ . On ne peut donc pas parler de la valeur au bord (sur la frontière de  $\Omega$ ) d'une fonction de  $L^2(\Omega)$  autrement que dans un sens très faible. ◀

**Définition 2.49: Trace au bord**

La restriction au bord  $\Gamma$  d'une fonction de  $w \in H^1(\Omega)$  est appelée *trace au bord* de  $w$  et est notée  $w|_{\Gamma}$  ou encore  $\gamma_0(w)$ .

**Théorème 2.50: Trace au bord**

L'ensemble des traces au bord des fonctions de  $H^1(\Omega)$  forme un sous-espace de  $L^2(\Gamma)$  noté  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Plus succinctement, on a :

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma) \quad (2.29)$$

*Démonstration.* Voir Reddy [51] ou Raviart-Thomas [50]. ■

**Remarque 2.51.** De cette définition, on conclut immédiatement que si  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , alors il existe forcément au moins une fonction  $w_g \in H^1(\Omega)$  dont  $g$  est la trace au bord c.-à-d. :

$$\gamma_0(w_g) = w_g|_{\Gamma} = g \quad (2.30)$$

Cette remarque sera essentielle lors de l'imposition des conditions aux limites dans les équations aux dérivées partielles d'ordre 2. Dans le cadre d'une méthode d'éléments finis, pour une condition aux limites  $g$  donnée, nous construirons explicitement la fonction  $w_g$  de  $H^1(\Omega)$ . La fonction  $w_g$  sera appelée le relèvement de la condition aux limites  $g$ . ◀

Le raisonnement qui nous a mené à l'inégalité 2.28 peut être généralisé à la frontière d'un domaine quelconque en plusieurs dimensions.

**Théorème 2.52: Continuité de la trace au bord**

Si  $w \in H^1(\Omega)$ , il existe une constante  $C$  telle que :

$$\|\gamma_0(w)\|_{0,\Gamma} = \left( \int_{\Gamma} (\gamma_0(w))^2 ds \right)^{1/2} \leq C \|w\|_{1,\Omega} \quad (2.31)$$

Le résultat est également vrai si on remplace  $\Gamma$  par une partie non nulle  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$ . En dimension 1, on remplace la norme  $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$  par la valeur absolue comme dans l'équation 2.28.

Ce dernier résultat est connu sous le nom de *continuité de la trace au bord* et généralise l'équation 2.28. Il signifie simplement que la trace au bord d'une fonction  $w$  de  $H^1(\Omega)$  dépend continûment de la fonction  $w$ . Une autre manière de voir les choses consiste à dire que si  $w$  tend vers 0, alors sa trace au bord tend également vers 0.

**Définition 2.53: Espace  $H_0^1(\Omega)$** 

On définit l'espace  $H_0^1(\Omega)$  comme la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ . Ainsi, pour chaque  $v \in H_0^1(\Omega)$ , il existe une suite  $v_i$  de fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  et telle que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|v - v_i\|_{1,\Omega} = 0$$

Les fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  s'annulent donc au bord et on peut écrire :

$$H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

On peut aussi définir :

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

où  $\Gamma_0$  est une partie de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ . En dimension 1, on a par exemple :

$$H^1(]a, b[) = \{w(x) \in L^2(]a, b[) \mid w'(x) \in L^2(]a, b[)\}$$

et

$$H_0^1(]a, b[) = \{w \in H^1(]a, b[) \mid w(a) = w(b) = 0\}$$

tandis que l'on pourrait poser :

$$H_{\Gamma_0}^1(]a, b[) = \{w \in H^1(]a, b[) \mid w(a) = 0\}$$

ou encore :

$$H_{\Gamma_0}^1(]a, b[) = \{w \in H^1(]a, b[) \mid w(b) = 0\}$$

**Exemple 2.54.** Choisissons encore  $\Omega = ]0, 1[$ . La fonction  $f(x) = x^{3/4}$  est dans  $H^1(]0, 1[)$ . En effet :

$$\int_0^1 (x^{3/4})^2 dx = \int_0^1 (x^{3/2}) dx = \frac{2}{5} < \infty$$

De plus,  $f'(x) = (3/4)x^{-1/4}$  et on a :

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{9}{16} \int_0^1 x^{-1/2} dx = \frac{9}{8} < \infty$$

Il convient toutefois de remarquer que la fonction  $f'(x)$  n'est pas définie en  $x = 0$ . ♦

**Exemple 2.55.** Choisissons cette fois  $\Omega = ]-1, 1[$  et la fonction de Heaviside (voir la figure 2.4) restreinte à cet intervalle. Il est facile de montrer que  $H(x) \in L^2(]-1, 1[)$ . Par contre, nous avons vu qu'au sens des distributions,  $T'_H = \delta_0$  et que la distribution de Dirac n'est pas régulière. On ne peut donc pas associer à cette distribution une fonction de  $L^1_{loc}(]-1, 1[)$  et encore moins  $L^2(]-1, 1[)$ . La fonction de Heaviside n'est donc pas dans  $H^1(]-1, 1[)$ . Il en est de même, en une dimension, de toutes les fonctions qui possèdent une discontinuité de première espèce dans  $\Omega$ . ♦



**Proposition 2.56**

L'expression :

$$|u|_{1,\Omega} = \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dv \right)^{1/2} \quad (2.32)$$

est une norme sur les espaces  $H_0^1(\Omega)$  et  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ .

*Démonstration.* (Esquisse)

Il faut tout d'abord remarquer la différence entre cette norme (notation avec une seule barre) et la norme habituelle sur  $H^1(\Omega)$  (notation avec 2 barres). C'est l'absence du terme en  $u^2$ . Il nous faut donc démontrer les 3 propriétés d'une norme. La seule propriété qui pose des difficultés est la première qui requiert qu'une norme ne s'annule que pour la fonction  $u \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$ . Il est en effet évident que la quantité 2.32 est toujours positive ou nulle. De plus, si  $|u|_{1,\Omega} = 0$ , on peut immédiatement conclure que toutes les dérivées partielles de  $u$  sont nulles (p.p.) et donc que  $u$  est une constante. La conclusion vient du fait que puisque  $u$  est nulle au bord (ou sur une partie  $\Gamma_0$  du bord), cette constante est forcément 0. ■

**Remarque 2.57.** Il est extrêmement important de noter que la quantité 2.32 n'est pas une norme sur  $H^1(\Omega)$ . Le raisonnement précédent ne peut en effet s'appliquer puisque les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ne s'annulent pas toutes au bord. ◀

**Définition 2.58: Normes équivalentes**

Deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sur un espace de Hilbert  $V$  sont dites *équivalentes* s'il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

$$C_1 \|w\|_2 \leq \|w\|_1 \leq C_2 \|w\|_2 \quad \forall w \in V \quad (2.33)$$

**Proposition 2.59**

Les normes  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  et  $|\cdot|_{1,\Omega}$  sont des normes équivalentes sur les espaces  $H_0^1(\Omega)$  et  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  (mais pas sur  $H^1(\Omega)$ ).

*Démonstration.* Voir Raviart-Thomas [50]. ■

**Théorème 2.60: Inégalité de Poincaré**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathcal{R}^n$  borné dans au moins une direction. Il existe alors une constante  $C$

qui ne dépend que de  $\Omega$  et telle que :

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) |v|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.34)$$

*Démonstration.* Nous reprenons ici la démonstration de Lucquin [43]. Par définition de  $H_0^1(\Omega)$ , il suffit de démontrer le résultat pour  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  et comme ces dernières fonctions s'annulent au voisinage de la frontière de  $\Omega$ , on peut les prolonger par 0 dans tout  $\mathcal{R}^n$ . On supposera pour fixer les idées que  $\Omega$  est borné dans la direction  $x_1$  et donc que la composante  $x_1$  du support des fonctions  $v$  est inclus dans un intervalle  $]a, b[$ . On a alors :

$$v(x_1, \mathbf{x}') = \int_a^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(u, \mathbf{x}') du$$

car  $v(a, \mathbf{x}') = 0$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors :

$$|v(x_1, \mathbf{x}')|^2 \leq (x_1 - a) \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(u, \mathbf{x}') \right|^2 du \leq (b - a) \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(u, \mathbf{x}') \right|^2 du$$

Il reste à intégrer sur les autres variables d'espace, soit sur  $\mathbf{x}'$ . On a ainsi, en vertu de la dernière inégalité :

$$\int_{\mathcal{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(u, \mathbf{x}') \right|^2 d\mathbf{x}' \leq (b - a) \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{0,\mathcal{R}^n}^2$$

Une dernière intégration par rapport à  $x_1$  donne :

$$\|v\|_{0,\mathcal{R}^n} \leq (b - a)^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{0,\mathcal{R}^n} \leq (b - a)^2 |v|_{1,\mathcal{R}^n}$$

et le résultat suit car  $\|v\|_{0,\mathcal{R}^n} = \|v\|_{0,\Omega}$  et  $\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{0,\mathcal{R}^n} = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega}$  par prolongement par 0.

Les normes  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  et  $|\cdot|_{1,\Omega}$  sont donc des normes équivalentes sur les espaces  $H_0^1(\Omega)$  et un résultat similaire existe pour  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  (voir [43]). Le résultat est en général faux pour  $H^1(\Omega)$ . ■

### 2.3.2 L'espace $H^2(\Omega)$

**Définition 2.61: Espace  $H^2(\Omega)$**

On note  $H^2(\Omega)$  l'espace défini par :

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad 1 \leq i, j \leq 3 \right. \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté  $((u, w))_{2,\Omega}$  :

$$((u, w))_{2,\Omega} = \int_{\Omega} \left( uw + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) dv$$

et de la norme induite :

$$\|u\|_{2,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \left( u^2 + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right) dv \right)^{1/2}$$

Les dérivées sont ici encore prises au sens des distributions. On a aussi :

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 = \|u\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2$$

Puisque l'on requiert que les dérivées d'ordre 2 soit dans  $L^2(\Omega)$ , les fonctions de  $H^2(\Omega)$  sont plus régulières que celles de  $H^1(\Omega)$ . Il en est de même pour la trace au bord.

### Définition 2.62: Trace normale

Si  $w \in H^2(\Omega)$ , alors la fonction  $\partial w / \partial \mathbf{n}$  définie sur la frontière  $\Gamma$  est appelée la *trace normale* de  $w$  au bord que l'on note  $\gamma_1(w)$ . Rappelons que :

$$\gamma_1(w) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \nabla w \cdot \mathbf{n}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire à  $\Gamma$ .

### Proposition 2.63

L'ensemble des traces au bord des fonctions de  $H^2(\Omega)$  forme un sous-espace de  $L^2(\Gamma)$  noté  $H^{3/2}(\Gamma)$ . Plus succinctement, on a :

$$\gamma_0(H^2(\Omega)) = H^{3/2}(\Gamma) \subsetneq H^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma) \quad (2.35)$$

De plus, l'ensemble des traces normales au bord des fonctions de  $H^2(\Omega)$  forme un sous-espace

de  $L^2(\Gamma)$  qui n'est autre que  $H^{1/2}(\Gamma)$ . On a :

$$\gamma_1(H^2(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma)$$

*Démonstration.* Voir Raviart-Thomas [50]. ■

### Théorème 2.64: (de relèvement)

Si  $g \in H^{3/2}(\Gamma)$  et  $h \in H^{1/2}(\Gamma)$ , alors il existe au moins une fonction  $w_{gh} \in H^2(\Omega)$  (dite de relèvement des conditions aux limites) dont  $g$  est la trace au bord c.-à-d.  $\gamma_0(w_{gh}) = w_{gh}|_{\Gamma} = g$  et dont  $h$  est la trace normale au bord c.-à-d.  $\gamma_1(w_{gh}) = \frac{\partial w_{gh}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = h$ . De plus, on a la continuité de la trace au bord c.-à-d. :

$$\|\gamma_0(w)\|_{0,\Gamma} + \|\gamma_1(w)\|_{0,\Gamma} = \|g\|_{0,\Gamma} + \|h\|_{0,\Gamma} \leq C \|w\|_{2,\Omega} \quad (2.36)$$

En dimension 1, on remplace tout simplement la norme  $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$  par la valeur absolue.

*Démonstration.* Voir Raviart-Thomas [50]. ■

**Remarque 2.65.** Ce résultat sera essentiel lors de l'imposition des conditions aux limites dans les équations aux dérivées partielles d'ordre 4. Nous supposons de plus que le résultat est vrai lorsque les conditions aux limites sur  $w$  et  $\partial w/\partial \mathbf{n}$  ne sont données que sur des parties de la frontière  $\Gamma$ . ◀

### Définition 2.66: Espace $H_0^2(\Omega)$

L'espace  $H_0^2(\Omega)$  est défini par :

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

Il est de toute évidence possible de construire des variantes des espaces précédents. Il s'agit de sous-espaces de  $H^2(\Omega)$  pour lesquels la fonction  $w$  et sa trace normale s'annulent seulement sur certaines parties de la frontière. Par exemple, on pourrait prendre :

$$\left\{ w \in H^2(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$$

où  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  sont des parties de la frontière  $\Gamma$  disjointes ou non et qui ne recouvrent pas forcément toute la frontière  $\Gamma$ .

**Proposition 2.67**

L'expression :

$$|u|_{2,\Omega} = \left( \int_{\Omega} (\nabla^2 u)^2 dv \right)^{1/2} \quad (2.37)$$

est une norme sur l'espace  $H_0^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* Voir Ciarlet [15]. ■

**Remarque 2.68.** Il est important de remarquer que tout comme la norme 2.32 n'est pas une norme sur  $H^1(\Omega)$ , la quantité 2.37 n'est pas une norme sur  $H^2(\Omega)$ . Le résultat précédent peut également s'étendre au cas où la fonction et sa trace normale ne s'annulent que sur des parties  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  respectivement. Cette généralisation est cependant assez délicate. ◀

La situation est plus simple en dimension 1 et on a par exemple :

$$H^2(]a, b[) = \left\{ w(x) \in L^2(]a, b[) \mid w'(x) \in L^2(]a, b[), w''(x) \in L^2(]a, b[) \right\}$$

ainsi que :

$$H_0^2(]a, b[) = \left\{ w(x) \in H^2(]a, b[) \mid w(a) = w(b) = w'(a) = w'(b) = 0 \right\}$$

La norme 2.37 se réduit dans ce cas à :

$$|u|_{2,]a,b[} = \left( \int_a^b (u''(x))^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.38)$$

**Proposition 2.69**

La quantité 2.38 est une norme équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{2,\Omega}$  sur l'espace  $H_0^2(]a, b[)$  ainsi que sur les espaces suivants :

- $V_1 = \{w \in H^2(]a, b[) \mid w(a) = w(b) = 0\}$
- $V_2 = \{w \in H^2(]a, b[) \mid w(a) = w'(b) = 0\}$
- $V_3 = \{w \in H^2(]a, b[) \mid w'(a) = w(b) = 0\}$
- $V_4 = \{w \in H^2(]a, b[) \mid w(a) = w'(a) = 0\}$
- $V_5 = \{w \in H^2(]a, b[) \mid w(b) = w'(b) = 0\}$

mais pas sur l'espace :

$$X = \left\{ w(x) \in H^2(]a, b[) \mid w'(a) = w'(b) = 0 \right\}$$

*Démonstration.* (Esquisse)

Les deux premières propriétés d'une norme ne posent aucune difficulté particulière. Par contre, si  $|u|_{2,]a,b[} = 0$ , on en déduit que  $u''(x) = 0$  (presque partout!) et donc que  $u(x) = cx + d$ . Les conditions aux limites permettent alors de montrer que  $u(x) = 0$  lorsque  $u(x) \in V_1, V_2, V_3, V_4$  ou  $V_5$ . Par contre, si  $u(x) \in X$ , on ne peut que conclure que  $u(x) = d$ . ■

**Remarque 2.70.** On peut de manière générale définir les espaces  $H^m(\Omega)$  en ajoutant les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $m$ . ◀

## 2.4 Un résultat d'approximation

La méthode des éléments finis utilise des sous-domaines (les éléments) de forme géométrique simple (des intervalles en dimension 1, des triangles ou des quadrilatères en dimension 2, des tétraèdres en dimension 3) sur lesquels on construit des approximations polynômiales. En d'autres termes, la solution approximative de l'équation différentielle de départ est constituée de polynômes différents sur chaque sous-domaine. Il est tout de même important de s'assurer que l'approximation ainsi obtenue soit dans un espace de Sobolev approprié. C'est l'objet du résultat suivant.

### Proposition 2.71

Soit un domaine  $\Omega$  constitué de sous-domaines  $\Omega_i$  et une fonction  $u(x)$  telle que sa restriction à chaque sous-domaine  $\Omega_i$  est un polynôme de degré  $n$ . On suppose de plus que les polynômes de degré  $n$  sont dans  $H^1(\Omega_i)$  quel que soit  $i$ . Alors si la fonction  $u(x)$  est continue à la frontière entre les sous-domaines  $\Omega_i$ , la fonction  $u(x)$  appartient à l'espace  $H^1(\Omega)$ . Si de plus, la fonction  $u(x)$  est différentiable au sens classique c.-à-d. ses dérivées partielles d'ordre 1 sont continues à la frontière des sous-domaines, alors  $u(x) \in H^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* Voir Ciarlet [15].

Ce résultat est évident en dimension 1. En effet, si la fonction  $u(x)$  possède une discontinuité de première espèce à la frontière de 2 sous-intervalles, alors sa dérivée fait intervenir une distribution de Dirac qui n'est pas dans  $L^2(\Omega)$ .

Dans le cas général, il est clair que la fonction  $u$  est dans  $L^2(\Omega)$  puisqu'il suffit de sommer sur les sous-domaines. Ce qui est moins évident c'est de vérifier que les dérivées partielles de  $u$  sont dans  $L^2(\Omega)$  au sens des distributions. Pour le montrer, il nous faut trouver des fonctions  $f_j$  de  $L^2(\Omega)$  telles que :

$$\int_{\Omega} f_j \phi \, dv = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, dv \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Si de telles fonctions existent, en vertu de la définition 2.16, on a  $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f_j$  au sens des distributions et les dérivées partielles sont donc dans  $L^2(\Omega)$ . Il semble naturel de considérer comme fonctions  $f_j$  celles constituées des dérivées partielles de la fonction  $u$  restreintes à chaque sous-domaine  $\Omega_i$  c.-à-d.

$$f_j|_{\Omega_i} = \left. \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|_{\Omega_i}$$

qui sont bien définies sur chaque sous-domaine puisque les polynômes de degré  $n$  sont dans  $H^1(\Omega_i)$ . On a alors en intégrant par parties (voir la relation A.4) :

$$\int_{\Omega_i} f_j|_{\Omega_i} \phi \, dv = \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_{\Omega_i} \phi \, dv = - \int_{\Omega_i} u|_{\Omega_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, dv + \int_{\partial\Omega_i} u|_{\Omega_i} \phi n_{ij} \, ds$$

où  $n_{ij}$  est la  $j^e$  composante du vecteur normal  $\mathbf{n}_i$  à la frontière de  $\Omega_i$  (voir la relation A.4). En additionnant les contributions de chaque sous-domaine, on trouve :

$$\int_{\Omega} f_j \phi \, dv = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, dv + \sum_i \int_{\partial\Omega_i} u|_{\Omega_i} \phi n_{ij} \, ds$$

Le dernier terme de droite est une somme sur les frontières des sous-domaines. D'une part, si  $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ , ce terme est nul puisque les fonctions  $\phi$  y sont nulles. À la frontière commune entre 2 sous-domaines,  $\partial\Omega_i$  et  $\partial\Omega_k$ , on a :

$$\int_{\partial\Omega_i} u|_{\Omega_i} \phi n_{ij} \, ds + \int_{\partial\Omega_k} u|_{\Omega_k} \phi n_{kj} \, ds$$

Ces termes s'annulent deux à deux en vertu de la continuité de la fonction  $u$  et du changement de signe du vecteur normal ( $n_{ij} = -n_{kj}$ ). Les dérivées partielles sont donc dans  $L^2(\Omega)$  et le théorème est démontré. On peut effectuer un raisonnement similaire pour démontrer que la fonction  $u$  est dans  $H^2(\Omega)$  si  $u$  est non seulement continue mais différentiable à la frontière des sous-domaines. ■

**Remarque 2.72.** Ce résultat est fondamental car il sera à la base des techniques d'approximation par éléments finis où les sous-domaines  $\Omega_i$  seront tout simplement les éléments. ◀

## 2.5 Exercices

1. Calculer les dérivées premières et secondes au sens des distributions des fonctions suivantes :

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Les fonctions de l'exercice précédent sont-elles dans  $L^2(]-1, 1[)$  ? dans  $H^1(]-1, 1[)$  ? dans  $H^2(]-1, 1[)$  ?
3. Calculer, au sens des distributions,  $\nabla \cdot (k\nabla u)$  dans le carré  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  où :

$$u(x, y) = \begin{cases} 2(y-x) & \text{si } x < y \\ x^2 - y^2 & \text{si } x > y \end{cases} \quad \text{et } k = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x < y \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x > y \end{cases}$$

**Suggestion** : Calculer d'abord  $\nabla u$  et bien regarder ce qui se passe sur l'axe  $y = x$ .

4. Si  $\Omega = ]-\infty, \infty[$ , la fonction  $f(x) = 1$  est-elle dans l'espace des fonctions localement intégrables  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Même question pour la fonction  $f(x) = 1/x$  dans  $\Omega = ]0, 1[$ .
5. La fonction  $f(x) = |x|$  est-elle dans  $H^1(]-1, 1[)$  ? dans  $H^2(]-1, 1[)$  ?
6. La fonction  $f(x) = x(1-x)$  est-elle dans  $H^2_0(]0, 1[)$  ? Même question pour la fonction  $f(x) = x^2(1-x)^2$  ?
7. Pour quelles valeurs réelles de  $r$ , la fonction  $x^r$  est-elle dans  $L^2(]0, 1[)$  ? dans  $H^1(]0, 1[)$  ? dans  $H^2(]0, 1[)$  ?



## Chapitre 3

# Théorème de Lax-Milgram

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la résolution d'une équation aux dérivées partielles se ramène à celle d'un problème variationnel. Nous abordons dans ce chapitre les outils de base pour l'étude des formulations variationnelles.

### 3.1 Formes linéaires et bilinéaires

#### Définition 3.1: Forme linéaire continue

On appelle *forme linéaire* une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert  $V$ . Une forme linéaire  $l$  vérifie donc les propriétés suivantes :

- $l(\beta w) = \beta l(w) \quad \forall w \in V \text{ et } \forall \beta \in \mathbb{R}$
- $l(w_1 + w_2) = l(w_1) + l(w_2) \quad \forall w_1, w_2 \in V$

Si de plus, il existe une constante  $C$  telle que :

$$|l(w)| \leq C \|w\|_V \quad \forall w \in V \quad (3.1)$$

on dira qu'elle est non seulement linéaire mais aussi continue sur  $V$ .

**Exemple 3.2.** Si  $V = L^2(\Omega)$  et  $f(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$  alors :

$$l_f(w) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) \, dv$$

est une forme linéaire sur  $V$  comme nous l'avons démontré au chapitre précédent. Cette fonctionnelle est également continue. En effet, de l'inégalité de Cauchy, on a :

$$|l_f(w)| = \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) \, dv \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega}$$

et l'inégalité 3.1 suit en posant  $C = \|f\|_{0,\Omega}$ . ♦

**Définition 3.3: Espace dual**

L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert  $V$  est appelé *espace dual* de  $V$  et est noté  $V'$ .

**Remarque 3.4.** Nous avons déjà rencontré la notion de dualité lorsque nous avons défini l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$  qui n'est cependant pas un espace de Hilbert. Les duaux des espaces  $H_0^1(\Omega)$  et  $H_0^2(\Omega)$  sont notés respectivement  $H^{-1}(\Omega)$  et  $H^{-2}(\Omega)$ . Notez bien que  $H^{-1}(\Omega)$  est le dual de  $H_0^1(\Omega)$  et non de  $H^1(\Omega)$ . ◀

**Définition 3.5: Forme bilinéaire**

Une *forme bilinéaire* sur un espace de Hilbert  $V$  est une application  $a$  qui associe à un couple  $(u, w) \in V \times V$  un scalaire noté  $a(u, w)$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} - a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, w) &= \beta_1 a(u_1, w) + \beta_2 a(u_2, w) \quad \forall u_1, u_2, w \in V \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \\ - a(u, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) &= \beta_1 a(u, w_1) + \beta_2 a(u, w_2) \quad \forall u, w_1, w_2 \in V \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses 2 arguments.

**Définition 3.6: Forme bilinéaire continue**

Une forme bilinéaire  $a$  est dite *continue* sur  $V \times V$  s'il existe une constante  $C$  telle que :

$$|a(u, w)| \leq C \|u\|_V \|w\|_V \quad \forall u, w \in V \quad (3.2)$$

**Définition 3.7: Forme bilinéaire symétrique**

Une forme bilinéaire  $a$  est dite *symétrique* si :

$$a(u, w) = a(w, u) \quad \forall u, w \in V$$

**Exemple 3.8.** L'application  $a$  définie par :

$$a(u, w) = \int_{\Omega} uw \, dv$$

est une forme bilinéaire symétrique et continue sur  $L^2(\Omega)$ . La bilinéarité est en effet triviale à démontrer. De plus, la continuité vient encore une fois de l'inégalité de Cauchy :

$$\left| \int_{\Omega} uw \, dv \right| \leq \|u\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega}$$

et il ne reste qu'à choisir la constante  $C$  égale à 1 dans l'inégalité 3.2. ♦

**Exemple 3.9.** L'application  $a$  définie par :

$$a(u, w) = \int_{\Omega} (uw + \nabla u \cdot \nabla w) \, dv = \int_{\Omega} \left( uw + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \, dv$$

est une forme bilinéaire continue sur  $H^1(\Omega)$ . La bilinéarité est encore ici facile à vérifier et la continuité découle de l'inégalité de Cauchy :

$$\left| \int_{\Omega} uw + \nabla u \cdot \nabla w \, dv \right| \leq \|u\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \leq 4 \|u\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}$$

Dans la dernière inégalité, nous avons fait usage des inégalités 2.27. Il ne reste qu'à choisir la constante  $C$  égale à 4 dans l'inégalité 3.2. ♦

### Définition 3.10: Forme bilinéaire coercive

Une forme bilinéaire est dite *coercive* ou *elliptique* s'il existe une constante strictement positive  $\alpha$  telle que :

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2 \quad \forall w \in V \quad (3.3)$$

Une forme bilinéaire coercive est une généralisation de la notion de *matrice définie positive* que nous reverrons un peu plus loin.

Nous en arrivons au résultat le plus fondamental de cette section.

### Théorème 3.11: de Lax-Milgram

Soit  $V$  un espace de Hilbert et soit  $l$  et  $a$  des formes linéaire et bilinéaire continues sur  $V$  et  $V \times V$  respectivement ( $l \in V'$ ). Si de plus  $a$  est coercive, alors il existe une unique solution  $u$  du problème variationnel : ♠ trouver une fonction  $u \in V$  telle que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V \quad (3.4)$$

*Démonstration.* (facultative) :

Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où la forme bilinéaire est symétrique. La forme bilinéaire étant coercive, elle satisfait les propriétés d'un produit scalaire sur  $V$  et la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à  $\|\cdot\|_V$ . L'espace  $V$  muni de ce produit scalaire est donc un espace de Hilbert. Du théorème de représentation de Riesz, il existe  $u \in V$  (qui dépend de  $l$ ) tel que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V$$

On a donc l'existence. En ce qui concerne l'unicité, s'il existait deux solutions  $u_1$  et  $u_2$ , alors en soustrayant, on aurait :

$$a(u_1 - u_2, w) = l(w) - l(w) = 0 \quad \forall w \in V$$

et en particulier, en prenant  $w = u_1 - u_2$ , la coercivité entraîne que  $u_1 = u_2$ , ce qui complète la démonstration. On trouvera la généralisation de ce résultat dans Ciarlet [15]. Beaucoup de formulations variationnelles entrent dans le cadre de ce théorème. ■

### Proposition 3.12

Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème de Lax-Milgram et si de plus la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, le problème variationnel 3.4 est équivalent au problème de minimisation suivant :

♠ trouver  $u \in V$  telle que :

$$J(u) = \inf_{w \in V} J(w) = \inf_{w \in V} \frac{1}{2}a(w, w) - l(w) \quad (3.5)$$

La fonctionnelle  $J$  est souvent appelée *fonctionnelle d'énergie* dans les applications.

*Démonstration.* En premier lieu, on démontre que si  $u$  est l'unique solution du problème variationnel 3.4 alors  $u$  minimise forcément la fonctionnelle  $J$  sur tout l'espace  $V$ . Soit donc  $w \in V$  quelconque. On peut toujours écrire que :

$$w = u + (w - u) = u + w_1 \quad (w_1 = w - u)$$

On a alors :

$$J(w) = J(u + w_1) = \frac{1}{2}a(u + w_1, u + w_1) - l(u + w_1)$$

Puisque  $a$  est bilinéaire et  $l$  linéaire, on a :

$$J(w) = \frac{1}{2}[a(u, u) + a(u, w_1) + a(w_1, u) + a(w_1, w_1)] - l(u) - l(w_1)$$

et la symétrie de  $a$  nous donne :

$$J(w) = \left( \frac{1}{2}a(u, u) - l(u) \right) + (a(u, w_1) - l(w_1)) + \frac{1}{2}a(w_1, w_1)$$

Dans le terme de droite, on reconnaît dans la première parenthèse  $J(u)$  tandis que l'expression à l'intérieur de la deuxième parenthèse est nulle puisque  $u$  est la solution du problème 3.4. Enfin, la coercivité de  $a$  nous assure que le dernier terme est toujours positif. On a donc :

$$J(w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w_1, w_1) \geq J(u)$$

et donc  $J(u)$  est certainement inférieure ou égale à  $J(w)$ . Puisque ce raisonnement est valide quel que soit  $w \in V$ ,  $u$  minimise bien la fonctionnelle  $J$  sur l'espace  $V$ .

Inversement, si  $u$  minimise  $J$ , on démontre que  $u$  est aussi une solution du problème variationnel 3.4. Considérons pour ce faire la fonction de la variable réelle  $\epsilon$  définie par :

$$g(\epsilon) = J(u + \epsilon w) = \frac{1}{2}a(u + \epsilon w, u + \epsilon w) - l(u + \epsilon w)$$

Puisque  $u$  minimise  $J$ , la fonction  $g$  possède un minimum local en  $\epsilon = 0$ , et ce quel que soit  $w$ . On doit donc avoir  $g'(0) = 0$ , quel que soit  $w$ . Mais en développant, on trouve :

$$g(\epsilon) = J(u) + \epsilon(a(u, w) - l(w)) + \frac{\epsilon^2}{2}a(w, w)$$

et donc :

$$g'(\epsilon) = a(u, w) - l(w) + \epsilon a(w, w) \quad \text{et} \quad g'(0) = a(u, w) - l(w)$$

La condition  $g'(0) = 0$  quel que soit  $w$  est donc équivalente à l'équation 3.4. ■

## 3.2 Applications

Nous commençons à aborder dans cette section les applications du théorème de Lax-Milgram à la résolution d'équations aux dérivées partielles. Pour simplifier l'exposé, nous abordons séparément les équations aux dérivées partielles d'ordre 2 et celles d'ordre 4. Nous verrons en effet que les espaces de Sobolev impliqués sont respectivement les espaces  $H^1(\Omega)$  et  $H^2(\Omega)$  et certains de leurs sous-espaces.

### 3.2.1 Problèmes d'ordre 2

Bon nombre d'applications importantes résultent en des équations aux dérivées partielles d'ordre 2. Nous allons établir dans cette section que le cadre fonctionnel approprié est l'espace  $H^1(\Omega)$  et ses variantes comme  $H_0^1(\Omega)$ . L'imposition des conditions aux limites dictera le choix précis de l'espace  $V$ .

**Exemple 3.13.** Nous avons maintenant tous les moyens nécessaires pour revenir sur le problème présenté au chapitre 1. Rappelons que l'équation différentielle est :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

et que nous avons obtenu la formulation variationnelle :

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx \quad \forall w(x) \mid w(0) = w(1) = 0 \quad (3.7)$$

En regardant de plus près la formulation variationnelle, on constate que seule la dérivée d'ordre 1 de  $u$  (et de la fonction test  $w$ ) est présente. On en conclut que l'espace  $H^1(]0, 1[)$  a toutes les chances de répondre à nos besoins c.-à-d. de nous permettre de vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. De plus, les conditions aux limites sur  $u$  nous forcent à choisir  $H_0^1(]0, 1[)$ . Le terme

de droite sera défini si, par exemple, la fonction  $f(x)$  est dans  $L^2(]0, 1[)$  ou plus généralement si  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . On reformule donc le problème sous la forme :

♠ pour  $f(x)$  dans  $L^2(\Omega)$ , trouver  $u$  dans  $H_0^1(]0, 1[)$  telle que :

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(]0, 1[) \quad (3.8)$$

Vérifions maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. On pose donc  $V = H_0^1(]0, 1[)$  et :

$$a(u, w) = \int_0^1 u'(x)w'(x)dx \quad \text{et} \quad l(w) = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

Nous avons déjà établi la continuité de la forme linéaire  $l(w)$ . La bilinéarité de la forme  $a$  est triviale à démontrer. De plus, cette forme bilinéaire est symétrique et continue. En effet, en se servant une fois encore de l'inégalité de Cauchy, on a :

$$|a(u, w)| = \left| \int_0^1 u'(x)w'(x)dx \right| \leq \|u'\|_{0,\Omega} \|w'\|_{0,\Omega} = |u|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega}$$

et le résultat suit puisque  $|\cdot|_{1,\Omega}$  est une norme sur  $H_0^1(]0, 1[)$ . Enfin :

$$a(w, w) = \int_0^1 w'(x)w'(x)dx = |w|_{1,\Omega}^2$$

et la coercivité suit en posant  $\alpha = 1$ . ♦

**Remarque 3.14.** Dans l'exemple précédent, nous avons utilisé la norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$  pour vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. Cela était rendu possible car  $|\cdot|_{1,\Omega}$  et  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  sont des normes équivalentes sur l'espace  $H_0^1(]0, 1[)$ . En pratique, sur un espace  $V$  quelconque, on vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram en utilisant parmi différentes normes équivalentes sur l'espace  $V$  celle qui nous facilite le plus le travail. ◀

**Exemple 3.15.** Cet exemple est simplement une généralisation en plusieurs dimensions de l'exemple précédent. Soit donc  $f(\mathbf{x})$  une fonction de  $L^2(\Omega)$  et considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On peut aisément donner plusieurs interprétations physiques à ce problème. On peut par exemple considérer  $u$  comme une température (en °C),  $k$  comme étant la conductivité thermique (en W/(m °C)) que nous supposons constante (et strictement positive) et  $f(\mathbf{x})$  comme une source d'énergie (en W/m<sup>3</sup>). La température est maintenue à 0 sur la paroi du domaine  $\Omega$ .

Il paraît encore ici naturel de considérer l'espace  $H_0^1(\Omega)$  puisque les conditions aux limites sur  $u$  sont homogènes (nulle). En multipliant par une fonction test  $w \in H_0^1(\Omega)$ , on trouve à l'aide du théorème de la divergence A.5 :

$$\int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla w \, dv - \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w \, ds = \int_{\Omega} f w \, dv \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

L'intégrale de bord fait intervenir deux termes. Tout d'abord le terme  $k \frac{\partial u}{\partial n}$  qui apparaît naturellement, suite à l'utilisation du théorème de la divergence. Pour cette raison, on dit que c'est une *condition aux limites naturelle* du problème. L'autre terme est la fonction test  $w$ . Puisque  $w \in H_0^1(\Omega)$ , l'intégrale de bord s'annule (mais ce ne sera pas toujours le cas) et on obtient la formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f w \, dv \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (3.9)$$

qui est une généralisation multidimensionnelle de l'exemple précédent. On vérifie alors les hypothèses du théorème de Lax-Milgram de manière similaire. ♦

**Remarque 3.16.** Le problème variationnel 3.9 est équivalent au problème de minimisation :

$$J(u) = \min_{w \in H_0^1(\Omega)} J(w) = \min_{w \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} k |\nabla w|^2 \, dv - \int_{\Omega} f w \, dv$$

puisque la forme bilinéaire :

$$a(u, w) = \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv$$

est symétrique. Les unités de cette fonctionnelle sont des W °C. On utilise cependant rarement cette interprétation en pratique et on préfère travailler directement avec la formulation variationnelle 3.9.

◀

**Remarque 3.17.** Dans cet exemple, nous avons choisi la fonction  $f(\mathbf{x})$  dans l'espace  $L^2(\Omega)$  pour simplifier l'exposé. En fait, ce problème est bien posé si on remplace la fonction  $f$  par une distribution  $T$  appartenant au dual de  $H_0^1(\Omega)$  c.-à-d.  $T \in H^{-1}(\Omega)$ . Il faudrait alors remplacer le terme de droite dans la formulation variationnelle par  $\langle T, w \rangle$  puisque rien ne nous permet de supposer que cette distribution peut s'écrire sous une forme intégrale. ◀

Les deux exemples précédents sont particuliers en ce sens que les conditions aux limites sont nulles dans les deux cas. Il est temps de voir ce qui arrive dans le cas de conditions aux limites non homogènes. On se servira ici de certains résultats établis au chapitre précédent.

**Exemple 3.18.** Considérons le problème :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On peut interpréter physiquement ce problème comme pour l'exemple précédent à l'exception près que la température à la paroi est maintenue à une valeur  $g(\mathbf{x})$  éventuellement non nulle. Nous résoudrons ce problème de deux façons différentes qui aboutiront bien sûr à la même formulation variationnelle. Cela nous permettra de montrer comment on traite les conditions aux limites non homogènes.

**Première approche :**

Tout d'abord, il convient de noter que la fonction  $g$  se doit d'appartenir à l'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$  pour que le problème ait un sens. De plus, il serait tentant de considérer :

$$V = \left\{ w_1 \in H^1(\Omega) \mid w_1 = g \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (3.10)$$

mais ce n'est pas un espace fonctionnel linéaire. La clé vient de l'équation 2.30 qui assure l'existence d'une fonction  $u_g \in H^1(\Omega)$  dont  $g$  est la trace au bord. En ce sens, on dit que pour un problème d'ordre 2, l'imposition de  $u$  sur la frontière (ou une partie de la frontière) est une condition aux limites *essentielle*. On appelle cette étape le *relèvement des conditions aux limites essentielles*. On décompose alors la fonction recherchée  $u$  en une somme  $\delta_u + u_g$  où  $\delta_u \in H_0^1(\Omega)$  et s'annule donc sur  $\Gamma$ . On considère ensuite le problème équivalent :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla \delta_u) = f + \nabla \cdot (k \nabla u_g) & \text{dans } \Omega \\ \delta_u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On s'est donc ramené une fois de plus à un problème avec conditions aux limites homogènes. Il est facile de vérifier que les deux formulations fortes sont équivalentes. En multipliant par une fonction test  $w \in H_0^1(\Omega)$  et en intégrant par parties, on trouve, à l'aide du théorème de la divergence A.5 :

$$\int_{\Omega} k \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv - \int_{\Gamma} k \frac{\partial \delta_u}{\partial \mathbf{n}} w \, ds = \int_{\Omega} f w \, dv - \int_{\Omega} k \nabla u_g \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Gamma} k \frac{\partial u_g}{\partial \mathbf{n}} w \, ds$$

Puisque  $w \in H_0^1(\Omega)$ , les intégrales de bord s'annulent et on obtient la formulation variationnelle suivante :

♠ trouver  $\delta_u \in H_0^1(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} k \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f w \, dv - \int_{\Omega} k \nabla u_g \cdot \nabla w \, dv \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (3.11)$$

Ce problème variationnel requiert la connaissance de la fonction de relèvement des conditions aux limites  $u_g$ . Or jusqu'à maintenant, nous savons qu'une telle fonction existe mais sans plus. La méthode des éléments finis nous permettra de construire explicitement cette fonction. Nous pouvons donc procéder comme si cette fonction était connue. La vérification des hypothèses du théorème de Lax-Milgram ne pose aucune difficulté particulière. On pose :

$$a(\delta_u, w) = \int_{\Omega} k \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv \quad \text{et} \quad l(w) = \int_{\Omega} f w \, dv - \int_{\Omega} k \nabla u_g \cdot \nabla w \, dv$$

La continuité, la bilinéarité et la coercivité de  $a$  sur  $H_0^1(\Omega)$  ont déjà été établies. La linéarité de  $l$  découle de la linéarité des intégrales. Quant à la continuité, on a :

$$\begin{aligned} |l(w)| &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega} + k \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u_g}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} + k \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u_g}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

c.-à-d.

$$|l(w)| \leq C \|w\|_{1,\Omega} \quad \text{où} \quad C = \|f\|_{0,\Omega} + k \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u_g}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}$$



**Deuxième approche :**

On part tout simplement de l'équation différentielle initiale. Puisque qu'on impose une condition aux limites essentielle sur toute la frontière, on choisit des fonctions tests  $w$  s'annulant sur toute la frontière ce qui revient à choisir  $V = H_0^1(\Omega)$ . On multiplie ensuite par  $w \in V$  et on intègre par parties :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv - \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w \, ds = \int_{\Omega} f w \, dv$$

Puisque  $w \in H_0^1(\Omega)$ , les intégrales de bord s'annulent et on obtient la formulation variationnelle suivante :

♠ trouver  $u \in \{w_1 \in H^1(\Omega) \mid w_1 = g \text{ sur } \Gamma\}$  telle que :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f w \, dv \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (3.12)$$

On ne peut appliquer immédiatement le théorème de Lax-Milgram puisque la solution  $u$  et les fonctions tests  $w$  ne sont pas dans le même espace (en fait  $u$  n'est même pas dans un espace fonctionnel linéaire). C'est ici que l'on peut effectuer le relèvement des conditions aux limites essentielles. On pose comme précédemment  $u = \delta_u + u_g$  où  $u_g$  vérifie les conditions aux limites essentielles et on obtient immédiatement la formulation variationnelle 3.11.

**Unicité de  $u$  :**

Nous avons donc démontré l'existence et l'unicité de  $\delta_u$  pour un relèvement  $u_g$  des conditions aux limites essentielles. La solution de notre problème initial est donc  $u = \delta_u + u_g$ . On remarque cependant que  $u_g$  n'est pas unique. Se peut-il que  $u$  ne soit pas unique ? La formulation 3.12 nous permet cependant de démontrer facilement l'unicité de  $u$ . En effet, si on suppose qu'il existe deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  de l'équation 3.12, alors la différence  $u_1 - u_2$  est dans  $H_0^1(\Omega)$  car  $u_1 - u_2 = g - g = 0$  sur  $\Gamma$  et de plus :

$$\int_{\Omega} k \nabla (u_1 - u_2) \cdot \nabla w \, dv = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

En choisissant  $w = (u_1 - u_2)$ , et puisque  $k > 0$ , on montre que  $|u_1 - u_2|_{1,\Omega} = 0$  ce qui entraîne que  $u_1 \stackrel{\text{p.p.}}{=} u_2$  puisque  $|\cdot|_{1,\Omega}$  est une norme. ♦

**Remarque 3.19.** Pour les équations aux dérivées partielles d'ordre 2, l'imposition de  $u$  sur la frontière (ou une partie de la frontière) constitue une condition aux limites essentielle qui peut être relevée en vertu de l'équation 2.30. Là où la condition essentielle est imposée, la fonction test  $w$  doit s'annuler. Les fonctions tests  $w$  sont parfois appelées des *déplacements admissibles*, en référence à l'origine de la méthode des éléments finis en mécanique des structures. ◀

**Exemple 3.20.** On considère cette fois un problème dit *mêlé*, en ce sens que les conditions aux limites sont de deux types. Soit donc le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (k \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = g \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (g \in H^{1/2}(\Gamma_0)) \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

où les frontières  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  vérifient  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  et  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ . La fonction  $h$  s'interprète comme un flux de chaleur à travers la frontière (en  $W/m^2$ ).

Le relèvement de la condition aux limites essentielle est encore possible. En vertu de l'équation 2.30, on peut trouver une fonction  $u_g \in H^1(\Omega)$  telle que  $u_g = g$  sur  $\Gamma_0$ . Nous ne pouvons pas faire le même exercice pour la condition aux limites de type Neumann sur la dérivée normale. Nous n'avons en effet aucune assurance de l'existence d'une fonction  $u_h \in H^1(\Omega)$  telle que :

$$k \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}} = h \text{ sur } \Gamma_1$$

Puisqu'on impose une condition essentielle uniquement sur  $\Gamma_0$ , on choisit  $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . On multiplie ensuite par une fonction test  $w \in V$  et on intègre en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv - \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w \, ds = \int_{\Omega} f w \, dv$$

Puisque  $w \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ , l'intégrale de bord s'annulent sur  $\Gamma_0$  tandis que sur  $\Gamma_1$ , on a :

$$k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h$$

qui est la condition naturelle. Il reste, après substitution :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f w \, dv + \int_{\Gamma_1} h w \, ds$$

On pose alors comme précédemment  $u = \delta_u + u_g$  où  $\delta_u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  et  $u_g = g$  sur  $\Gamma_0$ . On a alors le problème équivalent :

$$\int_{\Omega} k \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f w \, dv - \int_{\Omega} k \nabla u_g \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Gamma_1} h w \, ds \quad (3.13)$$

qui est bien de la forme du théorème de Lax-Milgram.

♠ trouver  $\delta_u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  telle que :

$$a(\delta_u, w) = l(w) \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$$

L'espace  $V$  est ici  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  car les conditions aux limites essentielles l'imposent. Rappelons encore ici, car cela est important, que la méthode des éléments finis nous permettra de construire explicitement la fonction  $u_g$ . La vérification des hypothèses du théorème de Lax-Milgram est laissée au lecteur sauf pour un point qui mérite une attention particulière. Pour démontrer la continuité de  $l(w)$ , on doit recourir à la continuité de la trace au bord et à l'équation 2.31 en effectuant la majoration :

$$\left| \int_{\Gamma_1} h w \, ds \right| \leq \|h\|_{0,\Gamma_1} \|w\|_{0,\Gamma_1} \leq C \|h\|_{0,\Gamma_1} \|w\|_{1,\Omega}$$

◆

**Remarque 3.21.** Dans le terme de bord :

$$\int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w \, ds$$

on doit connaître soit la condition naturelle, dans ce cas  $k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ , soit la condition essentielle, dans ce cas  $u$  et alors la fonction test  $w$  s'annule. On ne peut pas imposer au même endroit de la frontière la condition essentielle et la condition naturelle. On peut faire l'analogie avec une force et un déplacement. On connaît soit la force (condition naturelle) soit le déplacement (condition essentielle). ◀

### 3.2.2 Problèmes d'ordre 4

Nous considérons ici les équations aux dérivées partielles d'ordre 4 de la forme :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = f(x)$$

ou encore en dimension 2 ou 3 :

$$\nabla^2 \left( q(\mathbf{x}) \nabla^2 u(\mathbf{x}) \right) = f(\mathbf{x})$$

auquelles s'ajoutent des conditions aux limites appropriées. Il est facile de se convaincre qu'après deux utilisations du théorème de la divergence (deux intégrations par parties en dimension 1), il ne restera dans la formulation variationnelle que des dérivées d'ordre 2. L'espace fonctionnel approprié a donc toutes les chances d'être  $H^2(\Omega)$  ou ses variantes. Voyons tout cela de plus près en commençant un problème en dimension 1.

**Exemple 3.22.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx^2} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = f(x) \text{ dans } ]0, L[ \\ u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0 \\ q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x=L} = M_0 \\ \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x=L} = 0 \end{array} \right.$$

Ce problème provient de l'analyse de la déformation d'une poutre sous l'effet d'une sollicitation  $f(x)$  (en N/m) et d'un moment de flexion  $M_0$  (en N · m). La fonction  $q(x)$  dépend alors des propriétés élastiques du matériau et de l'aire de la section de la poutre. En fait on a  $q(x) = EI$  où  $E$  est le module d'Young et  $I$  le moment d'inertie. Cette fonction (pas forcément constante le long de la

poutre) est en général strictement positive et bornée de sorte qu'il existe des constantes  $q_1$  et  $q_2$  telles que :

$$0 < q_1 \leq q(x) \leq q_2 \quad \forall x \in [0, L]$$

Pour un problème d'ordre 4, le théorème 2.9 nous assure que les conditions aux limites essentielles portent sur  $u$  et  $\frac{du}{dx}$  car on peut en effectuer le relèvement. Notez la différence importante avec les problèmes d'ordre 2 pour lesquels la seule condition aux limites essentielle est sur  $u$ . Dans cet exemple, la fonction de relèvement est tout simplement  $u_g = 0$  puisque les conditions essentielles sont homogènes. L'espace fonctionnel approprié est donc :

$$V = \{w \in H^2(]0, L[) \mid w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0\}$$

On multiplie alors par une fonction test  $w \in V$  et on intègre une première fois par parties. On obtient ainsi :

$$-\int_0^L \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \frac{dw}{dx} dx + \left( \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right) w \Big|_0^L = \int_0^L f w dx$$

Le terme de bord fait intervenir d'une part la fonction test  $w$  qui s'annule en  $x = 0$  et d'autre part la première condition naturelle :

$$\frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \tag{3.14}$$

qui vaut 0 en  $x = L$ . Il reste :

$$-\int_0^L \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \frac{dw}{dx} dx = \int_0^L f w dx$$

Une nouvelle intégration par parties résulte en :

$$\int_0^L q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \frac{dw}{dx} \Big|_0^L = \int_0^L f w dx$$

Le nouveau terme de bord fait intervenir  $\frac{dw}{dx}$  qui s'annulent en  $x = 0$  et la deuxième condition dite naturelle :

$$q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \tag{3.15}$$

qui prend la valeur  $M_0$  en  $x = L$ . On a donc la formulation variationnelle :

$$\int_0^L q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_0^L f w dx + M_0 \frac{dw}{dx}(L) \tag{3.16}$$

qui est de la forme  $a(u, w) = l(w)$ .

Vérifions les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. La linéarité de  $l$  et la bilinéarité de  $a$  sont évidentes de même que sa symétrie. Pour démontrer la continuité de  $a$ , on utilise le fait que la fonction  $q(x)$  est bornée et comme toujours, l'inégalité de Cauchy. On a :

$$|a(u, w)| = \left| \int_0^L q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \right| \leq q_2 \int_0^L \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \right| dx \leq q_2 \|u''\|_{0,\Omega} \|w''\|_{0,\Omega}$$

et le résultat suit puisque  $\|w''\|_{0,\Omega}$  est une norme sur  $V$  (voir l'équation 2.38). En ce qui concerne la coercivité, le raisonnement est similaire. On a :

$$a(w, w) = \int_0^L q(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \geq q_1 \int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = q_1 \|w''\|_{0,\Omega}^2 = q_1 |w|_{2,\Omega}^2$$

et le résultat suit en prenant  $\alpha = q_1$  dans la définition 3.3 et puisque  $|w|_{2,\Omega}^2$  est une norme équivalente à la norme  $\|w\|_{2,\Omega}^2$  sur  $V$ .

Enfin, il reste à montrer la continuité de la forme linéaire  $l$ . Pour y arriver, on doit se servir de l'inégalité de Cauchy et de la continuité de la trace au bord 2.36. On a ainsi :

$$\begin{aligned} |l(w)| &= \left| \int_0^L f w dx + M_0 \frac{dw}{dx}(L) \right| \leq \left| \int_0^L f w dx \right| + |M_0| \left| \frac{dw}{dx}(L) \right| \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega} + |M_0| \|w\|_{2,\Omega} \leq (\|f\|_{0,\Omega} + |M_0|) \|w\|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

◆

**Remarque 3.23.** Le problème variationnel 3.16 est équivalent à la minimisation de la fonctionnelle :

$$J(u) = \min_{w \in V} J(w) = \min_{w \in V} \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L f w dx - M_0 \frac{dw}{dx}(L)$$

dont les unités sont des N·m. Le premier terme de  $J(w)$  correspond à l'énergie élastique de déformation tandis que les deux autres termes correspondent au travail effectué par la charge imposée.

◀

**Remarque 3.24.** Pour les problèmes d'ordre 4, il y a 2 conditions aux limites essentielles  $u$  et  $\frac{du}{dx}$  ainsi que 2 conditions aux limites naturelles qui sont en relation étroite. Dans le premier terme de bord :

$$\left( \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right) w \Big|_0^L$$

on doit connaître soit la condition naturelle  $\frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right)$  auquel cas la fonction test  $w$  ne doit pas s'annuler, ou encore on connaît  $u$  et alors la fonction test  $w$  s'annule à cet endroit. Un raisonnement similaire existe pour la deuxième condition naturelle. Si  $q(x) \frac{d^2 u}{dx^2}$  est donnée, alors  $\frac{dw}{dx}$  ne peut s'annuler. Par contre, si  $\frac{du}{dx}$  est connue, alors la fonction test  $\frac{dw}{dx}$  s'annule à cet endroit et le terme de bord correspondant disparaît. ◀

### 3.2.3 Résumé

On peut établir en quelque sorte la procédure à suivre pour vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

— **Problèmes d'ordre 2**

1. la seule condition essentielle est l'imposition de  $u$  ;
2. on identifie la portion de la frontière  $\Gamma_0$  où la condition essentielle est imposée ;
3. on pose  $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . Si aucune condition essentielle n'est imposée, on pose  $V = H^1(\Omega)$  ;
4. l'inclusion 2.29 nous assure de l'existence d'une fonction de relèvement  $u_g$  des conditions aux limites essentielles ;
5. là où la condition essentielle est imposée, les fonctions tests  $w$  s'annulent (par définition de l'espace  $V$ ) ;
6. on obtient la formulation variationnelle en multipliant par une fonction test  $w$  et en intégrant par parties les termes d'ordre 2 ;
7. la condition aux limites naturelle est le coefficient (dépendant de  $u$ ) qui multiplie  $w$  dans le terme de bord ;
8. on vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram en utilisant l'une ou l'autre des normes équivalentes sur l'espace  $V$ . La relation 2.31 sera éventuellement utile pour traiter les termes de bords ;
9. on en déduit (s'il y a lieu) l'existence et l'unicité de la solution  $u$ .

— **Problèmes d'ordre 4**

1. il y a 2 conditions essentielles soit l'imposition de  $u$  et de  $\partial u / \partial \mathbf{n}$  ( $u'(x)$  en dimension 1) ;
2. on identifie la portion de la frontière  $\Gamma_0$  où les conditions essentielles sont imposées ;
3. on pose  $V = H_{\Gamma_0}^2(\Omega)$ . Si aucune condition essentielle n'est imposée, on pose  $V = H^2(\Omega)$  ;
4. l'équation 2.35 nous assure de l'existence d'une fonction de relèvement  $u_g$  des conditions aux limites essentielles ;
5. là où la condition essentielle sur  $u(x)$  est imposée, les fonctions tests  $w$  s'annulent. Là où la condition essentielle sur  $\partial u / \partial \mathbf{n}$  est imposée, les dérivées normales des fonctions tests  $\partial w / \partial \mathbf{n}$  s'annulent (par définition de l'espace  $V$ ) ;
6. on obtient la formulation variationnelle en multipliant par une fonction test  $w$  et en intégrant par parties les termes d'ordre 4 (et parfois aussi des termes d'ordre 2) ;
7. les conditions aux limites naturelles sont les coefficients (dépendant de  $u$ ) qui multiplient  $w$  et  $\partial w / \partial \mathbf{n}$  dans les termes de bord ;
8. on vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram en utilisant l'une ou l'autre des normes équivalentes sur l'espace  $V$ . La relation 2.36 sera éventuellement utile pour traiter les termes de bords ;
9. on en déduit (s'il y a lieu) l'existence et l'unicité de la solution  $u$ .

### 3.3 Exercices

1. Vérifier si les expressions suivantes sont des formes bilinéaires continues, symétriques et coercives sur les espaces donnés. On supposera que les fonctions  $p(\mathbf{x})$  et  $q(\mathbf{x})$  sont bornées c'est-à-dire  $0 < p_1 \leq p(\mathbf{x}) \leq p_2$  et  $0 < q_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq q_2$  et ce  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

a)

$$a(u, w) = \int_{\Omega} p(\mathbf{x})uw \, dv \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

b)

$$a(u, w) = \int_{\Omega} q(\mathbf{x})\nabla u \cdot \nabla w \, dv \quad \text{dans } H_0^1(\Omega)$$

c)

$$a(u, w) = \int_{\Omega} q(\mathbf{x})\nabla u \cdot \nabla w \, dv \quad \text{dans } H^1(\Omega)$$

d)

$$a(u, w) = \int_{\Omega} (p(\mathbf{x})uw + q(\mathbf{x})\nabla u \cdot \nabla w) \, dv \quad \text{dans } H^1(\Omega)$$

2. Discuter de l'existence et de l'unicité de la solution des problèmes suivants. Bien identifier l'espace fonctionnel  $V$ , les conditions aux limites essentielles et naturelles et obtenir explicitement la fonction de relèvement des conditions aux limites essentielles lorsque possible. La fonction  $q(\mathbf{x})$  sera supposée continue et bornée c.-à-d.  $0 < q_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq q_2$  et  $\nu_1$  et  $\nu_2$  seront des constantes strictement positives. La fonction  $f(\mathbf{x})$  apparaissant à plusieurs reprises sera supposée dans  $L^2(\Omega)$ .

En dimension 1 :

a)

$$\begin{cases} -\nu_2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \nu_1 u - \nu_2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} -\nu_2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{du}{dx} \right) = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = a, \quad q(1) \frac{du}{dx}(1) = b \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left( q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \right) = f & \text{dans } ]0, L[ \\ u(0) = a, \quad u(L) = b \\ q(0) \frac{d^2u}{dx^2}(0) = c, \quad q(L) \frac{d^2u}{dx^2}(L) = d \end{cases}$$

En dimension supérieure à 1 :

f)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (q(\mathbf{x}) \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma_0 \\ q(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

3. On souhaite résoudre le problème suivant :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2u(x)}{dx^2} \right) = f(x) \text{ dans } ]0, 1[,$$

où  $EI$  est une constante. Peut-on obtenir une formulation variationnelle dans le cas des conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2u(1)}{dx^2} \right) = F$$



4. On suppose que l'on a un problème variationnel de la forme :

$$a(u, w) = l(w)$$

où la forme bilinéaire  $a$  et la forme linéaire  $l$  vérifient les hypothèses du théorème de Lax-Milgram dans un espace de Hilbert  $V$ .

Montrer que l'unique solution  $u$  dépend continûment des données c.-à-d. que :

$$\|u\|_V \leq \frac{\|l\|}{\alpha}$$

où  $\alpha$  est la constante de coercivité et  $\|l\|$  est la plus petite constante  $C$  telle que :

$$|l(w)| \leq C\|w\|_V \quad \forall w \in V \quad \text{ou encore} \quad |l(w)| \leq \|l\| \|w\|_V \quad \forall w \in V$$

5. Vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( c_1 \frac{du}{dx} \right) + c_2 \frac{du}{dx} = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes strictement positives et  $f(x)$  est une fonction de  $L^2(]0, 1[)$ . Déterminer l'espace fonctionnel approprié et obtenir la formulation variationnelle du problème. **Ne pas intégrer par parties le terme  $c_2 \frac{du}{dx}$ .**

**N.B.** : Passer rapidement sur les questions de linéarité et bilinéarité. On se rappellera de plus que :

$$g(x)g'(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (g^2)$$



# Chapitre 4

## Méthode de Ritz

### 4.1 Principes généraux

Une fois le problème formulé sous forme variationnelle, il reste à le discrétiser c.-à-d. à le faire passer d'un problème de dimension infinie à un problème approché de dimension finie. Ce problème discrétisé sera ensuite résolu par les techniques d'algèbre linéaire classiques : résolution de systèmes algébriques linéaires ou non linéaires, de problèmes aux valeurs propres, etc.

La méthode de Ritz est une technique de discrétisation de problèmes variationnels et est en quelque sorte le précurseur de la méthode des éléments finis. Soit donc un problème variationnel vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :

♠ trouver  $u \in V$  telle que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V \quad (4.1)$$

où la fonction  $u$  vérifie les conditions aux limites essentielles homogènes (le cas des conditions aux limites non homogènes nécessite la construction d'une fonction de relèvement  $u_g$  mais ne pose pas de difficultés théoriques supplémentaires). On se donne maintenant  $N$  fonctions  $\phi_j \in V, j = 1, 2, \dots, N$  appelées *fonctions d'interpolation de Ritz* ou plus simplement *fonctions de Ritz* vérifiant elles aussi les conditions essentielles homogènes. On suppose ensuite que l'on peut écrire :

$$u(\mathbf{x}) \simeq u^N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

Dans cette expression, les  $N$  coefficients  $u_j$  sont à déterminer et le problème est maintenant de dimension finie  $N$ . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions  $\phi_j$  forme un sous-espace de dimension  $N$  de  $V$  noté  $V^N$  (toujours en supposant que les fonctions  $\phi_j$  sont choisies dans  $V$  dès le départ et qu'elles sont linéairement indépendantes). On considère donc l'approximation suivante du problème variationnel 4.1 :

♠ trouver  $u^N \in V^N$  telle que :

$$a(u^N, w^N) = l(w^N) \quad \forall w^N \in V^N \quad (4.3)$$

ou encore :

$$a \left( \sum_{j=1}^N u_j \phi_j, w^N \right) = l(w^N) \quad \forall w^N \in V^N$$

La bilinéarité de  $a$  nous permet d'écrire :

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\phi_j, w^N) = l(w^N) \quad \forall w^N \in V^N$$

On va maintenant construire un système linéaire (parce que le problème de départ 4.1 est linéaire) dont les inconnues sont les coefficients  $u_j$ . Soit donc  $N$  nouvelles fonctions  $\tilde{\phi}_i, i = 1, 2, \dots, N$  appartenant à l'espace  $V^N$ . Puisque l'équation précédente est vraie quelle que soit la fonction  $w^N \in V^N$ , elle est valide pour chacune des fonctions  $\tilde{\phi}_i$  et on a :

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\phi_j, \tilde{\phi}_i) = l(\tilde{\phi}_i) \quad 1 \leq i \leq N$$

qui est un système linéaire  $N$  sur  $N$  de la forme :

$$AU = F$$

où la matrice  $A$  et les vecteurs  $U$  et  $F$  ont pour coefficients :

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1, \tilde{\phi}_1) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_1) & \cdots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_1) \\ a(\phi_1, \tilde{\phi}_2) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_2) & \cdots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_1, \tilde{\phi}_N) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_N) & \cdots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\tilde{\phi}_1) \\ l(\tilde{\phi}_2) \\ \vdots \\ l(\tilde{\phi}_N) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Si les fonctions  $\phi_j$  et  $\tilde{\phi}_i$  sont bien choisies, ce système linéaire est inversible et on peut dès lors déterminer les inconnues  $u_i$  et ainsi obtenir une approximation  $u^N(x)$  de la fonction  $u$  par la relation 4.2. Un choix naturel pour les fonctions  $\tilde{\phi}_i$  consiste à prendre tout simplement  $\tilde{\phi}_i = \phi_i$ , et ce pour tout  $i$ . C'est la *méthode de Ritz* ou *méthode de Rayleigh-Ritz*. Dans le cas où  $\tilde{\phi}_i \neq \phi_i$ , on parle de la *méthode de Petrov-Galerkin*.

Dans cet ouvrage, nous insisterons davantage sur la méthode de Ritz, bien qu'il existe des applications intéressantes de la méthode de Petrov-Galerkin, notamment pour les problèmes de convection-diffusion.

**Remarque 4.1.** On remarque que le coefficient  $A_{ij}$  du système linéaire 4.4 est de la forme :

$$A_{ij} = a(\phi_j, \tilde{\phi}_i)$$

Lorsque la forme bilinéaire est symétrique, il n'y a pas de confusion possible mais dans le cas général, il faut faire attention à l'ordre des indices  $i$  et  $j$ . ◀

## 4.2 Exemples

Nous voyons dans cette section quelques exemples d'applications de la méthode de Ritz. Nous en profiterons au passage pour mettre en évidence les forces et éventuellement les faiblesses de cette approche.

**Exemple 4.2.** Considérons le problème en dimension 1 :

$$\begin{cases} -u''(x) &= \ln(x) \text{ dans } ]0, 1[ \\ u(0) &= 0 \\ \frac{du}{dx}(1) &= 1 \end{cases}$$

Puisque la seule condition essentielle (sur  $u$ ) est nulle, le relèvement est inutile ( $u_g = 0$ ) et on peut travailler directement avec  $u$  qui, dans ce cas, sera égal à  $\delta_u$ . La formulation variationnelle correspondante (laissée en exercice) est :

$$\spadesuit \text{ trouver } u \in V = \{w \in H^1(]0, 1[ \mid w(0) = 0\}$$

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = w(1) + \int_0^1 \ln(x)w(x)dx \quad \forall w \in V \quad (4.5)$$

Les fonctions  $\phi_j$  doivent appartenir à l'espace  $V$  et vérifier les conditions aux limites essentielles homogènes. Dans ce cas, il suffit d'avoir  $\phi_j(0) = 0$ . Cela mis à part, ce choix est arbitraire si on s'assure que  $\phi_j \in V$ . On peut prendre par exemple :

$$\phi_j(x) = x^j$$

et on s'assure facilement que toutes les conditions sont bien remplies. Le coefficient général de la matrice  $A$  pour la méthode de Ritz est donc :

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x) dx = \int_0^1 ijx^{i+j-2} dx = \frac{ij}{i+j-1}$$

tandis que le vecteur  $F$  a pour coefficients :

$$f_i = \phi_i(1) + \int_0^1 \ln(x)\phi_i(x) dx = 1 + \int_0^1 \ln(x)x^i dx = 1 - \frac{1}{(i+1)^2}$$

Ce système linéaire est ensuite résolu par les techniques habituelles de décomposition  $LU$  (voir par exemple Fortin, réf. [25]). En faisant varier la taille  $N$ , si tout se passe bien, on doit se rapprocher d'une éventuelle solution analytique. Dans cet exemple, cette solution est :

$$u(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

dont la dérivée est :

$$u'(x) = x - x \ln x$$

et on s'assure facilement que l'équation différentielle ainsi que les conditions aux limites sont vérifiées. En se servant du logiciel Matlab [44], on a résolu ce système pour obtenir les résultats de la figure 4.1 pour  $N = 1, 3$  et  $5$ . On y a superposé la solution analytique  $u(x)$  (en trait plein) et la solution numérique  $u^N(x)$ . Il est aussi intéressant de regarder le comportement de  $u'(x)$  et  $(u^N)'(x)$ . On remarque immédiatement qu'il est plus difficile d'approcher  $u'(x)$ . On peut affirmer que ce comportement est assez général. Nous en reparlerons lorsque nous aborderons les questions de convergence.

Enfin, il ne faut pas se leurrer sur la taille du système linéaire nécessaire pour obtenir une bonne approximation de  $u(x)$ . Dans cet exemple, une dimension de 5 semble suffire mais ce n'est certes pas toujours aussi facile... ♦

**Exemple 4.3.** Considérons le problème en dimension 1 :

$$\begin{cases} -u''(x) + u & = 0 \text{ dans } ]0, 1[ \\ u(0) & = 1 \\ \frac{du}{dx}(1) + u(1) & = 0 \end{cases}$$

La condition essentielle n'est imposée qu'en  $x = 0$  et on choisit donc :

$$V = \left\{ w \in H^1(]0, 1[) \mid w(0) = 0 \right\}$$

On multiplie par  $w \in V$  et on intègre :

$$\int_0^1 (u'(x)w'(x) + u(x)w(x)) dx - \frac{du}{dx}w \Big|_0^1 = 0 \quad \forall w \in V$$

Le terme de bord est nul en  $x = 0$  mais en  $x = 1$ , on a  $\frac{du}{dx}(1) = -u(1)$ . Il en résulte :

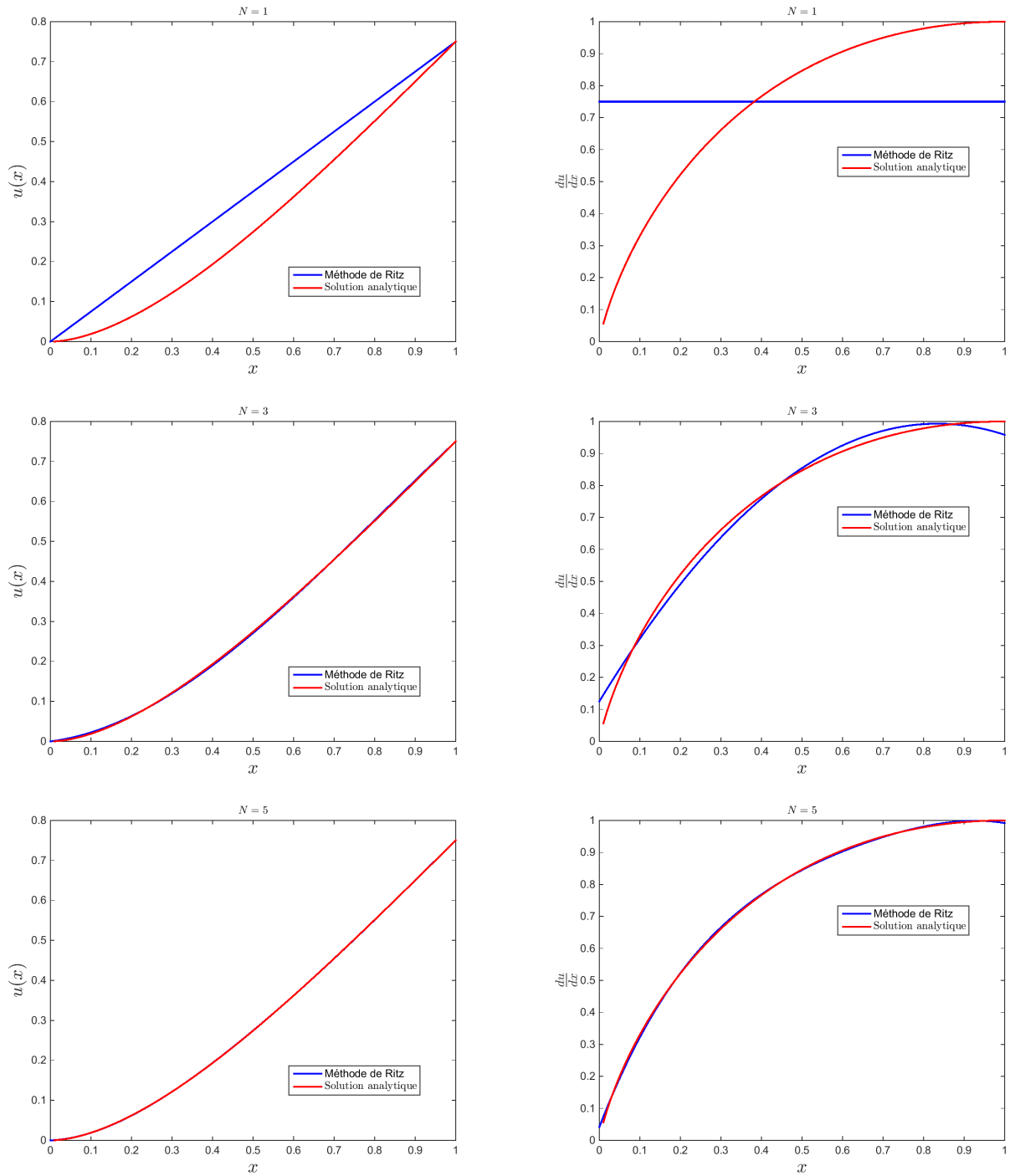
$$\int_0^1 (u'(x)w'(x) + u(x)w(x)) dx + u(1)w(1) = 0 \quad \forall w \in V$$

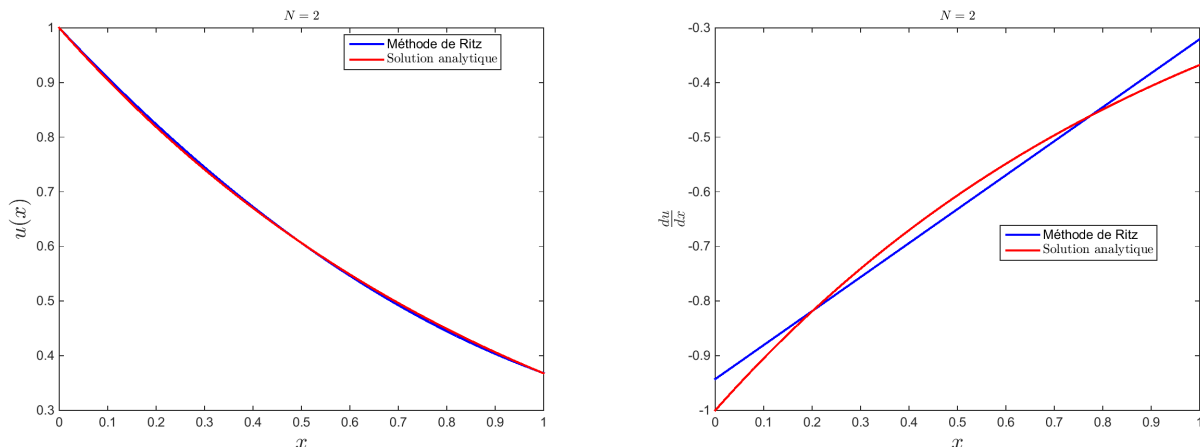
On relève maintenant les conditions aux limites essentielles. On pose  $u = \delta_u + u_g$  et on peut choisir tout simplement la fonction  $u_g = 1$  qui appartient à  $H^1(]0, 1[)$  et qui satisfait la condition essentielle. On a alors  $\forall w \in V$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\delta'_u(x)w'(x) + \delta_u(x)w(x)) dx + \delta_u(1)w(1) \\ & = - \int_0^1 (u'_g(x)w'(x) + u_g(x)w(x)) dx - u_g(1)w(1) \end{aligned}$$

Puisque  $u_g = 1$ ,  $u'_g = 0$ , il reste :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\delta'_u(x)w'(x) + \delta_u(x)w(x)) dx + \delta_u(1)w(1) \\ & = - \int_0^1 w(x) dx - w(1) \quad \forall w \in V \end{aligned}$$

Figure 4.1 – Solutions  $u(x)$  et  $u'(x)$  pour  $N = 1$ ,  $N = 3$  et  $N = 5$

Figure 4.2 – Méthode de Ritz ( $N = 2$ )

qui est la formulation variationnelle correspondant au problème initial.

Pour la méthode de Ritz, on peut ici encore choisir  $\phi_i(x) = x^i, i = 1, 2, \dots, N$ . La matrice  $A$  correspondante a pour coefficients :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^1 (\phi_j'(x)\phi_i'(x) + \phi_j(x)\phi_i(x)) dx + \phi_j(1)\phi_i(1) \\ &= \int_0^1 (ijx^{i+j-2} + x^{i+j}) dx + 1 \\ &= \frac{ij}{i+j-1} + \frac{1}{i+j+1} + 1 \end{aligned}$$

tandis que le vecteur  $F$  a pour coefficients :

$$f_i = - \int_0^1 \phi_i(x) dx - \phi_i(1) = - \int_0^1 x^i dx - 1 = - \left( 1 + \frac{1}{(i+1)} \right)$$

Il est facile de s'assurer que la solution analytique de l'équation différentielle de départ est  $u(x) = e^{-x}$  ce qui nous permet de comparer à la figure 4.2, les solutions analytique et numérique pour  $N = 2$ . Ici encore, la comparaison est excellente sur  $u$  et un peu moins convaincante sur  $u'(x)$ . La situation s'améliore cependant très rapidement lorsque  $N$  augmente. ♦

**Exemple 4.4.** On considère maintenant un problème bidimensionnel dont la géométrie est le carré de côtés de longueur 1 et les conditions aux limites sont décrites à la figure 4.3. On doit résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = 10 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \text{ (} g \text{ décrite à la figure 4.3)} \end{cases}$$



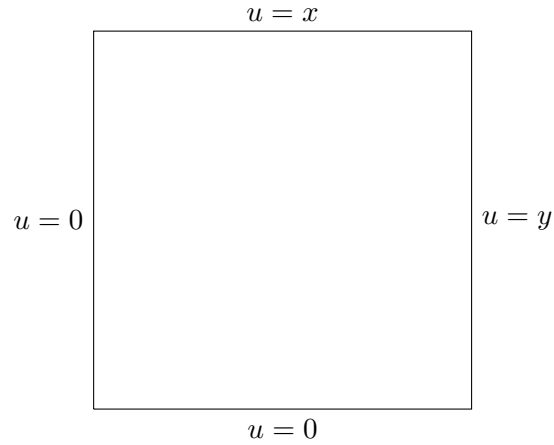


Figure 4.3 – Géométrie et conditions aux limites

Des conditions essentielles étant prescrites sur toute la frontière, on choisit  $V = H_0^1(\Omega)$  et comme toujours, on multiplie par  $w \in V$  et on intègre sur le domaine  $\Omega$ . On obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} 10w \, dv$$

On effectue le relèvement des conditions aux limites en posant  $u = \delta_u + u_g$ . Le choix de  $u_g$  est ici plus délicat malgré le fait que la géométrie du problème soit très simple. On peut prendre par exemple la fonction  $u_g(x, y) = xy$ . En remplaçant, on trouve la formulation variationnelle :

♠ trouver  $\delta_u \in V$  telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} 10w \, dv - \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla w \, dv$$

Il nous reste à construire les fonctions de Ritz  $\phi$ . Parmi les choix possibles, on peut prendre les  $N = m^2$  fonctions de la forme :

$$\phi_i(x, y) = \sin(i_1 \pi x) \sin(i_2 \pi y)$$

que l'on ordonne de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x, y) &= \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\
 \phi_2(x, y) &= \sin(\pi x) \sin(2\pi y) \\
 &\vdots \\
 \phi_m(x, y) &= \sin(\pi x) \sin(m\pi y) \\
 \phi_{m+1}(x, y) &= \sin(2\pi x) \sin(\pi y) \\
 \phi_{m+2}(x, y) &= \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \\
 &\vdots \\
 \phi_{2m}(x, y) &= \sin(2\pi x) \sin(m\pi y) \\
 &\vdots \\
 \phi_{m^2}(x, y) &= \sin(m\pi x) \sin(m\pi y)
 \end{aligned}$$

On a ainsi une relation sur les indices de la forme :

$$i = (i_1 - 1)m + i_2 \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq m$$

Ces fonctions s'annulent sur la frontière du domaine et vérifient une propriété d'orthogonalité très particulière :

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dv = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{\pi^2}{4}(i_1^2 + i_2^2) & \text{si } i = j \end{cases}$$

La matrice  $A$  est donc diagonale ce qui est toutefois exceptionnel. De plus, on vérifie non sans peine que :

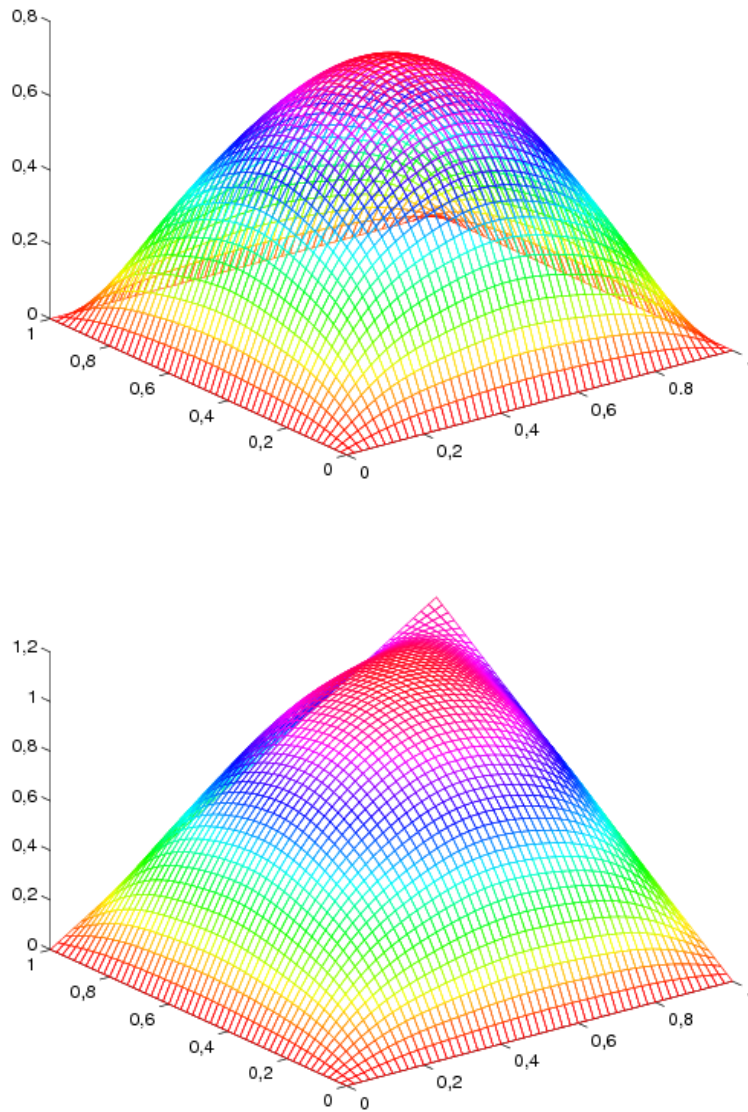
$$\begin{aligned}
 f_i &= \int_{\Omega} 10\phi_i \, dv - \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla \phi_i \, dv = 10 \int_{\Omega} \phi_i \, dv - \int_{\Omega} (y, x) \cdot \nabla \phi_i \, dv \\
 &= \frac{10}{\pi^2} \left( \frac{(-1)^{i_1} - 1}{i_1} \right) \left( \frac{(-1)^{i_2} - 1}{i_2} \right)
 \end{aligned}$$

Le système linéaire résultant est bien sûr très simple à résoudre. En prenant  $N = 5^2 = 25$ , on a obtenu le résultat de la figure 4.4 pour la fonction  $\delta_u$  qui rappelons-le, s'annule sur la frontière du domaine. La fonction  $u = \delta_u + u_g = \delta_u + xy$  est illustrée à la figure 4.4. ♦

### 4.3 Les figures de Chladni

Comme dernier exemple, nous allons considérer un problème célèbre dû au musicien et musicien Erns Florence Friedrich Chladni au dix-huitième siècle. Il remarqua en effet qu'il pouvait faire vibrer un plaque mince en métal à l'aide d'un archet de violon et provoquer des sons différents. Mais le plus remarquable était qu'en saupoudrant un peu de sable sur la plaque, les différentes vibrations se manifestaient par des figures géométriques très élégantes. On pouvait en quelque sorte voir les différents sons.

On mis quand même un certain temps à comprendre et expliquer ce phénomène. On trouvera dans Gander et Kwok [30] une description détaillée de même que le contexte historique de ce

Figure 4.4 – Méthode de Ritz en dimension 2 : fonctions  $\delta_u(x)$  et  $u(x)$

problème où des noms comme Sophie Germain (l'une des rares mathématiciennes de cette époque), Ritz, Galerkin et Kirchhoff ont joué des rôles importants. Nous ne pourrions pas développer toute la théorie sous-jacente. Nous nous limiterons à affirmer que la solution de ce problème n'est rien d'autre que celle d'un problème aux valeurs propres de la forme :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - (1-\mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) dx dy = \lambda \int_{\Omega} uv dx dy$$

où le domaine  $\Omega$  est simplement le carré  $[-1, 1]^2$ . La fonction  $u(x, y)$  désigne ici le déplacement vertical de la plaque lorsqu'elle vibre. La méthode de Ritz s'applique encore ici. Historiquement, c'est précisément pour ce problème que Ritz avait proposé la méthode qui porte maintenant son nom. La stratégie est ensuite la même qu'auparavant. On pose :

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j(x, y)$$

et on pose successivement  $v(x, y) = \phi_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . On obtient un problème aux valeurs propres généralisé de la forme :

$$K\vec{\alpha} = \lambda M\vec{\alpha}$$

où les matrices  $K$  et  $M$  ont pour coefficients respectifs :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) - (1-\mu) \left( \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right) dx dy$$

et

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx dy$$

Il y a encore ici plusieurs choix possibles pour les  $\phi_i$  et nous nous limiterons à un choix simple, bien qu'il existe des choix plus judicieux. Ritz avait d'ailleurs proposé des fonctions plus complexes que celles que nous utiliserons. Nous prendrons :

$$\phi_i(x, y) = x^{i_1-1} y^{i_2-1}$$

que l'on peut numéroté comme dans l'exemple 4.4. Les résultats qui suivent ont été obtenus en prenant  $\mu = 0,225$ ,  $n = 30$  et en utilisant Matlab pour calculer les valeurs et vecteurs propres. Une fois les calculs effectués, on peut visualiser les différents modes de vibration en dessinant la courbe de niveau 0 de chacun des vecteurs propres c.à-d. :

$$\sum_{i=1}^n v_i \phi_i(x, y) = 0 \tag{4.6}$$

où  $\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t$  est le vecteur propre. La courbe de niveau 0 correspond à un déplacement vertical nul, et est précisément ce que l'on peut observer expérimentalement sur une plaque

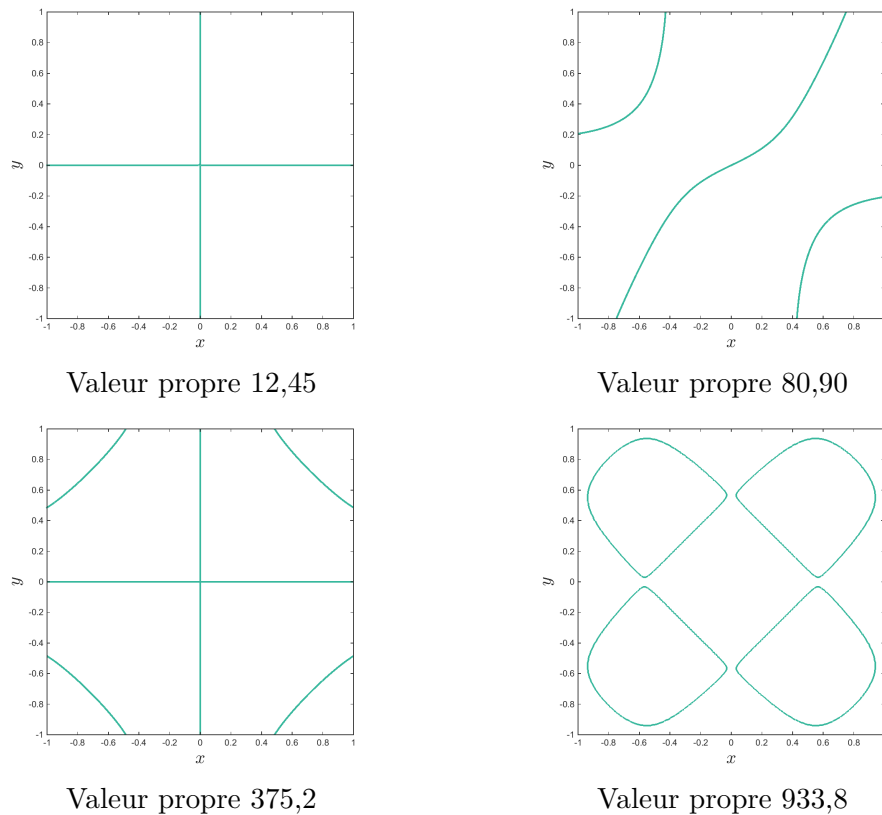


Figure 4.5 – Quelques unes des figures de Chladni

saupoudrée de sable. Les 16 premières valeurs propres non nulles sont :

Valeurs propres calculées			
$1,245 \times 10^1$	$8,090 \times 10^1$	$3,207 \times 10^2$	$8,762 \times 10^2$
$2,598 \times 10^1$	$2,354 \times 10^2$	$3,752 \times 10^2$	$9,338 \times 10^2$
$3,563 \times 10^1$	$2,354 \times 10^2$	$7,301 \times 10^2$	$1,103 \times 10^3$
$8,090 \times 10^1$	$2,693 \times 10^2$	$7,301 \times 10^2$	$1,103 \times 10^3$

Les lignes de niveau 0 des vecteurs propres correspondants aux valeurs propres 12,45, 80,90, 375,2 et 933,8 sont présentées à la figure 4.3. Notons que pour les valeurs propres doubles (80,90 et 235,4 par exemple), on utilise la moyenne des deux vecteurs propres correspondants dans l'équation 4.6. Les quatre modes de vibration illustrés correspondent parfaitement à certaines des figures observées initialement par Chladni.

Nous terminons ce chapitre par quelques remarques générales sur la méthode de Ritz. Les principales faiblesses de cette méthode sont :

- la construction de la fonction de relèvement  $u_g$  qui doit vérifier les conditions aux limites essentielles prescrites, ce qui peut être difficile particulièrement en dimension 2 ou 3 ;
- le choix et la construction des fonctions de Ritz  $\phi_i$  qui doivent être linéairement indépendantes et vérifier les conditions essentielles homogènes ;
- le calcul des coefficients  $a_{ij}$  et  $f_i$  du système linéaire qui peut nécessiter l'évaluation d'intégrales sur des domaines complexes. On peut éventuellement recourir aux méthodes d'intégration numériques si le besoin s'en fait sentir.
- Les inconnues  $u_i$  du système linéaire n'ont pas de signification physique particulière.

Les remarques précédentes sont particulièrement justifiées en dimension 2 ou 3 où les géométries peuvent être extrêmement variées et complexes. Il est alors pratiquement impossible de construire les différentes fonctions nécessaires. Cela est dû à l'approche globale de la méthode de Ritz, en ce sens que l'on cherche à construire les fonctions  $u_g$  et  $\phi_i$  en considérant tout le domaine  $\Omega$ . La méthode des éléments finis contourne cette difficulté par une approche plus localisée et une construction plus systématique des fonctions  $\phi_i$ .

## 4.4 Exercices

Déterminer pour les problèmes suivants une famille de fonctions  $\phi_i$  permettant d'appliquer la méthode de Ritz et obtenir la fonction de relèvement des conditions aux limites essentielles.

En dimension 1 :

1.

$$\begin{cases} -\nu_2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \nu_1 u - \nu_2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} -\nu_2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{du}{dx} \right) = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = a, \quad q(1) \frac{du}{dx}(1) = p \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = f & \text{dans } ]0, L[ \\ u(0) = a, \quad u(L) = b \\ q(0) \frac{d^2 u}{dx^2}(0) = c, \quad q(L) \frac{d^2 u}{dx^2}(L) = d \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = f & \text{dans } ]0, L[ \\ u(0) = a, \quad u(L) = b \\ u'(0) = 0, \quad q(L) \frac{d^2 u}{dx^2}(L) = d \end{cases}$$

En dimension 2 :

$$7. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (q(\mathbf{x})\nabla u) = f & \text{dans le carré } ]0, 1[^2 \\ u = 1 & \text{sur les côtés } x = 0 \text{ et } y = 0 \\ q(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 2 & \text{sur les autres côtés} \end{array} \right.$$

8. On souhaite résoudre le problème suivant par la méthode de Ritz :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) = f(x) \text{ dans } ]0, 1[,$$

où  $EI$  est une constante. Proposer des choix de fonctions  $u_g(x)$  et  $\phi_i(x)$  permettant de résoudre ce problème avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 2, \quad u(1) = 4, \quad EI \frac{d^2 u(1)}{dx^2} = M$$

(Utiliser de préférence des fonctions polynômiales).

9. Résoudre par la méthode de Ritz le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot k \nabla T = q & \text{dans le carré } ]0, 1[ \times ]0, 1[ \\ T = 0 & \text{sur les côtés } x = 1 \text{ et } y = 1 \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur les autres côtés} \end{array} \right.$$

où  $k$  et  $q$  sont des constantes. On prendra une seule fonction de Ritz :

$$\phi_1(x) = (1 - x^2)(1 - y^2)$$

10. Résoudre par la méthode de Ritz le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{d}{dx} \left( (x^2 + 1) \frac{du}{dx} \right) = 2 - 2x + 6x^2 & \text{dans l'intervalle } ]0, 1[ \\ u(0) = 1 \\ u'(1) = -1 \end{array} \right.$$

- Obtenir la formulation variationnelle ;
- Choisir les fonctions de Ritz appropriées ;
- Construire le relèvement des conditions aux limites essentielles ;



- d) Obtenir les coefficients  $a_{ij}$  et  $f_i$  du système linéaire correspondant ;
  - e) Résoudre le système en utilisant deux fonctions de Ritz.
11. On suppose que l'on a un problème variationnel de la forme :

$$a(u, w) = l(w)$$

où la forme bilinéaire **symétrique**  $a$  et la forme linéaire  $l$  vérifient les hypothèses du théorème de Lax-Milgram dans un espace de Hilbert  $V$ .

Montrer que si on utilise la méthode de Ritz pour discrétiser ce problème, on obtient une matrice  $A$  définie positive.

**Rappel** : Une matrice symétrique  $A$  est dite définie positive si quel que soit le vecteur colonne (non nul)  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$ , on a :

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (A \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j > 0$$



## Chapitre 5

# Éléments finis unidimensionnels

Nous allons maintenant établir comment construire les fonctions  $\phi_i(x)$  de la méthode de Ritz de manière efficace, et ce sur des domaines de forme quelconque. Cette efficacité proviendra de l'introduction de formes géométriques simples (des sous-intervalles en dimension 1) nommés *éléments* qui permettent une construction locale de ces fonctions. C'est certainement en dimension 2 ou 3 que l'introduction de ces éléments prend toute son importance car les géométries sont de toute évidence beaucoup plus complexes. Nous commencerons tout de même le développement en dimension 1 en tâchant d'utiliser une présentation la plus générale possible de sorte que le passage en dimension supérieure soit direct.

Nous choisissons une approche qui se veut la plus pédagogique possible. Nous présenterons aussi quelques aspects informatiques en indiquant quelques tableaux nécessaires à la bonne mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis. Nous ne chercherons cependant pas à obtenir une présentation optimale sur le plan informatique. Ce n'est pas le but de cet ouvrage. Le lecteur doit rester conscient qu'il existe plusieurs façons de présenter la méthode des éléments finis et que celle que nous avons retenue a l'avantage d'être relativement simple et suffisamment générale.

## 5.1 Équations différentielles d'ordre 2

### 5.1.1 Problème type

Pour fixer les idées, nous commencerons par la résolution d'un problème classique d'une équation différentielle d'ordre 2 de la forme :

$$\begin{cases} p(x)u - \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{du}{dx} \right) = r(x) & \text{dans } ]0, L[ \\ u(0) = c, \quad q(L) \frac{du}{dx}(L) = d \end{cases} \quad (5.1)$$

On suppose connues les fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$  de même que les constantes  $c$  et  $d$ .

Si dans cette équation on prend  $p(x) = 0$ , la variable dépendante  $u(x)$  peut entre autres choses désigner la déformation longitudinale d'une tige métallique de longueur  $L$ . À ce moment,  $q(x) = EA$ , où  $E$  est le module de Young et  $A$  l'aire de la section de la tige qui peut être variable. Enfin,  $r(x)$

est une force de contact sur la surface de la tige et  $d$  est une force axiale appliquée à l'une de ses extrémités. On peut aussi interpréter  $u(x)$  comme une température, une pression hydrostatique, un potentiel, etc., suivant le domaine qui nous intéresse (voir par exemple Reddy, réf. [52]). Le problème 5.1 est donc suffisamment général pour couvrir bon nombre d'applications.

Sur le plan théorique, si on suppose que la fonction  $p(x)$  est positive ou nulle et que  $0 < q_1 \leq q(x) \leq q_2$  dans l'intervalle  $]0, L[$ , il est facile de s'assurer que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. La solution, à un relèvement des conditions essentielles près, est dans l'espace :

$$V = \left\{ w \in H^1(]0, L[) \mid w(0) = 0 \right\}$$

Rappelons que pour cette équation différentielle d'ordre 2, la seule condition essentielle est l'imposition de la variable  $u(x)$  à la frontière. Dans cet exemple,  $u$  n'est imposée qu'en  $x = 0$  d'où cette définition de l'espace  $V$ .

Il est donc nécessaire de construire des fonctions  $\phi_i(x)$  dans la méthode de Ritz qui soient dans  $V$ . Comme nous l'avons vu au chapitre 2 et puisque nous utiliserons des approximations polynômiales, il suffit de s'assurer que ces fonctions soient continues (et s'annulent en  $x = 0$  dans ce cas précis).

On pose ensuite  $u = \delta_u + u_g$  et la formulation variationnelle (laissée en exercice) est :

♠ trouver  $\delta_u \in V$  telle que :

$$a(\delta_u, w) = l(w) - a(u_g, w) \quad \forall w \in V \quad (5.2)$$

où :

$$a(\delta_u, w) = \int_0^L (p(x)\delta_u(x)w(x) + q(x)\delta_u'(x)w'(x)) dx$$

et :

$$l(w) = d w(L) + \int_0^L r(x)w(x)dx$$

La méthode de Ritz consiste à poser :

$$u(x) = u_g(x) + \delta_u(x) = u_g(x) + \sum_{j=1}^n \delta_{u_j} \phi_j(x)$$

et nécessite la construction d'un système linéaire global de la forme :

$$A\delta_U = F$$

où :

$$a_{ij} = a(\phi_j(x), \phi_i(x)) \quad \text{et} \quad f_i = l(\phi_i(x)) - a(u_g(x), \phi_i(x))$$

La fonction  $u_g(x)$  est le relèvement des conditions aux limites essentielles et doit donc vérifier dans ce cas  $u_g(0) = c$  et doit de plus appartenir à l'espace  $H^1(]0, L[)$ .

**Remarque 5.1.** Il est souvent utile, en particulier pour les problèmes non linéaires que nous rencontrerons au chapitre 8, de considérer la fonction  $\delta_u(x)$  comme une correction à une solution existante  $u_g(x)$  obtenue préalablement et vérifiant bien sûr les conditions essentielles imposées. La fonction  $u_g(x)$  pourra provenir d'un calcul précédent ou tout simplement d'une itération précédente.

◀



Figure 5.1 – Maillage en dimension 1

Voyons maintenant comment construire les fonctions de Ritz  $\phi_i(x)$ . Cette construction se fera en plusieurs étapes qui constituent ce que l'on appelle la *méthode de Ritz-Galerkin*.

### 5.1.2 Le maillage

#### Les éléments

Considérons une partition de l'intervalle  $]0, L[$  comme celle de la figure 5.1. Cette partition en sous-intervalles constitue le *maillage*. Les sous-intervalles  $K_i$  sont appelés *éléments* dont le nombre total est noté  $nel$ . La frontière des éléments correspond aux cercles en trait gras. Les éléments peuvent être de longueur variable.

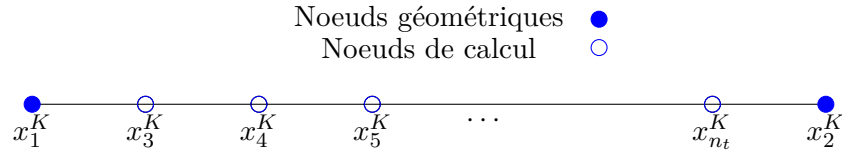
#### Les nœuds

Sur chaque élément, on identifie  $n_g^K$  *nœuds géométriques* (par le symbole  $\bullet$ ) qui permettent de définir la géométrie de l'élément en question. En dimension 1, les nœuds géométriques sont les bornes de l'élément et alors  $n_g^K = 2$ . On notera  $K = [x_1^K, x_2^K]$  un élément générique et  $h^K$  sa taille qui en dimension 1, est tout simplement la longueur  $h^K = x_2^K - x_1^K$  (on s'assurera bien sûr que  $x_2^K > x_1^K$  de sorte que  $h^K$  soit strictement positif). Ce sont ces nœuds géométriques qui définissent localement la géométrie de l'élément et globalement, celle du domaine en entier. En dimension 1, cela paraît futile mais en dimension supérieure, ce sera fondamental.

Dans chaque élément  $K$  on identifie également (voir la figure 5.2) un nombre  $n_c^K$  de *nœuds de calcul* (par le symbole  $\circ$ ) souvent appelés *nœuds d'interpolation* où les variables essentielles du problème seront éventuellement calculées. Ces nœuds d'interpolation peuvent coïncider ou non avec les nœuds géométriques. L'ensemble des nœuds de l'élément comprend donc les nœuds géométriques et les nœuds de calcul. On note  $n_t^K$  le nombre total de nœuds de l'élément  $K$  et  $(x_1^K, x_2^K, \dots, x_{n_t^K}^K)$  les nœuds de l'élément  $K$  en commençant par les nœuds géométriques, suivis des autres nœuds de calcul.

**Remarque 5.2.** Pour éviter d'alourdir inutilement l'exposé, nous supposons que les nœuds de calcul comprennent les nœuds géométriques, même si cette hypothèse n'est absolument pas nécessaire. Le nombre total de nœuds de l'élément est donc  $n_t^K = n_c^K$ . On rencontre le cas où les nœuds de calcul diffèrent totalement des nœuds géométriques notamment pour les éléments dits non conformes (voir Ciarlet, réf. [15]). ◀

On place les coordonnées de tous les nœuds (géométriques et/ou de calcul) dans un tableau que nous notons *coor* de longueur égale au nombre de nœuds total  $nnoeuds$  du maillage. On définit un *tableau de connectivité des nœuds* (notée *connecc*) comprenant  $nel$  lignes. À chacune de ces lignes, on retrouve les numéros des  $n_c^K$  nœuds de l'élément.

Figure 5.2 – Noeuds géométriques et de calcul sur un l'élément  $K$ 

### Les degrés de liberté

On associe à chaque nœud de calcul de l'élément une ou plusieurs inconnues appelées *degrés de liberté* (ddl) suivant que le problème possède une ou plusieurs variables essentielles. Il est même possible qu'à un nœud donné, aucun degré de liberté ne soit attribué ou qu'en 2 nœuds d'un même élément, un nombre différent de degrés de liberté ne soit associés. On s'assure ainsi d'une grande flexibilité au niveau de l'implantation de la méthode. On note  $n_d^K$  le nombre de degrés de liberté de l'élément. Très souvent,  $n_d^K$  est un multiple de  $n_c^K$ . Certains degrés de liberté seront communs à 2 (ou plus) éléments. Le nombre total de degrés de liberté du domaine sera noté  $nddl$ . Les degrés de liberté sont donc les inconnues de notre problème. Paradoxalement, certains degrés de liberté sont fixes puisqu'imposés par les conditions essentielles du problème. On notera :

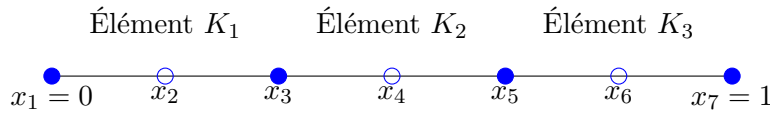
$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{nddl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^I \\ U^C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta_U = \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \vdots \\ \delta_{u_{nddl}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_U^I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

les vecteurs globaux des degrés de liberté pour  $u(x)$  et  $\delta_u(x)$  qui sont de dimension  $nddl$ . Le vecteur  $U$  se décompose en 2 parties distinctes :  $U^C$  est la partie de  $U$  qui est connue (d'où l'indice  $C$ ) car imposée par les conditions aux limites essentielles du problème. La partie correspondante dans le vecteur de correction  $\delta_U$  est par conséquent nulle. Le reste est noté  $U^I$  (et  $\delta_U^I$  pour la correction) ( $I$  pour inconnu) et sera éventuellement calculé. Nous reviendrons sur cette partition de  $U$  lors de l'imposition des conditions aux limites (voir la section 5.1.8) et lors de la résolution du système global (voir la section 5.1.9).

À chaque degré de liberté du domaine, on attribue une fonction de Ritz  $\phi(x)$  et, au nœud de calcul correspondant, on calculera une approximation de la variable essentielle associée. Chaque degré de liberté est relié à un nœud de calcul mais inversement, un nœud de calcul peut être associé à plusieurs degrés de liberté. On construira ainsi un système linéaire (ou non linéaire suivant que le problème de départ est linéaire ou non) de dimension  $nddl$  sur  $nddl$ .

### Numérotation des degrés de liberté

Le tableau de connectivité des nœuds *connec* est très utile mais ne suffit pas complètement puisque nous avons mentionné qu'à un nœud, on peut associer 1 ou plusieurs degrés de liberté. Il faut aussi introduire ce que nous appellerons un *tableau de numérotation* des degrés de liberté. Pour ce faire, on assigne en tout premier lieu un numéro à chaque degré de liberté du problème.

Figure 5.3 – Maillage :  $nel = 3, n_g^K = 2, n_c^K = 3$ 

Cette numérotation fera en sorte que les degrés de liberté où on impose une condition essentielle seront numérotés en dernier.

Pour y arriver, on construit un tableau de numérotation noté *numer* qui contient pour chaque nœud les numéros des degrés de liberté qui lui sont associés. C'est donc un tableau de dimension *nnoeuds* multipliée par le nombre de degrés de liberté par nœud qui peut être variable. Les étapes de construction du tableau *numer* sont les suivantes :

1. pour chacune des variables essentielles du problème, on identifie les numéros des nœuds où cette variable est imposée ;
2. on parcourt les nœuds en numérotant tous les degrés de liberté associés à chacun des ces nœuds et qui ne sont pas imposés comme condition aux limites essentielle du problème ;
3. on parcourt de nouveau les nœuds et on numérote à la suite tous les autres degrés de liberté c.-à-d. tous les degrés de liberté qui sont imposés comme condition aux limites essentielle du problème.

De cette manière, on décompose la matrice du système global et le vecteur des degrés de liberté du problème en 2 parties consécutives où on regroupe au début les véritables inconnues du système (le vecteur  $U^I$  que l'on devra calculer) et à la fin les valeurs des variables essentielles imposées (le vecteur  $U^C$ ) tel qu'indiqué à la relation 5.3.

Enfin, une fois la numérotation obtenue, on construit le *tableau d'adressage* noté *adres* qui pour chaque élément fournit les numéros des degrés de liberté associés à chaque nœud de calcul de l'élément. Chaque ligne de ce tableau correspond à un élément et sera appelée le *vecteur d'adressage* de cet élément. Le tableau d'adressage peut être construit une fois pour toutes grâce aux tableaux *connec* et *numer*. Il est cependant souvent préférable de construire le vecteur d'adressage de chaque élément au besoin. L'exemple qui suit illustre les différentes étapes et tableaux que nous venons d'introduire.

**Exemple 5.3.** La situation est illustrée à la figure 5.3 pour notre problème type. Ce maillage très simple du domaine  $]0, 1[$  (on choisit ici  $L = 1$ ) comporte  $nel = 3$  éléments dont les frontières sont identifiées par des cercles en trait gras. Sur chaque élément on a identifié 3 nœuds de calcul ( $n_c^K = 3$ ) comprenant les extrémités (les nœuds géométriques) et le point-milieu de l'élément. Certains nœuds sont communs à 2 éléments comme par exemple  $x_3$  (commun aux éléments  $K_1$  et  $K_2$ ) et  $x_5$  (commun à  $K_2$  et  $K_3$ ).

Dans cet exemple, on a  $nnoeuds = 7$  et le tableau  $coor$  est :

Coordonnées des nœuds		
Tableau $coor$		
$x_1$	$x_2$	$x_3$
0,0000	0,0000	0,0000
0,1667	0,0000	0,0000
0,3333	0,0000	0,0000
0,5000	0,0000	0,0000
0,6667	0,0000	0,0000
0,8333	0,0000	0,0000
1,0000	0,0000	0,0000

Bien entendu, les coordonnées  $x_2$  et  $x_3$  sont inutiles pour un problème unidimensionnel. Le tableau de connectivité des nœuds  $connec$  prend la forme :

Numéros des nœuds géométriques et de calcul			
Tableau $connec$			
	Nœuds géométriques		Autres nœuds
Élément	Noeud #1	Noeud #2	Noeud #3
1	1	3	2
2	3	5	4
3	5	7	6

Chaque ligne de ce tableau correspond à un élément différent. Rappelons encore ici la convention établie de numéroter en premier lieu les nœuds géométriques, et ce pour chaque élément. Dans cet exemple, il y a plus de nœuds de calcul que de nœuds géométriques mais ce n'est pas toujours le cas. Les deux tableaux précédents ainsi que le tableau  $coor$  contenant les coordonnées de tous les nœuds nous permettent de définir complètement la géométrie du domaine et contiennent aussi des informations que nous utiliserons un peu plus loin.

Enfin, il faut souligner que le tableau  $connec$  ne contient que les numéros des nœuds (de calcul et/ou géométriques). Pour obtenir les coordonnées de l'élément  $K_2$  par exemple, il faut utiliser le tableau  $coor$  et poser :

$$\begin{aligned}
 K_2 &= [x_1^{K_2}, x_2^{K_2}] \\
 &= [coor(connec(2, 1)), coor(connec(2, 2))] \\
 &= [coor(3), coor(5)] \\
 &= [0,3333, 0,6667]
 \end{aligned}$$

et le deuxième élément de ce maillage est donc l'intervalle  $[1/3, 2/3]$ . De plus, les coordonnées des nœuds de calcul de ce même élément sont :

$$\begin{aligned}
 (coor(connec(2, i)), i = 1, 2, \dots, n_c^K) &= \\
 (coor(3), coor(5), coor(4)) &= \\
 (0,3333, 0,6667, 0,5000) &
 \end{aligned}$$



Dans cet exemple (voir les équations 5.1), la variable essentielle  $u$  n'est imposée qu'en  $x = 0$  au nœud 1. Le degré de liberté associé au nœud 1 sera donc numéroté en dernier. Dans un premier temps, on laisse tomber les degrés de liberté imposés. Une première numérotation possible serait alors :

Numérotation	
Tableau <i>numer</i>	
Noeud	$u$
1	?
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6

On reparcourt ensuite les nœuds pour numérotter les degrés de liberté fixés par les conditions aux limites essentielles. On obtient :

Numérotation	
Tableau <i>numer</i>	
Noeud	$u$
1	7
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6

Chaque ligne de ce tableau correspond à un nœud de calcul du domaine. Dans le cas où on associe plusieurs degrés de liberté à un même nœud, on ajoute des colonnes supplémentaires à ce tableau. On peut même à la limite avoir un tableau dont les lignes ne sont pas toutes de même longueur dans le cas où le nombre de degrés de liberté associés n'est pas le même d'un nœud à l'autre.

On peut maintenant construire le tableau d'adressage dont chaque ligne correspond au vecteur d'adressage d'un élément  $K$  et fournit les numéros des degrés de liberté qui lui sont associés. On l'obtient en posant :

$$adres(K, i) = numer(conjec(K, i)), i = 1, 2, \dots, n_c^K$$

Dans notre exemple, on aurait :

Numéros des dds			
Tableau <i>adres</i>			
Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3
1	7	2	1
2	2	4	3
3	4	6	5

Chaque ligne correspond à un élément. On peut facilement reconstruire ce tableau à l'aide des tableaux *connec* et *numer*. En effet, pour la première ligne (le premier élément), on a :

$$\begin{aligned} adres(1, 1) &= numer(connec(1, 1)) = numer(1) = 7 \\ adres(1, 2) &= numer(connec(1, 2)) = numer(3) = 2 \\ adres(1, 3) &= numer(connec(1, 3)) = numer(2) = 1 \end{aligned}$$

Il en est de même pour chaque élément. Rappelons qu'il n'est pas nécessaire de garder en mémoire ce tableau puisqu'on peut le reconstruire très facilement à partir des tableau *connec* et *numer* lorsque l'on en a besoin. ♦

### 5.1.3 Formulation variationnelle élémentaire

Cette étape consiste à obtenir une formulation variationnelle sur un élément quelconque  $K$ . On utilise donc la méthode de Ritz comme au chapitre précédent, à l'exception notable près que l'on intègre sur un élément  $K = [x_1^K, x_2^K]$  plutôt que sur le domaine  $\Omega$  au complet. On obtient alors, après une intégration par parties :

$$\int_K \left( p(x)u(x)w(x) + q(x)\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} \right) dx = \int_K r(x)w(x)dx + q(x)\frac{du}{dx}w(x) \Big|_{x_1^K}^{x_2^K}$$

ou encore :

$$\int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x)u(x)w(x) + q(x)\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} \right) dx = \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x)w(x)dx + s_{12}^K w(x_2^K) + s_{11}^K w(x_1^K)$$

où on a introduit les *variables secondaires* :

$$s_{11}^K = -q(x_1^K)\frac{du}{dx}(x_1^K) \quad \text{et} \quad s_{12}^K = q(x_2^K)\frac{du}{dx}(x_2^K)$$

Ces variables secondaires correspondent aux conditions aux limites naturelles aux extrémités de l'élément. La notation à 2 indices indique que  $s_{11}^K$  est la valeur de la première variable secondaire à la première extrémité de l'élément tandis que  $s_{12}^K$  est la valeur de la première variable secondaire à la deuxième extrémité de l'élément  $K$ . On prévoit ainsi le cas où il y aura plusieurs variables secondaires définies aux bornes des éléments ce qui sera le cas pour les problèmes d'ordre 4. On qualifie ces variables de secondaires par opposition aux variables essentielles dites *variables primaires* suivant la notation de Reddy, réf. [52].

Puisque nous avons convenu de travailler en correction  $\delta_u$ , on pose encore  $u(x) = \delta_u(x) + u_g(x)$  et on a ainsi la formulation variationnelle élémentaire :

$$\begin{aligned} \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x)\delta_u(x)w(x) + q(x)\frac{d\delta_u}{dx}\frac{dw}{dx} \right) dx &= \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x)w(x)dx + s_{12}^K w(x_2^K) + s_{11}^K w(x_1^K) \\ &\quad - \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x)u_g(x)w(x) + q(x)\frac{du_g}{dx}\frac{dw}{dx} \right) dx \end{aligned}$$

et l'on retrouve bien ainsi la forme 5.2.

Nous ne sommes pas en mesure d'imposer les conditions aux limites puisque nous sommes sur un élément qui n'est pas forcément situé à la frontière du domaine. L'idée consiste maintenant à appliquer la méthode de Ritz sur l'élément  $K$ . On utilise donc sur chaque élément  $K$  une relation de la forme :

$$u(x) |_K \simeq \delta_u^K(x) + u_g^K(x)$$

où l'indice supérieur  $K$  désigne la restriction à l'élément  $K$ . On pose ensuite :

$$\delta_u^K(x) = \sum_{j=1}^{n_d^K} \delta_{u_j}^K \psi_j^K(x) \quad \text{et} \quad u_g^K(x) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \psi_j^K(x) \quad (5.4)$$

où  $n_d^K$  est le nombre total de degrés de liberté associés à la variable essentielle  $\delta_u(x)$  sur l'élément  $K$ . Les  $\delta_{u_j}^K$  sont les valeurs des degrés de liberté de l'élément et sont inconnus (sauf là où des conditions de Dirichlet seront imposées). Les  $u_{g_j}^K$  sont les valeurs nodales du relèvement des conditions aux limites et sont supposées connues. Nous verrons comment les obtenir un peu plus loin.

Comme cela est le cas ici, on aura très souvent  $n_d^K = n_c^K$  mais ce n'est aucunement nécessaire. Cette situation provient du fait qu'il n'y a qu'une seule variable essentielle (primaire) et que l'on associe un seul degré de liberté à chaque nœud de calcul. Si on remplace dans la formulation variationnelle, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_d^K} \delta_{u_j}^K \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x) \psi_j^K(x) w(x) + q(x) \frac{d\psi_j^K}{dx} \frac{dw}{dx} \right) dx &= \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x) w(x) dx + s_{12}^K w(x_2^K) + s_{11}^K w(x_1^K) \\ &\quad - \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x) u_g^K(x) w(x) + q(x) \frac{du_g^K}{dx} \frac{dw}{dx} \right) dx \end{aligned}$$

Les fonctions  $\psi_j^K(x)$  sont appelées *fonctions d'interpolation de l'élément  $K$*  et ne sont définies que sur  $K$  et non sur le domaine  $\Omega$  au complet. Pour obtenir un système linéaire, il suffit de prendre successivement  $w(x) = \psi_i^K(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_d^K$ . On obtient alors le *système élémentaire*  $n_d^K$  sur  $n_d^K$  suivant :

$$A^K \delta_U^K = F^K + S^K \quad (5.5)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x) \psi_j^K(x) \psi_i^K(x) + q(x) \frac{d\psi_j^K}{dx} \frac{d\psi_i^K}{dx} \right) dx \\ f_i^K &= \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x) \psi_i^K(x) dx - \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x) u_g^K(x) \psi_i^K(x) + q(x) \frac{du_g^K}{dx} \frac{d\psi_i^K}{dx} \right) dx \\ s_i^K &= s_{11}^K \psi_i^K(x_1^K) + s_{12}^K \psi_i^K(x_2^K) \end{aligned}$$

La *matrice élémentaire*  $A^K$  (de coefficients  $a_{ij}^K$ ) est souvent appelée *matrice de rigidité* faisant ainsi référence aux premières applications de la méthode des éléments finis dans le domaine des

structures. Le vecteur  $\delta_U^K$  (de coefficients  $\delta_{u_i}^K$ ) est appelé *vecteur des degrés de liberté élémentaires*. Bien que cela ne soit pas absolument nécessaire, nous avons séparé le terme de droite du système élémentaire en 2 parties  $F^K$  (de coefficients  $f_i^K$ ) et  $S^K$  (de coefficients  $s_i^K$ ). Cela permet d'isoler la contribution  $S^K$  des variables secondaires qui nécessiteront un traitement particulier lors de l'imposition des conditions aux limites. Le terme de droite au complet ( $F^K + S^K$ ) est le *vecteur des sollicitations élémentaires*.

Une telle formulation requiert la construction des fonctions  $\psi_i^K$  sur chaque élément  $K$  ce qui constitue une procédure assez lourde. De plus, on a souvent recours à l'intégration numérique pour évaluer les coefficients du système élémentaire. Comme nous le verrons un peu plus loin, cela nécessite la mise en mémoire de *points d'intégration* différents d'un élément à l'autre, ce qui exigerait beaucoup d'espace mémoire. Pour contourner cette difficulté, on introduit un élément  $\hat{K}$  dit de *référence* sur lequel on effectue toutes les intégrales nécessaires à l'évaluation du système élémentaire, et ce au moyen d'un changement de variables.

#### 5.1.4 Passage à l'élément de référence

En dimension 1, nous prendrons habituellement l'intervalle  $\hat{K} = [-1, 1]$  comme élément de référence. Le changement de variables de l'élément de référence  $\hat{K}$  à l'*élément réel*  $K$  est aussi appelé *transformation géométrique* et s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned}
 T^K : \quad \hat{K} &\rightarrow K \\
 [-1, 1] &\rightarrow [x_1^K, x_2^K] \\
 \xi &\rightarrow x = \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \\
 dx &= \frac{h^K}{2} d\xi
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Cette transformation géométrique est inversible et il en sera toujours ainsi, même en dimension supérieure pour les transformations linéaires. Toutefois, on peut aisément concevoir des transformations non linéaires de l'élément de référence et il faut alors être prudent car il est possible que dans certaines situations, la transformation ne soit pas inversible. On peut se référer à Dhatt-Touzot, réf. [20], à ce sujet.

C'est à cette étape que les tableaux *connec* et *coor* sont utiles car ils permettent de calculer les termes de la transformation  $T^K$  pour chaque élément. Ainsi, à chaque point  $\xi$  de l'élément de référence correspond un point  $x$  de l'élément  $K$  et inversement. Dans le cas présent la transformation

$T^K$  est facile à inverser et on a :

$$\begin{aligned}
(T^K)^{-1} : \quad K &\rightarrow \hat{K} \\
[x_1^K, x_2^K] &\rightarrow [-1, 1] \\
x &\rightarrow \xi = \frac{2x - (x_1^K + x_2^K)}{h^K} \\
d\xi &= \frac{2}{h^K} dx
\end{aligned} \tag{5.7}$$

On remarque que les extrémités de l'élément courant  $K$  sont envoyées sur les extrémités de l'élément de référence. On peut également obtenir cette transformation en introduisant les fonctions d'interpolation de Lagrange (voir l'annexe B ou Fortin, réf. [25]) sur l'élément de référence :

$$L_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad \text{et} \quad L_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}$$

La transformation  $T^K$  s'écrit alors également :

$$x = x_1^K L_1(\xi) + x_2^K L_2(\xi) = \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \tag{5.8}$$

Cette procédure est plus générale et permet de définir différentes transformations de l'élément de référence vers l'élément  $K$ . Nous procéderons de cette façon en dimension supérieure à 1. On peut encore ici facilement construire de manière similaire des transformations non linéaires en prenant des fonctions de Lagrange de degré supérieur.

C'est *a priori* uniquement sur l'élément de référence que nous construirons des fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}_i(\xi)$ . On définit ensuite les fonctions d'interpolation  $\psi_i^K(x)$  sur l'élément  $K$  par composition :

$$\psi_i^K(x) = \psi_i^K(T^K(\xi)) = \hat{\psi}_i(\xi) \quad \text{ou encore} \quad \hat{\psi}_i(\xi) = \hat{\psi}_i((T^K)^{-1}(x)) = \psi_i^K(x)$$

Les fonctions  $\psi_i^K(x)$  ne sont que rarement explicitées puisque, comme nous le verrons, nous n'en avons aucunement besoin.

Ainsi, la fonction d'interpolation  $\psi_i^K(x)$  prendra la même valeur que la fonction  $\hat{\psi}_i(\xi)$  au point  $x$  tel que  $x = T^K(\xi)$ . Les fonctions  $\hat{\psi}_i(\xi)$  sont par le fait même généralement indépendantes des éléments  $K$  et sont appelées *fonctions d'interpolation de l'élément de référence*. On a ainsi un seul ensemble de fonctions à construire et on transforme les dérivées par la formule de dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_j^K}{dx} &= \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \frac{2}{h^K} \\
\frac{d^2\psi_j^K}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d\psi_j^K}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{h^K} \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{2}{h^K} \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{4}{(h^K)^2} \frac{d^2\hat{\psi}_j}{d\xi^2}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Il convient de préciser comment on évalue  $u_g(x)$  et  $\frac{du_g(x)}{dx}$  dans le terme de droite. On utilise bien entendu l'expression 5.4 de sorte que :

$$u_g^K(x) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \psi_j^K(x) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \hat{\psi}_j(\xi) \quad \text{et} \quad \frac{du_g^K(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \frac{d\psi_j^K(x)}{dx} = \frac{2}{h^K} \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \frac{d\hat{\psi}_j(\xi)}{d\xi}$$

Effectuons maintenant le changement de variables dans le système élémentaire dont les coefficients deviennent :

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) \frac{h^K}{2} d\xi \\ &\quad + \int_{-1}^1 q \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \left( \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \frac{2}{h^K} \right) \left( \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi} \frac{2}{h^K} \right) \frac{h^K}{2} d\xi \\ &= \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{2}{h^K} \int_{-1}^1 q \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi} d\xi \\ f_i^K &= \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 r \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \hat{\psi}_j(\xi) \right) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{2}{h^K} \int_{-1}^1 q \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \frac{d\hat{\psi}_j(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi} d\xi \\ s_i^K &= s_{11}^K \hat{\psi}_i(-1) + s_{12}^K \hat{\psi}_i(1) \end{aligned}$$

### 5.1.5 Construction des fonctions d'interpolation $\hat{\psi}_i(\xi)$

À chaque nœud de calcul  $(x_1^K, x_2^K, \dots, x_{n_c^K}^K)$  de l'élément réel  $K$ , correspond un nœud d'interpolation  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_c^K})$  sur l'élément de référence par la relation :

$$\xi_i = (T^K)^{-1}(x_i^K) \quad \text{ou encore} \quad x_i^K = T^K(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n_c^K$$

Ainsi, par construction, on aura :

$$\psi_j^K(x_i^K) = \hat{\psi}_j(\xi_i)$$

Puisque nous souhaitons calculer une solution approximative de l'équation différentielle d'ordre 2 de départ, il serait intéressant d'obtenir une approximation de  $u(x)$  à chaque nœud de calcul de chaque élément du domaine  $\Omega$ . De plus, puisque nous avons une équation différentielle d'ordre 2, la solution  $u(x)$  devra être dans  $H^1(\Omega)$ . L'idée de base est alors d'utiliser des approximations polynômiales sur chaque élément. L'approximation de la solution sera donc constituée de polynômes différents dans chaque élément. Pour s'assurer que cette approximation soit dans  $H^1(\Omega)$ , il faut s'assurer de la continuité de l'approximation à la frontière des éléments (voir le chapitre 2). Pour ce faire, il suffit d'imposer en chaque nœud de calcul de chaque élément :

$$u(x_i^K) = u^K(x_i^K) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_j^K \psi_j^K(x_i^K) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_j^K \hat{\psi}_j(\xi_i) = u_i^K \quad (5.10)$$

Ainsi, l'approximation calculée en  $x = x_i^K$  de  $u(x_i^K)$  sera  $u_i^K$  ce qui donne une interprétation physique des degrés de liberté  $u_i^K$ . Si un nœud de calcul est commun à plusieurs éléments, le degré de liberté associé à ce nœud sera toujours le même et la continuité de l'approximation sera assurée.

Pour satisfaire l'équation 5.10, il faut donc construire sur l'élément de référence les fonctions  $\hat{\psi}_j(\xi)$  de sorte que :

$$\hat{\psi}_j(\xi_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.11)$$

qui est la définition même des fonctions d'interpolation de Lagrange (voir l'annexe B ou Fortin, réf. [25]). Leur construction est donc immédiate. Il suffit maintenant de fixer le degré des polynômes que nous voulons utiliser dans chaque élément ce qui déterminera également la dimension  $n_d^K$  du système élémentaire.

Remarquons enfin qu'avec des fonctions d'interpolation vérifiant l'équation 5.11 et puisque nous avons convenu que les 2 premiers nœuds correspondent aux extrémités de l'élément, le vecteur  $S^K$  des variables secondaires sur chaque élément est de la forme :

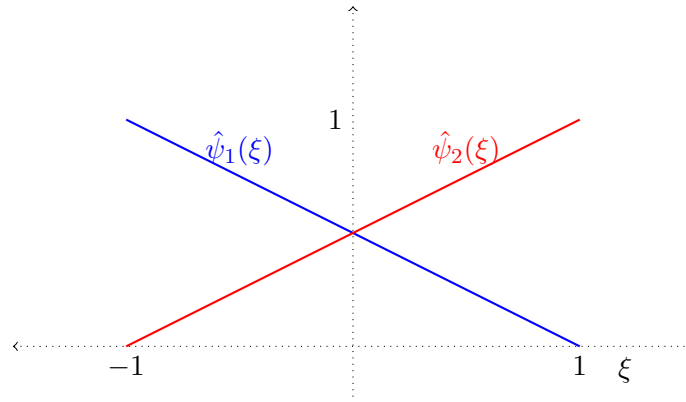
$$S^K = \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

mettant ainsi en évidence que ces variables n'agissent qu'aux extrémités de l'élément.

### Approximation linéaire

Pour une approximation linéaire, il suffit de prendre 2 nœuds de calcul par élément et 1 seul degré de liberté par nœud de calcul ( $n_c^K = n_d^K = 2$ ). Les nœuds de calcul coïncident donc avec les nœuds géométriques. Sur l'élément de référence les nœuds d'interpolation sont tout simplement les points  $\xi_1 = -1$  et  $\xi_2 = 1$ . Les fonctions  $\hat{\psi}_j(\xi)$  de Lagrange 5.11 sont :

$$\hat{\psi}_1(\xi) = \frac{(\xi - 1)}{(-1 - 1)} = \frac{(1 - \xi)}{2} \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))}{(1 - (-1))} = \frac{(\xi + 1)}{2}$$

Figure 5.4 – Fonctions d’interpolation linéaires sur  $\hat{K}$ 

et sont illustrées à la figure 5.4. Pour évaluer le système élémentaire, on a besoin des dérivées :

$$\frac{d\hat{\psi}_1(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\hat{\psi}_2(\xi)}{d\xi} = +\frac{1}{2}$$

La formule de dérivation en chaîne nous donne alors :

$$\frac{d\psi_1^K(x)}{dx} = -\frac{1}{h^K} \quad \text{et} \quad \frac{d\psi_2^K(x)}{dx} = +\frac{1}{h^K}$$

Les fonctions d’interpolation linéaires sur l’élément de référence  $\hat{K}$  et sur l’élément  $K$  sont illustrées aux figures 5.4 et 5.5.

### Approximation quadratique

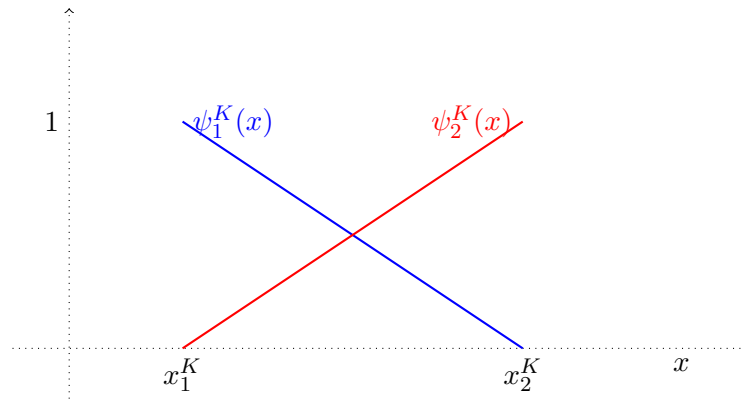
Pour une approximation quadratique, il faut 3 nœuds de calcul par élément (et encore un degré de liberté par nœud c.-à-d.  $n_c^K = n_d^K = 3$ ). On choisit d’abord les 2 extrémités de l’élément (les nœuds géométriques) et le troisième nœud est habituellement le point milieu  $\xi = 0$  de l’élément de référence, bien que ce ne soit absolument pas obligatoire. On a donc les nœuds d’interpolation  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = +1$  et  $\xi_3 = 0$ . Les fonctions  $\hat{\psi}_j(\xi)$  de Lagrange 5.11 de degré 2 sont alors :

$$\hat{\psi}_1(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

$$\hat{\psi}_2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{\xi(\xi + 1)}{2}$$

$$\hat{\psi}_3(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = 1 - \xi^2$$



Figure 5.5 – Fonctions d’interpolation linéaires sur  $K$ 

Ces fonctions sont illustrées à la figure 5.6 sur l’élément de référence et à la figure 5.7 sur l’élément réel. Pour évaluer le système élémentaire, on a encore ici besoin des dérivées que nous calculons une fois pour toutes :

$$\frac{d\hat{\psi}_1(\xi)}{d\xi} = \frac{(2\xi - 1)}{2}$$

$$\frac{d\hat{\psi}_2(\xi)}{d\xi} = \frac{(2\xi + 1)}{2}$$

$$\frac{d\hat{\psi}_3(\xi)}{d\xi} = -2\xi$$

La formule de dérivation en chaîne nous donne les dérivées des fonctions d’interpolation sur l’élément  $K$  :

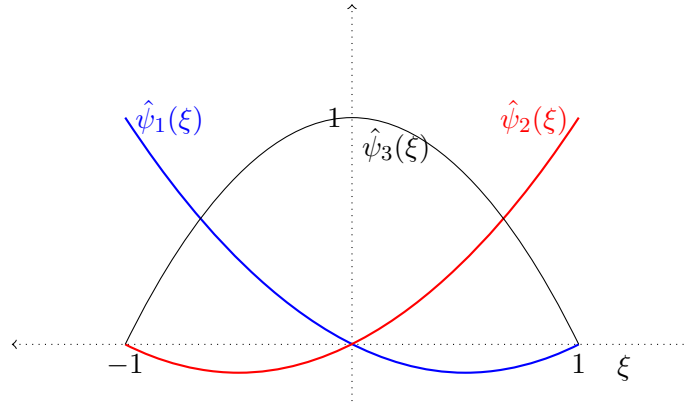
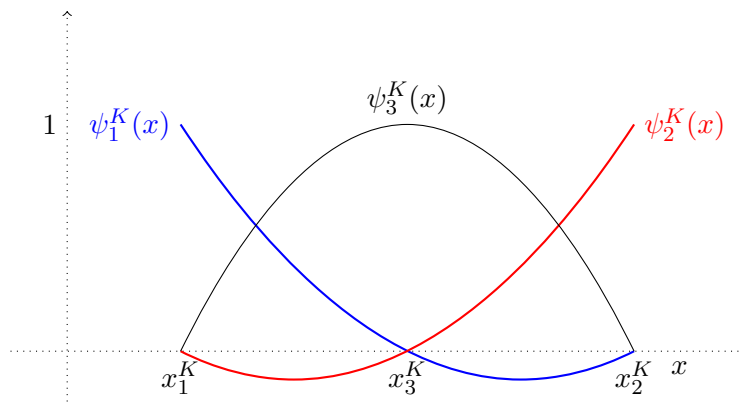
$$\frac{d\psi_1^K(x)}{dx} = \frac{(2\xi - 1)}{h^K}$$

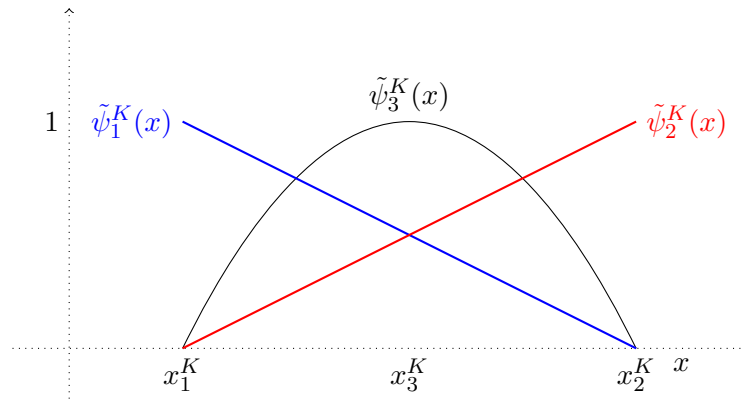
$$\frac{d\psi_2^K(x)}{dx} = \frac{(2\xi + 1)}{h^K}$$

$$\frac{d\psi_3^K(x)}{dx} = -\frac{4\xi}{h^K}$$

### Cas général

Il est maintenant facile de concevoir le cas général. Pour construire une approximation de degré quelconque  $m$ , il suffit de choisir sur l’élément de référence  $m + 1$  nœuds d’interpolation (incluant

Figure 5.6 – Fonctions d'interpolation quadratiques sur  $\hat{K}$ Figure 5.7 – Fonctions d'interpolation quadratiques sur  $K$

Figure 5.8 – Fonctions d’interpolation hiérarchiques sur  $K$ 

les extrémités de l’élément). On a ainsi  $n_c^K = m + 1$  nœuds de calcul et il suffit d’associer à chacun de ces nœuds une fonction d’interpolation de Lagrange  $\hat{\psi}_i(\xi)$  de degré  $m$ .

**Remarque 5.4.** Dans ce qui précède, nous avons utilisé des bases classiques (de Lagrange) de fonctions d’interpolation qui vérifient :

$$\psi_j^K(x_i^K) = \hat{\psi}_j(\xi_i) = I_i^j$$

Cette contrainte n’est nullement obligatoire et on peut concevoir des bases différentes. C’est le cas par exemple des bases dites *hiérarchiques*. Ce concept mérite qu’on s’y attarde puisque le choix de la base est important, non seulement pour l’implantation de la méthode mais aussi pour des considérations numériques relatives au conditionnement de la matrice du système global. L’idée de base en dimension 1 consiste à utiliser des fonctions d’interpolation linéaires pour les 2 extrémités de l’élément et une fonction d’interpolation quadratique pour le point-milieu tel qu’illustré à la figure 5.8. Il résulte généralement de ces bases une interprétation moins évidente de la valeur des degrés de liberté associés aux nœuds de calcul. Nous reviendrons plus tard sur ces bases particulières.

◀

### 5.1.6 Évaluation du système élémentaire

Nous pouvons dès maintenant évaluer tous les coefficients du système élémentaire 5.5. En effet, toutes les fonctions nécessaires sont maintenant connues et il reste à effectuer les diverses intégrales. Deux options s’offrent à nous : on peut intégrer analytiquement ou recourir à l’intégration numérique.

#### Intégration analytique

C’est souvent la meilleure solution mais elle n’est pas toujours simple. Dans le cas de polynômes de bas degré et si les propriétés physiques (les fonctions  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $r(x)$ ) sont simples (par exemple

constantes par élément), on choisira cette option. On obtient ainsi des expressions explicites pour les coefficients du système élémentaire. Ce travail peut devenir très pénible dans le cas général. Toutefois, on peut procéder de manière efficace en s'aidant de logiciels de calcul symbolique tels *Maple* ou *Mathematica*. Cette option est de plus en plus utilisée.

### Intégration numérique

C'est l'option la plus répandue et la plus versatile. Après le passage à l'élément de référence, les différents coefficients du système élémentaire requièrent l'évaluation d'intégrales de la forme :

$$I = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (5.12)$$

où la fonction  $g(\xi)$  fait intervenir les fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}_i(\xi)$  et les propriétés physiques du problème. Par exemple, on doit évaluer :

$$\int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) \frac{h^K}{2} d\xi$$

qui est bien de la forme 5.12. Dans la plupart des programmes d'éléments finis, on utilise les quadratures de Gauss-Legendre qui consistent à approcher l'intégrale 5.12 par une expression de la forme :

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \simeq \sum_{i=1}^{m_G} w_i g(\xi_i) \quad (5.13)$$

qui soit la plus précise possible. On présente un sommaire des techniques d'intégration numérique à l'annexe C. Le tableau C.1 résume quelques unes de ces quadratures en dimension 1. La dernière colonne de ce tableau fournit le degré des polynômes pour lesquels la quadrature de Gauss-Legendre est exacte et qui vaut  $2m_G - 1$ . C'est ce que l'on appelle le *degré de précision* de la formule de quadrature. En pratique, on choisit le nombre de points de Gauss-Legendre  $m_G$  en fonction des intégrales que l'on doit évaluer. Cela dépend donc du degré des fonctions  $\hat{\psi}_i(\xi)$  mais aussi des propriétés physiques. Par exemple, si la fonction  $p(x)$  est constante par élément ( $p(x) = p^K$  sur l'élément  $K$ ) et si des fonctions  $\hat{\psi}_i(\xi)$  quadratiques sont utilisées, alors on a :

$$\int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) \frac{h^K}{2} d\xi = \frac{p^K h^K}{2} \int_{-1}^1 \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi$$

La fonction à intégrer est de degré 4 (produit de 2 polynômes de degré 2) et une quadrature à 3 points ( $m_G = 3$ ) serait suffisante pour intégrer exactement. Par contre, des fonctions d'interpolation linéaires ne requéreraient qu'une quadrature de Gauss-Legendre à 2 points. Pour effectuer ce choix, il faut analyser toutes les intégrales apparaissant dans le système élémentaire et déterminer le degré de précision nécessaire.

Notons enfin que dans certaines situations, les quadratures de Gauss-Legendre ne seront jamais exactes. Par exemple, si  $p(x) = 1/x$ , la fonction à intégrer n'est plus polynomiale et les quadratures de Gauss-Legendre fournissent maintenant des approximations des coefficients du système élémentaire. Le choix du nombre de points de Gauss-Legendre  $m_G$  est alors plus délicat. Enfin, il convient

de souligner que le coût total de l'assemblage (voir la section 5.1.7) est proportionnel au nombre de points de Gauss-Legendre utilisés et que le choix de la quadrature doit aussi tenir compte de cette contrainte.

### Cas particuliers

Puisque dans plusieurs exemples, les fonctions  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $r(x)$  sont constantes par élément (et parfois même constantes dans tout le domaine), il est utile de calculer immédiatement et une fois pour toutes le système élémentaire dans ce cas particulier. On notera  $p^K$ ,  $q^K$  et  $r^K$  les valeurs respectives de ces fonctions sur l'élément  $K$ . Nous supposons de plus que le relèvement  $u_g(x)$  des conditions aux limites essentielles est nul. Les différentes contributions au système élémentaire sont alors :

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \frac{h^K p^K}{2} \int_{-1}^1 \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi + \frac{2q^K}{h^K} \int_{-1}^1 \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi} d\xi \\ f_i^K &= \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 r \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi = \frac{h^K r^K}{2} \int_{-1}^1 \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\ s_i^K &= s_{11}^K \hat{\psi}_i(-1) + s_{12}^K \hat{\psi}_i(1) \end{aligned}$$

#### — Interpolation linéaire

Si on utilise des fonctions d'interpolation linéaires, on remarque que les coefficients de la matrice élémentaire sont très faciles à calculer puisque l'intégrand est alors un polynôme de degré maximum 2. On peut les évaluer analytiquement en notant toutefois au passage qu'une quadrature de Gauss-Legendre à 2 points donnerait le même résultat. On obtient ainsi :

$$A^K = \frac{h^K p^K}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{q^K}{h^K} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Quant au membre de droite, l'intégrand est linéaire et une formule de Gauss-Legendre à 1 point suffirait. On a :

$$F^K + S^K = \frac{h^K r^K}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

#### — Interpolation quadratique

Si on utilise des fonctions d'interpolation quadratiques, les coefficients de la matrice élémentaire résultent en des intégrands de degré maximum 4. On peut encore les évaluer analytiquement mais une quadrature de Gauss-Legendre à 3 points donnerait le même résultat. On obtient ainsi :

$$A^K = \frac{h^K p^K}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} + \frac{q^K}{3h^K} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

En ce qui concerne le membre de droite, l'intégrant est quadratique et une formule de Gauss-Legendre à 2 points suffirait. On a :

$$F^K + S^K = \frac{h^K r^K}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Ces systèmes élémentaires reviennent fréquemment dans les exemples et les exercices de telle sorte qu'on y référera aux moments opportuns. Il importe cependant de bien comprendre comment on les obtient. Notons enfin que dans le cas où les fonctions  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $r(x)$  ne sont plus constantes par élément, les équations 5.14 à 5.17 ne sont plus valides.

### 5.1.7 Assemblage

L'étape de l'assemblage consiste à prendre en compte les contributions de tous les systèmes élémentaires pour construire un système linéaire global que l'on devra résoudre tout comme on l'a fait pour la méthode de Ritz. La clé de l'assemblage est le tableau d'adressage des degrés de liberté *adres* qui permet de passer du système élémentaire local (sur un élément  $K$ ) au système global (sur tout le domaine  $\Omega$ ) en fonction de la numérotation des degrés de liberté. Avant de procéder à l'assemblage comme tel, nous établissons le lien entre la méthode de Ritz et celle des éléments finis en montrant comment cette méthode permet une construction automatique des fonctions de Ritz.

#### Construction des fonctions de Ritz

On associe une fonction de Ritz à chaque degré de liberté du domaine. C'est donc le tableau *adres* qui permet de construire les fonctions de Ritz sur tout le domaine  $\Omega$ . Pour ce faire, regardons ce qui se produit pour chacun des *nddl* degrés de liberté du domaine. Deux situations peuvent survenir suivant que le degré de liberté est commun ou non à plusieurs éléments.

La situation la plus simple est celle où le degré de liberté  $i$  étudié ( $0 \leq i \leq nddl$ ) n'appartient qu'à un seul élément  $K$ . Le numéro  $i$  n'apparaît donc qu'une seule fois dans le tableau d'adressage à la ligne  $K$  ( $K$  désigne à la fois l'élément lui-même et son numéro). Le tableau *adres* nous indique à quel degré de liberté de l'élément  $K$ . Supposons donc que ce  $i^{\text{ième}}$  degré de liberté du domaine soit le  $k^{\text{ième}}$  degré de liberté ( $1 \leq k \leq n_d^K$ ) de l'élément  $K$  c.-à-d.

$$adres(K, k) = i$$

Sur  $K$ , ce degré de liberté est associé à une fonction d'interpolation  $\psi_k^K(x)$ . Cette fonction d'interpolation n'est définie que dans l'élément  $K$  et peut être prolongée par 0 à l'extérieur de  $K$ . La fonction ainsi obtenue est la fonction de Ritz associée à ce degré de liberté qui correspond globalement à la  $i^e$  fonction de Ritz du domaine. Notons immédiatement que le *support* de cette fonction de Ritz se réduit au seul élément  $K$  et on a :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \psi_k^K(x) & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Supposons maintenant que le  $j^{\text{ième}}$  degré de liberté (pour un certain  $j$  compris entre 1 et *nddl*) du domaine soit commun à 2 éléments. Un degré de liberté peut être commun à plus de 2 éléments

et le raisonnement qui suit se généralise facilement. La fonction de Ritz associée est constituée de 2 parties. Notons  $K_1$  et  $K_2$  les 2 éléments en question. Le numéro  $j$  apparaît donc uniquement aux lignes  $K_1$  et  $K_2$  du tableau d'adressage. Sur le premier élément, le degré de liberté  $j$  peut correspondre au  $k_1^{\text{ième}}$  degré de liberté de l'élément  $K_1$  et au  $k_2^{\text{ième}}$  degré de liberté de l'élément  $K_2$  ( $1 \leq k_1, k_2 \leq n_d^K$ ). On a donc  $adres(K_1, k_1) = adres(K_2, k_2) = j$ . La fonction de Ritz associée sera donc définie par :

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \psi_{k_1}^{K_1}(x) & \text{si } x \in K_1 \\ \psi_{k_2}^{K_2}(x) & \text{si } x \in K_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Notons en terminant que le support de cette fonction de Ritz se réduit aux 2 éléments  $K_1$  et  $K_2$ .

**Exemple 5.5.** Considérons un maillage de 3 éléments tel qu'illustré à la figure 5.9. Nous supposons de plus que les fonctions d'interpolation sont linéaires et qu'il n'y a qu'un seul degré de liberté par nœud de calcul ( $n_c^K = n_g^K = n_d^K = 2$ ). Pour simplifier la présentation, nous supposons que :

$$numer(j) = j \quad j = 1, 2, 3, \dots, nddl$$

de sorte que les tableaux *connec* et *adres* coïncident, ce qui revient à dire qu'aucune variable essentielle n'est imposée. Il en résulte le tableau d'adressage :

Numéros des ddl		
Tableau <i>adres</i>		
Élément	Ddl #1	Ddl #2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Il y a donc au total 4 degrés de liberté ( $nddl = 4$ ) et la figure 5.9 présente les 4 fonctions de Ritz qui y sont associées. Les fonctions  $\phi_1(x)$  et  $\phi_4(x)$  ne sont non nulles que respectivement sur les éléments  $K_1$  et  $K_3$ . Partout ailleurs, elles sont nulles. On remarque de plus que ces numéros (1 et 4) n'apparaissent respectivement dans le tableau d'adressage qu'aux lignes 1 et 3 respectivement, correspondant aux éléments 1 et 3. Puisque  $adres(1, 1) = 1$  et  $adres(3, 2) = 4$ , on a :

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \psi_1^{K_1}(x) & \text{si } x \in K_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et :

$$\phi_4(x) = \begin{cases} \psi_2^{K_3}(x) & \text{si } x \in K_3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

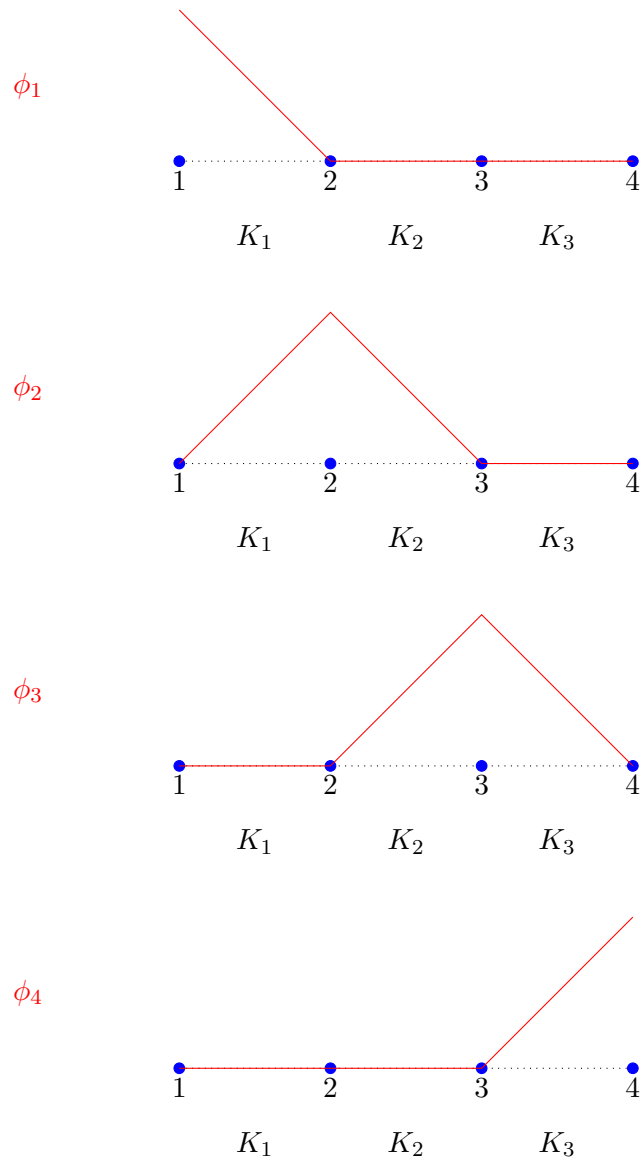


Figure 5.9 – Fonctions de Ritz linéaires par élément



Par contre, la fonction  $\phi_2(x)$  est à cheval sur les éléments 1 et 2. On remarque alors que  $adres(1, 2) = adres(2, 1) = 2$ . On a dans ce cas :

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \psi_2^{K_1}(x) & \text{si } x \in K_1 \\ \psi_1^{K_2}(x) & \text{si } x \in K_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

De même, puisque  $adres(2, 2) = adres(3, 1) = 3$

$$\phi_3(x) = \begin{cases} \psi_2^{K_2}(x) & \text{si } x \in K_2 \\ \psi_1^{K_3}(x) & \text{si } x \in K_3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

◆

**Exemple 5.6.** Sur le même maillage de 3 éléments de la figure 5.9 et en faisant les mêmes hypothèses concernant la numérotation des degrés de liberté, on considère cette fois des fonctions d'interpolation quadratiques ( $n_c^K = n_d^K = 3$ ,  $n_g^K = 2$ ). Ici encore, on a numéroté les degrés de liberté du domaine tout simplement de gauche à droite. Les tableaux de connectivité *connec* et *adres* sont alors les mêmes :

Numéros des ddl			
Tableau <i>adres</i>			
Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3
1	1	3	2
2	3	5	4
3	5	7	6

Il y a donc au total 7 degrés de liberté ( $n_{ddl} = 7$ ) et la figure 5.10 présente les 7 fonctions de Ritz qui y sont associées. On remarque que ces fonctions sont maintenant quadratiques (au lieu de linéaires) sur les éléments qui constituent leur support. Partout ailleurs, elles sont nulles. Par exemple, puisque  $adres(1, 3) = 2$ , on a :

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \psi_3^{K_1}(x) & \text{si } x \in K_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et puisque  $adres(2, 2) = adres(3, 1) = 5$  :

$$\phi_5(x) = \begin{cases} \psi_2^{K_2}(x) & \text{si } x \in K_2 \\ \psi_1^{K_3}(x) & \text{si } x \in K_3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

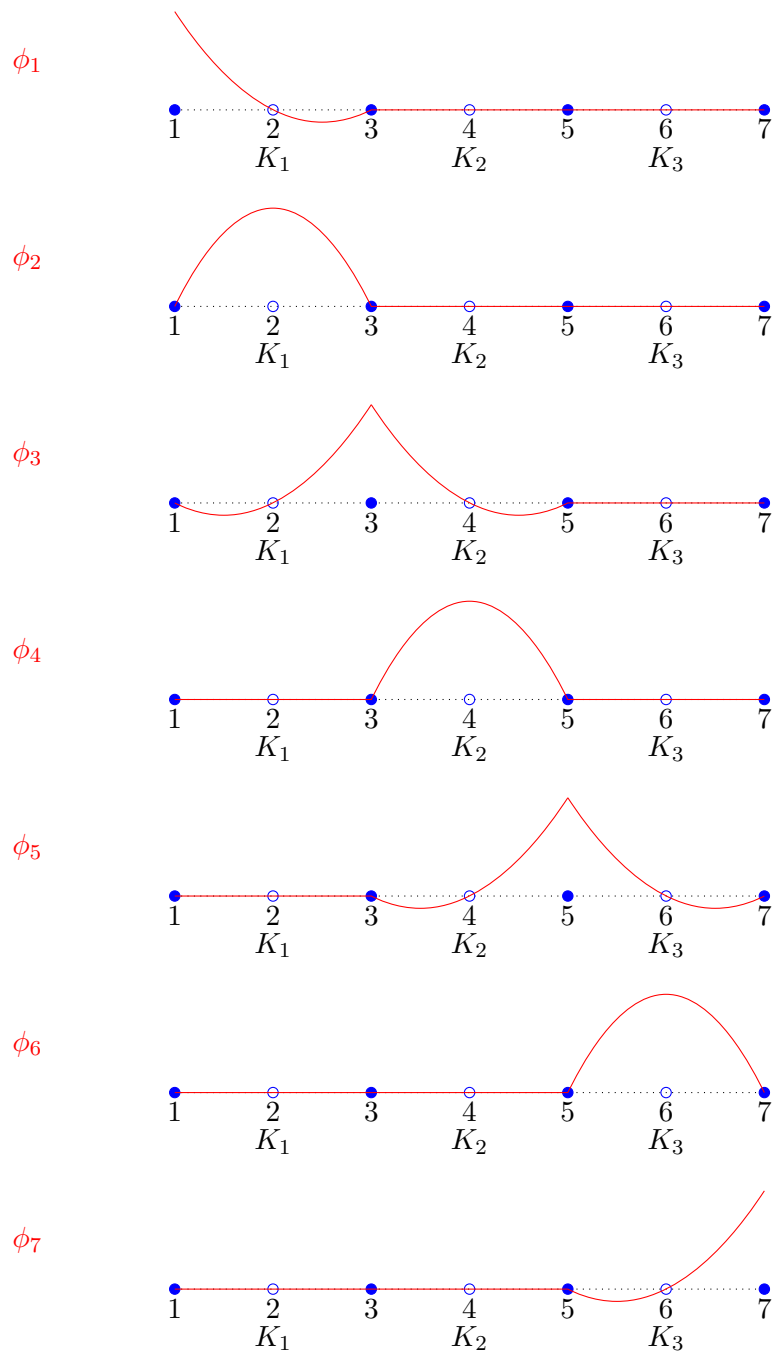


Figure 5.10 – Fonctions de Ritz quadratiques par élément

Il en va de manière similaire pour les autres fonctions de Ritz. ♦

**Remarque 5.7.** Notons enfin, et cela est fondamental, que le support des fonctions de Ritz se réduit à très peu d'éléments. Ainsi, pour obtenir les coefficients du système linéaire global de la méthode de Ritz  $a(\phi_j, \phi_i)$ , il n'est pas nécessaire d'intégrer sur tout le domaine puisque le support des fonctions  $\phi_i(x)$  est très réduit. De plus, l'intersection des supports des fonctions  $\phi_i(x)$  et  $\phi_j(x)$  est parfois nul ce qui entraîne que  $a(\phi_j, \phi_i) = 0$ . L'intégration ne porte donc que sur l'intersection des supports des fonctions  $\phi_i(x)$  et  $\phi_j(x)$ . Il en résulte une structure matricielle très particulière pour le système linéaire global. On parle alors de *matrice creuse* signifiant ainsi que la matrice obtenue contient une part importante de zéros. On profitera éventuellement de cette structure pour diminuer l'espace-mémoire requis en ne conservant que les termes non nuls. Nous reviendrons sur cette question un peu plus loin. ◀

Mais comment s'y retrouver pour éviter des calculs inutiles ? C'est encore le tableau d'adressage qui nous guide. Il suffit en effet de calculer les systèmes élémentaires sur chaque élément et le tableau d'adressage nous indique à quel endroit apporter cette contribution dans le système global.

### Construction du système global

À partir des systèmes élémentaires sur chaque élément  $K$ , on construit un système d'équations linéaires global qui tient compte des contributions de chaque degré de liberté de chaque élément. La matrice globale sera notée  $A$  (et ses coefficients  $a_{ij}$ ). Rappelons que le vecteur global des degrés de liberté est noté  $U$  (et ses coefficients  $u_i$ ). Le terme de droite sera encore constitué de 2 parties  $F$  et  $S$  (de coefficients respectifs  $f_i$  et  $s_i$ ). Pour saisir comment s'y prendre, il suffit de remarquer que pour notre problème type :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a(\phi_j(x), \phi_i(x)) = \int_0^L \left( p(x)\phi_j(x)\phi_i(x) + q(x)\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx} \right) dx \\ &= \sum_{K=1}^{nel} \int_K \left( p(x)\phi_j(x)|_K \phi_i(x)|_K + q(x)\frac{d\phi_j}{dx}\Big|_K \frac{d\phi_i}{dx}\Big|_K dx \right) \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà souligné, la dernière somme ne porte que sur les éléments faisant partie du support à la fois de la fonction  $\phi_i(x)$  et de la fonction  $\phi_j(x)$ . Sur le plan pratique, cela signifie que les numéros  $i$  et  $j$  apparaissent tous les deux à la ligne du tableau *adres* correspondant à ces éléments. Soit donc  $K^*$  l'un de ces éléments. Les degrés de liberté  $i$  et  $j$  apparaissent forcément dans le vecteur d'adressage de cet élément (la  $K^{*e}$  ligne du tableau *adres*). On aura par exemple que  $adres(K^*, k_1) = i$  et  $adres(K^*, k_2) = j$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont des nombres compris entre 1 et  $n_d^K$ . On a alors :

$$\begin{aligned} &\int_{K^*} \left( p(x)\phi_j(x)|_{K^*} \phi_i(x)|_{K^*} + q(x)\frac{d\phi_j}{dx}\Big|_{K^*} \frac{d\phi_i}{dx}\Big|_{K^*} \right) dx \\ &= \int_{K^*} \left( p(x)\psi_{k_2}^{K^*}(x)\psi_{k_1}^{K^*}(x) + q(x)\frac{d\psi_{k_2}^{K^*}}{dx}\frac{d\psi_{k_1}^{K^*}}{dx} \right) dx \\ &= a_{k_1 k_2}^{K^*} \end{aligned}$$

On ajoute ce dernier coefficient au terme  $a_{ij}$  du système global et on fera de même pour tous les éléments dont le vecteur d'adressage contient à la fois les numéros  $i$  et  $j$ . On constate donc que chaque coefficient de la matrice élémentaire apporte une contribution au système linéaire global et qu'il suffit de sommer les contributions de chaque système élémentaire.

### Assemblage des matrices élémentaires

En pratique, la procédure d'assemblage requiert de suivre le chemin inverse de celui que nous venons de décrire et de partir du système élémentaire sur chaque élément  $K$  :

$$A^K \delta_U^K = F^K + S^K$$

ou plus explicitement :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^K & a_{12}^K & \cdots & a_{1n_d}^K \\ a_{21}^K & a_{22}^K & \cdots & a_{2n_d}^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_d 1}^K & a_{n_d 2}^K & \cdots & a_{n_d n_d}^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^K \\ \delta_{u_2}^K \\ \vdots \\ \delta_{u_{n_d}}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^K \\ f_2^K \\ \vdots \\ f_{n_d}^K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considérons l'élément  $a_{k_1 k_2}^K$  de ce système élémentaire. Le tableau d'adressage nous indique par exemple que  $adres(K, k_1) = i$  et que  $adres(K, k_2) = j$ . On a alors :

$$\begin{aligned} a_{k_1 k_2}^K &= \int_K \left( p(x) \psi_{k_2}^K(x) \psi_{k_1}^K(x) + q(x) \frac{d\psi_{k_2}^K}{dx} \frac{d\psi_{k_1}^K}{dx} \right) dx \\ &= \int_K \left( p(x) \phi_j(x)|_K \phi_i(x)|_K + q(x) \frac{d\phi_j}{dx} \Big|_K \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_K \right) dx \end{aligned}$$

et que cette contribution doit être ajoutée au coefficient  $a_{ij}$  du système global.

$$A \delta_U = F + S$$

De même, on ajoute les coefficients locaux  $f_{k_1}^K$  et  $s_{k_1}^K$  aux coefficients globaux  $f_i$  et  $s_i$ .

De toute la discussion qui précède, on conclut que l'on construit la matrice  $A$  et les vecteurs  $F$  et  $S$  de la manière suivante, qui constitue l'assemblage :

- Initialisation à 0 de la matrice  $A$  et des vecteurs  $F$  et  $S$  ;
- Pour chaque élément  $K$  ;
  - Pour chaque degré de liberté  $k_1 = 1, 2, \dots, n_d^K$  ;
    - Numéro de la ligne :  $i = adres(K, k_1)$
    - $f_i \leftarrow f_i + f_{k_1}^K$
    - $s_i \leftarrow s_i + s_{k_1}^K$
  - Pour chaque degré de liberté  $k_2 = 1, 2, \dots, n_d^K$  ;
    - Numéro de la colonne :  $j = adres(K, k_2)$
    - $a_{ij} \leftarrow a_{ij} + a_{k_1 k_2}^K$

- Fin de la boucle sur les colonnes
- Fin de la boucle sur les lignes
- Fin de la boucle sur les éléments

**Remarque 5.8.** Il est concevable de construire des tableaux d'adressage différents pour les lignes et les colonnes d'une matrice. On rencontre cette situation notamment dans les problèmes ayant plusieurs inconnues. On peut ainsi assembler des matrices rectangulaires si nécessaire. ◀

**Exemple 5.9.** Considérons une fois encore le maillage très simple de 3 éléments quadratiques de la figure 5.3. On trouve le tableau d'adressage à la page 80. Le système global sera de dimension 7 sur 7. Pour le construire, on va assembler les 3 systèmes élémentaires de dimension 3 de la forme :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^K & a_{12}^K & a_{13}^K \\ a_{21}^K & a_{22}^K & a_{23}^K \\ a_{31}^K & a_{32}^K & a_{33}^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^K \\ \delta_{u_2}^K \\ \delta_{u_3}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^K \\ f_2^K \\ f_3^K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'adressage du premier élément  $K_1$  est  $[7, 2, 1]$ . Cela signifie que les inconnues élémentaires  $u_1^{K_1}$ ,  $u_2^{K_1}$  et  $u_3^{K_1}$  correspondent aux degrés de liberté  $u_7$ ,  $u_2$  et  $u_1$  du système global. Le système élémentaire est donc équivalent à :

$$\begin{bmatrix} a_{33}^{K_1} & a_{32}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_1} \\ a_{23}^{K_1} & a_{22}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21}^{K_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13}^{K_1} & a_{12}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{K_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ \delta_{u_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3^{K_1} \\ f_2^{K_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^{K_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s_{12}^{K_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_{11}^{K_1} \end{bmatrix}$$

qui n'est qu'une réécriture différente du système élémentaire. Une façon systématique de s'y retrouver consiste à écrire le système élémentaire sous la forme :

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} & 7 & 2 & 1 \\ \hline 7 & a_{11}^{K_1} & a_{12}^{K_1} & a_{13}^{K_1} \\ 2 & a_{21}^{K_1} & a_{22}^{K_1} & a_{23}^{K_1} \\ 1 & a_{31}^{K_1} & a_{32}^{K_1} & a_{33}^{K_1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_1} \\ \delta_{u_2}^{K_1} \\ \delta_{u_3}^{K_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{K_1} \\ f_2^{K_1} \\ f_3^{K_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^{K_1} \\ s_{12}^{K_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où on a simplement ajouté devant les lignes et au dessus des colonnes le vecteur d'adressage du premier élément (la première ligne du tableau *adres*). Pour connaître l'adresse dans le système global d'un coefficient du système élémentaire, il suffit de regarder le vecteur d'adressage de la ligne et/ou de la colonne. Ainsi, le coefficient  $a_{21}^{K_1}$  du système élémentaire apportera sa contribution au coefficient  $a_{27}$  du système global. De même, les coefficients  $f_1^{K_1}$  et  $s_{11}^{K_1}$  seront ajoutés aux coefficients  $f_7$  et  $s_7$  du vecteur des sollicitations global.

Pour le deuxième élément dont le vecteur d'adressage est  $[2, 4, 3]$ , un raisonnement similaire nous permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} & 2 & 4 & 3 \\ 2 & a_{11}^{K_2} & a_{12}^{K_2} & a_{13}^{K_2} \\ 4 & a_{21}^{K_2} & a_{22}^{K_2} & a_{23}^{K_2} \\ 3 & a_{31}^{K_2} & a_{32}^{K_2} & a_{33}^{K_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_2} \\ \delta_{u_2}^{K_2} \\ \delta_{u_3}^{K_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{K_2} \\ f_2^{K_2} \\ f_3^{K_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^{K_2} \\ s_{12}^{K_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui devient :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{K_2} & a_{13}^{K_2} & a_{12}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31}^{K_2} & a_{33}^{K_2} & a_{32}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^{K_2} & a_{23}^{K_2} & a_{22}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ \delta_{u_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^{K_2} \\ f_3^{K_2} \\ f_2^{K_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s_{11}^{K_2} \\ 0 \\ s_{12}^{K_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour le dernier élément, dont le vecteur d'adressage est [4, 6, 5], on obtient :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}^{K_3} & a_{13}^{K_3} & a_{12}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_3} & a_{33}^{K_3} & a_{32}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21}^{K_3} & a_{23}^{K_3} & a_{22}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ \delta_{u_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^{K_3} \\ f_3^{K_3} \\ f_2^{K_3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_{11}^{K_3} \\ 0 \\ s_{12}^{K_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système global est alors obtenu en sommant toutes les contributions :

$$\begin{bmatrix} a_{33}^{K_1} & a_{32}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_1} \\ a_{23}^{K_1} & a_{22}^{K_1} + a_{11}^{K_2} & a_{13}^{K_2} & a_{12}^{K_2} & 0 & 0 & a_{21}^{K_1} \\ 0 & a_{31}^{K_2} & a_{33}^{K_2} & a_{32}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^{K_2} & a_{23}^{K_2} & a_{22}^{K_2} + a_{11}^{K_3} & a_{13}^{K_3} & a_{12}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_3} & a_{33}^{K_3} & a_{32}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21}^{K_3} & a_{23}^{K_3} & a_{22}^{K_3} & 0 \\ a_{13}^{K_1} & a_{12}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{K_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ \delta_{u_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3^{K_1} \\ f_2^{K_1} + f_1^{K_2} \\ f_3^{K_2} \\ f_2^{K_2} + f_1^{K_3} \\ f_3^{K_3} \\ f_2^{K_3} \\ f_1^{K_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s_{12}^{K_1} + s_{11}^{K_2} \\ 0 \\ s_{12}^{K_2} + s_{11}^{K_3} \\ 0 \\ s_{12}^{K_3} \\ s_{11}^{K_1} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

◆

**Remarque 5.10.** Il est évident que seul ce dernier système de dimension  $nddl$  sur  $nddl$  est explicitement construit. On ne construit pas un tel système pour chaque élément pour ensuite les additionner comme nous l'avons fait. Cela nécessiterait une quantité de mémoire phénoménale et nous ne l'avons fait que pour illustrer le processus d'assemblage. On additionne les contributions de chaque système élémentaire directement dans le système 5.18 à l'adresse fournie par le vecteur d'adressage de chaque élément. ◀

### 5.1.8 Imposition des conditions aux limites

On impose les conditions en deux étapes suivant que l'on traite les conditions essentielles (variables primaires) ou les conditions naturelles (variables secondaires). Une fois le système global assemblé, il prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_U^I \\ \delta_U^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^C \\ F_2^C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^C \\ S^I \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

La partition de la matrice  $A$  suit directement celle du vecteur global des degrés de liberté  $U$ . On note au passage que les matrices  $M_{11}$  et  $M_{22}$  sont carrées et que les matrices  $M_{12}$  et  $M_{21}$  sont généralement rectangulaires. Si la forme bilinéaire du problème est symétrique, on a  $M_{12}^T = M_{21}$ .

Il y a en fait deux vecteurs inconnus dans ce système :  $\delta_U^I$  et  $S^I$ . Le premier correspond aux variables primaires du problème qui ne sont pas imposées par des conditions de Dirichlet. Le second ( $S^I$ ) correspond aux variables secondaires associées aux nœuds de la frontière où les conditions de Dirichlet sont imposées. Rappelons que là où on connaît la variable primaire, on ne connaît pas la variable secondaire et vice versa. Le vecteur  $S^I$  est connu aussi sous le nom de vecteur des réactions nodales.

Il ne reste plus qu'à résoudre. Il y a plusieurs façons de procéder et nous en favoriserons une qui a le mérite d'être simple et assez générale. Nous reviendrons sur ce point pour les problèmes en grandes déformations.

La formulation précédente, dite en corrections, présuppose que nous avons relevé les conditions aux limites essentielles (conditions de Dirichlet) à l'aide d'une fonction  $u_g(x)$ . La fonction  $u_g(x)$  peut être vue comme une première approximation de la solution  $u(x)$ . Ce point de vue sera particulièrement utile dans les problèmes non linéaires du chapitre 8. On a donc :

$$\delta_u(x) = u(x) - u_g(x)$$

et si la fonction  $u_g$  satisfait les bonnes conditions aux limites essentielles, on voit immédiatement que  $\delta_u$  s'annulera partout où de telles conditions sont imposées et par conséquent, le vecteur  $\delta_U^C$  sera nul. Dans notre problème type 5.1, il n'y a qu'un nœud où l'on impose des conditions de Dirichlet (en  $x = 0$ ,  $u(0) = c$ ). Si  $u_g(0) = c$ , on constate que  $\delta_u(0) = 0$ . Nous verrons à la remarque 5.11 que ce n'est pas obligatoire de procéder ainsi.

Supposons donc pour le moment que le relèvement  $u_g$  satisfait les conditions essentielles exactes et donc que le vecteur  $\delta_U^C$  s'annule. Il ne reste qu'à analyser le terme de droite composé de 2 parties. Le vecteur  $F$  est entièrement déterminé et ne pose aucun problème. Par contre, le vecteur  $S$  contenant la contribution des variables secondaires est lui aussi décomposé en 2 parties. Là où la variable essentielle est imposée (et donc connue), nous avons vu que la condition naturelle est inconnue et vice versa. La situation est donc claire aux 2 extrémités du domaine.

Il reste à regarder ce qui se passe aux frontières entre les éléments. Typiquement, si le degré de liberté  $i$  du domaine est attaché à un nœud  $x$  à la frontière entre 2 éléments  $K_-$  et  $K_+$ , le vecteur  $S$  contiendra à la  $i^{\text{ième}}$  ligne une expression de la forme :

$$s_i = s_{12}^{K_-} + s_{11}^{K_+}$$

De la définition même de ces variables, on a :

$$s_i = q(x^-) \frac{du}{dx}(x^-) - q(x^+) \frac{du}{dx}(x^+)$$

ce qui signifie que  $s_i$  est le saut de la variable naturelle (secondaire) :

$$-q(x) \frac{du}{dx}(x)$$

au nœud  $x$ . Les indices  $-$  et  $+$  réfèrent aux valeurs à gauche (prise dans l'élément  $K_-$ ) et à droite (prise dans l'élément  $K_+$ ) de la variable en  $x$ . Or si ce saut était différent de 0, le terme de droite de l'équation différentielle 5.1 ferait apparaître une distribution de Dirac  $H\delta_x$ . On utilise fréquemment les distributions de Dirac pour modéliser une charge ponctuelle d'intensité  $H$ . Si tel est le cas, c'est au moment de l'imposition des conditions naturelles à ce nœud que l'on prend en compte la contribution de cette charge ponctuelle et on pose :

$$s_i = s_{12}^{K_-} + s_{11}^{K_+} = H$$

Sinon, on pose simplement  $s_i = 0$ .

### 5.1.9 Solution du système global

Pour la résolution du système linéaire, 2 autres étapes sont nécessaires. Tout d'abord, on détermine le vecteur  $U^I$  en résolvant le système linéaire :

$$M_{11}\delta_U^I = F_1^C + S_1^C \quad (5.20)$$

qui n'est qu'une réécriture de la première équation du système 5.19. On remarque que le terme de droite est entièrement connu. Pour cela, on utilise les techniques classiques comme la méthode de décomposition  $LU$ . Remarquons que cette équation n'est rien d'autre que la discrétisation de la forme variationnelle :

$$a(\delta_u, w) = l(w) - a(u_g, w)$$

Une fois le vecteur  $U^I$  calculé, on détermine si nécessaire le vecteur  $S^I$  directement en posant :

$$S^I = M_{21}\delta_U^I - F_2^C \quad (5.21)$$

et on obtient ainsi les réactions nodales. On remarque enfin que les sous-matrices  $M_{12}$  et  $M_{22}$  ne jouent aucun rôle et pourraient tout simplement ne pas être assemblées.



**Remarque 5.11.** On pourrait aussi procéder d'une seule traite en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & -I \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_U^I \\ \delta_U^C \\ S^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^C + S^C \\ F_2^C \\ -(u - u_g) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Ici encore, si  $u_g$  satisfait les bonnes conditions aux limites essentielles,  $u - u_g$  s'annule de même que le vecteur  $\delta_U^C$ . Le système 5.22 est alors totalement équivalent au système 5.19. La formulation 5.22 possède un certain nombre d'avantages. D'une part, la matrice globale demeure symétrique si la matrice du système 5.19 l'était. Il s'agit là d'un point important, en particulier si on emploie des méthodes itératives pour la résolution. Enfin, on obtient automatiquement les réactions nodales.

◀

**Exemple 5.12.** Nous sommes en mesure de compléter l'exemple illustré à la figure 5.3 qui nous a mené au système linéaire 5.18. Imposons d'abord les conditions aux limites. D'une part, le seul degré de liberté qui est fixé est le septième. À cet endroit,  $u(0) = c$ , ce qui entraîne que  $u_7 = c$  (et donc  $\delta_{u_7} = 0$ ). On peut donc partitionner le système 5.18 sous la forme :

$$\begin{bmatrix} a_{33}^{K_1} & a_{32}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_1} \\ a_{23}^{K_1} & a_{22}^{K_1} + a_{11}^{K_2} & a_{13}^{K_2} & a_{12}^{K_2} & 0 & 0 & a_{21}^{K_1} \\ 0 & a_{31}^{K_2} & a_{33}^{K_2} & a_{32}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^{K_2} & a_{23}^{K_2} & a_{22}^{K_2} + a_{11}^{K_3} & a_{13}^{K_3} & a_{12}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_3} & a_{33}^{K_3} & a_{32}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21}^{K_3} & a_{23}^{K_3} & a_{22}^{K_3} & 0 \\ \hline a_{13}^{K_1} & a_{12}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{K_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} f_3^{K_1} \\ f_2^{K_1} + f_1^{K_2} \\ f_3^{K_2} \\ f_2^{K_2} + f_1^{K_3} \\ f_3^{K_3} \\ f_2^{K_3} \\ \hline f_1^{K_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s_{12}^{K_1} + s_{11}^{K_2} \\ 0 \\ s_{12}^{K_2} + s_{11}^{K_3} \\ 0 \\ s_{12}^{K_3} \\ \hline s_{11}^{K_1} \end{bmatrix}$$

où nous avons explicité la forme 5.19. On peut dès lors visualiser les matrices  $M_{ij}$  de même que les partitions des vecteurs  $\delta_U$ ,  $F$  et  $S$ .

D'autre part, on souhaite imposer une condition naturelle en  $x = 1$  de la forme :

$$q(1) \frac{du}{dx}(1) = d$$

ce qui revient à poser  $s_{12}^{K_3} = d$ . À l'autre extrémité, la condition naturelle est inconnue et donc  $s_{11}^{K_1}$  l'est aussi. De plus, puisqu'il n'y a aucune charge ponctuelle d'imposée, on a :

$$s_{12}^{K_1} + s_{11}^{K_2} = s_{12}^{K_2} + s_{11}^{K_3} = 0$$

On en déduit que :

$$S^I = [s_{11}^{K_1}]$$

et :

$$\delta_U^I = \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \end{bmatrix} \quad S^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Le relèvement des conditions aux limites est :

$$U^g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

On remarque immédiatement que le système est bien de la forme 5.19. La matrice  $M_{11}$  est de dimension 6 sur 6, la matrice  $M_{22}$  est de dimension 1 sur 1 et les matrices  $M_{12}$  et  $M_{21}$  de dimension 6 par 1 et 1 par 6 respectivement. La résolution est alors immédiate en se servant des relations 5.20 et 5.21, pourvu que l'on donne des valeurs précises à  $c$  et  $d$ .

Une fois le système résolu, la solution est  $u(x) = u_g(x) + \delta_u(x)$  qui sous forme vectorielle devient :

$$U = U^g + \delta_U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ c \end{bmatrix}$$



**Remarque 5.13.** Dans cet exemple, la matrice  $M_{11}$  possède une structure bien particulière. On remarque en effet que les coefficients non nuls sont concentrés le long des diagonales principales. Lorsque l'on s'éloigne des diagonales principales, les coefficients de la matrice sont nuls et on parle de *matrice bande* ou de *matrice en ligne de ciel*. Cela est dû à la numérotation initiale des degrés de liberté du domaine (voir la figure 5.3) qui met en relation (via le tableau d'adressage) un degré de liberté seulement avec les degrés de liberté adjacents. Une numérotation aléatoire des degrés de liberté aurait pour conséquence l'obtention d'une matrice pleine où les coefficients non nuls sont éparpillés dans toute la matrice. Il est important de profiter de cette structure particulière et de s'assurer que la numérotation des degrés de liberté minimise l'éparpillement des coefficients à l'intérieur de la matrice. Il existe plusieurs façons de faire et nous y reviendrons plus loin puisque cela prend toute son importance en dimension supérieure à 1. Notons enfin que cette renumérotation éventuelle n'a d'effets que sur le tableau *numer* (et par conséquent sur le tableau d'adressage *adres*) et que toute la procédure précédemment décrite reste inchangée. ◀

### 5.1.10 Présentation des résultats

La présentation des résultats est une opération importante mais qui n'a que peu de rapport avec la méthode des éléments finis en tant que telle. De nombreux logiciels commerciaux existent et permettent de présenter les résultats de façon claire et précise. La méthode des éléments finis et les méthodes numériques en général produisent des quantités impressionnantes de données que l'on souhaite interpréter. Si ce problème est relativement facile à surmonter en dimension 1, il en est tout autrement en dimension 2 ou 3.

Il convient toutefois de mentionner comment évaluer la solution calculée (et éventuellement ses dérivées si nécessaire) dans le but d'en faire un graphique.

- Pour chaque élément  $K$  ;
  - Lire la ligne  $K$  du tableau d'adressage ;
  - En déduire le vecteur  $U^K$  des inconnues élémentaires  $u_i^K$  ;
  - Pour chaque point  $x$  où on veut évaluer  $u^K$  ;
    - Sur l'élément de référence :  $\xi = \frac{2x - (x_1^K + x_2^K)}{h^K}$
  - $u^K(x) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_j^K \hat{\psi}_j(\xi)$  et  $\frac{du^K}{dx}(x) = \frac{2}{h^K} \sum_{j=1}^{n_d^K} u_j^K \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi}(\xi)$
- Fin de la boucle sur les éléments

### 5.1.11 Exemples et applications

Il est temps de s'attaquer à un exemple complet. Nous reviendrons donc sur les différentes étapes introduites jusqu'à maintenant et nous effectuerons une résolution complète.

**Exemple 5.14.** On considère la déflexion d'un câble de longueur 5m en tension entre 2 points d'attache tel qu'illustré à la figure 5.11. On exerce ainsi une tension de 400N sur le câble. Le poids linéaire du câble est de 6 N/m et de plus, on répartit une charge non uniforme de  $40x$  N/m dans l'intervalle  $[0, 2]$ . Enfin, en  $x = 4$ , une charge ponctuelle de 150 N contribue également à la déformation du câble. Pour résoudre ce problème, on doit considérer l'équation différentielle :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( T(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x) \\ u(0) = 0, \quad u(5) = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

où  $T(x)$  est la tension dans le câble,  $u(x)$  est la déflexion verticale et  $f(x)$  est la charge appliquée. Dans ce cas précis, on applique une charge linéaire sur l'intervalle  $[0, 2]$ , en plus du poids du câble ce qui donne :

$$f(x) = \begin{cases} -(6 + 40x) & \text{pour } 0 \leq x \leq 2 \\ -6 & \text{pour } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà souligné, la charge ponctuelle s'interprète comme le saut de la condition naturelle (de la variable secondaire) au point  $x = 4$  et sera prise en compte lors de l'imposition des conditions aux limites. Ce problème entre dans le cadre du problème type 5.1 en posant simplement  $p(x) = 0$ ,  $q(x) = T(x) = 400$  et  $r(x) = f(x)$ . Notons de plus que puisque les conditions aux limites essentielles sont homogènes, on peut prendre  $u_g(x) = 0$ .

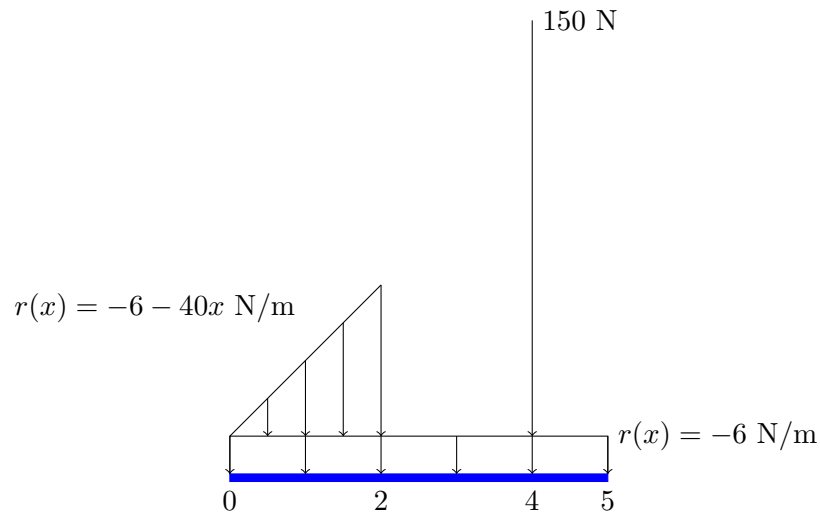


Figure 5.11 – Déflexion verticale d'un câble

### — Le maillage

On considère un maillage de 4 éléments et une interpolation quadratique sur chaque élément. Le maillage est présenté aussi à la figure 5.12 ainsi que les coordonnées et la numérotation des nœuds. De plus, on s'est assuré de placer le point  $x = 4$ , où se situe la charge ponctuelle, à la frontière entre 2 éléments ce qui en facilite la prise en compte. On a donc les tableaux suivants :

Coordonnées des nœuds		
Tableau <i>coor</i>		
$x_1$	$x_2$	$x_3$
0,0000	0,0000	0,0000
1,0000	0,0000	0,0000
2,0000	0,0000	0,0000
2,5000	0,0000	0,0000
3,0000	0,0000	0,0000
3,5000	0,0000	0,0000
4,0000	0,0000	0,0000
4,5000	0,0000	0,0000
5,0000	0,0000	0,0000

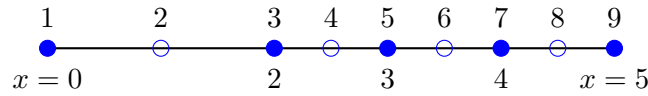


Figure 5.12 – Maillage pour la déflexion verticale d’un câble

Numéros des nœuds de calcul			
Tableau <i>conec</i>			
Élément	Noeud #1	Noeud #2	Noeud #3
1	1	3	2
2	3	5	4
3	5	7	6
4	7	9	8

La variable essentielle  $u(x)$  est imposée en  $x = 0$  et en  $x = 5$ . On obtient toujours le tableau de numérotation en 2 étapes. Dans un premier temps, on a évité de numéroter les degrés de liberté associés aux nœuds 1 et 9 où des conditions essentielles sont imposées. Dans un deuxième temps, on numérote les degrés de liberté fixés :

Numérotation		→	Numérotation	
Tableau <i>numer</i>			Tableau <i>numer</i>	
Noeud	$u$	Noeud	$u$	
1	?	1	8	
2	1	2	1	
3	2	3	2	
4	3	4	3	
5	4	5	4	
6	5	6	5	
7	6	7	6	
8	7	8	7	
9	?	9	9	

Le tableau d’adressage correspondante est alors :

Numéros des ddl			
Tableau <i>adres</i>			
Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3
1	8	2	1
2	2	4	3
3	4	6	5
4	6	9	7

— **Le système élémentaire**

Le système élémentaire a pour coefficients :

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \frac{2}{h^K} \int_{-1}^1 400 \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi} d\xi \\ f_i^K &= \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 f \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\ s_i^K &= s_{11}^K \hat{\psi}_i(-1) + s_{12}^K \hat{\psi}_i(1) \end{aligned}$$

Pour la matrice élémentaire, puisque dans ce cas on a  $p(x) = 0$  et  $q(x) = 400$ , on peut tirer profit de l'équation 5.16 pour obtenir :

$$\frac{400}{3h^K} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

et ce quel que soit l'élément. Par contre, pour le calcul du terme de droite on distingue 2 cas suivant que l'on se place dans le premier élément ou dans les autres.

**1. Premier élément**

Dans le premier élément  $x_1^{K_1} = 0$ ,  $x_2^{K_1} = 2$  et donc  $h^{K_1} = 2$  et on doit évaluer :

$$\begin{aligned} f_i^{K_1} &= \frac{h^{K_1}}{2} \int_{-1}^1 f \left( \frac{(x_1^{K_1} + x_2^{K_1}) + h^{K_1} \xi}{2} \right) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\ &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(1 + \xi) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 - (6 + 40(1 + \xi)) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \end{aligned}$$

On montre alors que :

$$f^{K_1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 \\ -86 \\ -184 \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'adressage de cet élément est [8 2 1] et on trouve ainsi le système élémentaire :

$$\frac{200}{3} \left[ \begin{array}{c|ccc} & 8 & 2 & 1 \\ \hline 8 & 7 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & 7 & -8 \\ 1 & -8 & -8 & 16 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_1} \\ \delta_{u_2}^{K_1} \\ \delta_{u_3}^{K_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 \\ -86 \\ -184 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^{K_1} \\ s_{12}^{K_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2. Les 3 autres éléments

Dans cet exemple précis, les 3 autres éléments sont identiques et vérifient  $h^K = 1$ . De plus, puisque  $r(x) = -6$ , on peut encore utiliser les relations 5.16 et 5.17 pour obtenir directement les systèmes élémentaires :

$$\frac{400}{3} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^K \\ \delta_{u_2}^K \\ \delta_{u_3}^K \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seul le vecteur d'adressage varie pour ces 3 éléments.

### — L'assemblage

En se servant du tableau *adres*, on assemble (en exercice ) la matrice 9 sur 9 suivante :

$$\frac{100}{3} \begin{bmatrix} 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ -16 & 42 & -32 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -32 & 64 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -32 & 56 & -32 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -32 & 64 & -32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -32 & 56 & -32 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 & 64 & 0 & -32 \\ -16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -32 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

et le terme de droite :

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -184 \\ -89 \\ -12 \\ -6 \\ -12 \\ -6 \\ -12 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s_{12}^{K_1} + s_{11}^{K_2} \\ 0 \\ s_{12}^{K_2} + s_{11}^{K_3} \\ 0 \\ s_{12}^{K_3} + s_{11}^{K_4} \\ 0 \\ s_{11}^{K_1} \\ s_{12}^{K_4} \end{bmatrix}$$

### — Conditions aux limites

#### 1. Conditions essentielles :

Deux degrés de liberté sont fixés par les conditions essentielles soient les degrés de liberté 8 et 9 pour lesquels  $\delta_{u_8} = \delta_{u_9} = 0$ .

#### 2. Conditions naturelles :

Au point  $x = 4$ , on impose une charge ponctuelle ce qui se traduit par la condition naturelle :

$$s_{12}^{K_3} + s_{11}^{K_4} = -150$$

Tous les autres sauts de la variable secondaire sont nuls. De plus,  $s_{12}^{K_4}$  et  $s_{11}^{K_1}$  sont inconnus. On a maintenant :

$$S^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -150 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S^I = \begin{bmatrix} s_{11}^{K_1} \\ s_{12}^{K_4} \end{bmatrix}$$

— **Solution du système linéaire**

On doit donc résoudre le système global :

$$\frac{100}{3} \begin{bmatrix} 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ -16 & 42 & -32 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -32 & 64 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -32 & 56 & -32 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -32 & 64 & -32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -32 & 56 & -32 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 & 64 & 0 & -32 \\ \hline -16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -32 & 0 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ \delta_{u_7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -184 \\ -89 \\ -12 \\ -6 \\ -12 \\ -6 \\ -12 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -150 \\ 0 \\ s_{11}^{K_1} \\ s_{12}^{K_4} \end{bmatrix}$$

On effectue la résolution de l'équation 5.20 par une méthode de décomposition  $LU$ . La solution du système linéaire réduit de dimension 7 sur 7 donne le vecteur :

$$\delta_U^I = - \begin{bmatrix} 0,235\,000\,000 \\ 0,355\,000\,000 \\ 0,367\,708\,333 \\ 0,376\,666\,667 \\ 0,381\,875\,000 \\ 0,383\,333\,333 \\ 0,193\,541\,666 \end{bmatrix}$$

Le vecteur solution complet (en ajoutant les conditions essentielles) est donc :

$$U = U^g + \delta_U = - \begin{bmatrix} 0,235\,000\,000 \\ 0,355\,000\,000 \\ 0,367\,708\,333 \\ 0,376\,666\,667 \\ 0,381\,875\,000 \\ 0,383\,333\,333 \\ 0,193\,541\,666 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution élément par élément est illustrée à la figure 5.13. On remarque que la solution  $u(x)$  est constituée de 4 polynômes de degré 2 alors que  $Tu'(x)$  est constituée de 4 polynômes



linéaires (puisque  $T$  est constant). On remarque enfin que le saut des variables secondaires en  $x = 2$ ,  $x = 3$  n'est pas nul alors que celui en  $x = 4$  est près de 150. Cela démontre que les conditions aux limites naturelles ne sont imposées que faiblement. Un maillage plus fin permettrait d'obtenir éventuellement les bonnes valeurs de ces sauts.

On peut enfin récupérer les variables naturelles (les réactions nodales) qui restent en se servant de la relation 5.21. On obtient alors les réactions :

$$S^I = \begin{bmatrix} s_{11}^{K_1} \\ s_{12}^{K_4} \end{bmatrix} = \frac{-100}{3} \begin{bmatrix} -16 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,235\,000\,000 \\ 0,355\,000\,000 \\ 0,367\,708\,333 \\ 0,376\,666\,667 \\ 0,381\,875\,000 \\ 0,383\,333\,333 \\ 0,193\,541\,666 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103,67 \\ 156,33 \end{bmatrix}$$

exprimées en N et qui représentent les forces exercées aux 2 extrémités pour retenir le câble. La somme de ces 2 forces est de 260 N ce qui est exactement la charge totale exercée sur le câble :

$$6 \times 5 + 150 + \int_0^2 40x \, dx = 260N$$



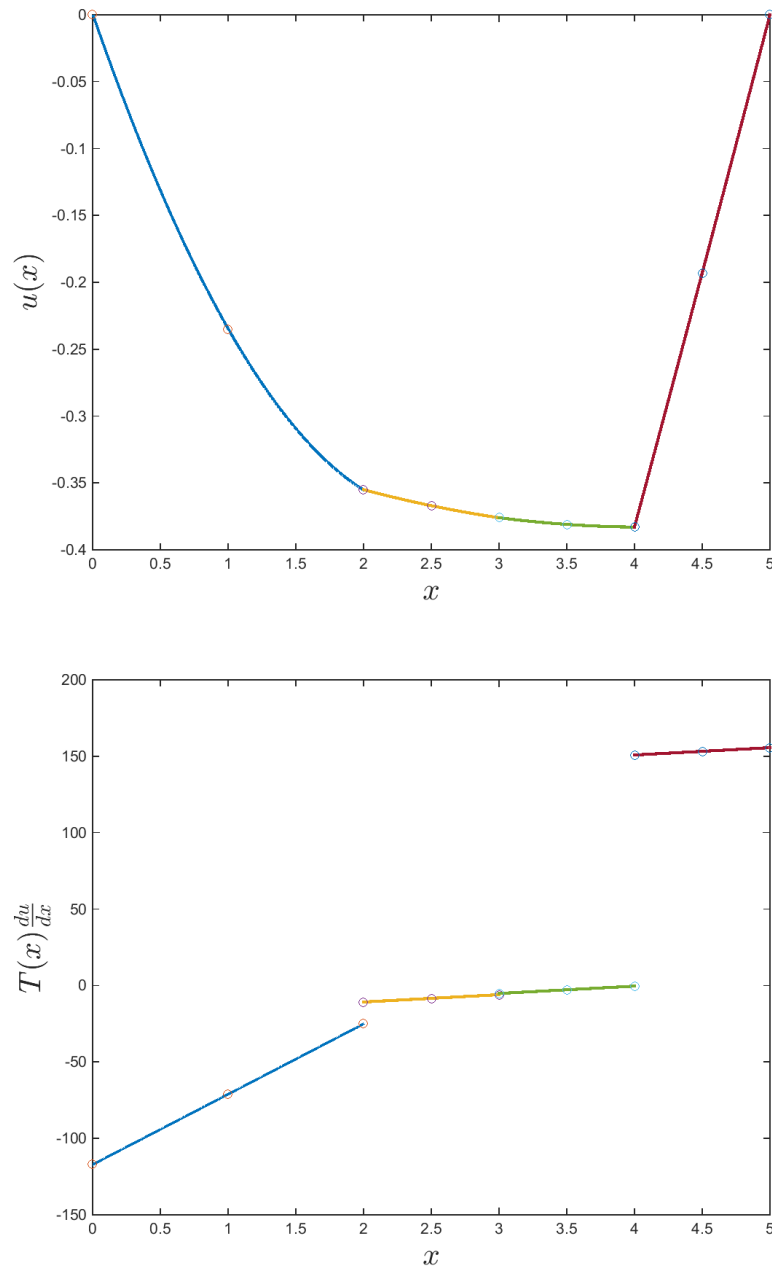
## 5.2 Équations différentielles d'ordre 4

Dans cette section nous nous intéressons aux équations différentielles d'ordre 4. Fort heureusement beaucoup de notions introduites à la section précédente restent inchangées et seront réutilisées avec très peu de modifications. C'est le cas du passage à l'élément de référence, de l'évaluation du système élémentaire, de l'assemblage, de l'imposition des conditions aux limites, etc. Seules quelques variantes propres aux équations différentielles d'ordre 4 sont nécessaires.

### 5.2.1 Problème type

Pour fixer les idées, nous commencerons par la résolution d'un problème classique d'une équation différentielle d'ordre 4 de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x)u + \frac{d^2}{dx^2} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = r(x) \\ u(0) = a, \quad q(0) \frac{d^2 u}{dx^2}(0) = b \\ \frac{du}{dx}(L) = c, \quad \frac{d}{dx} \left( q(L) \frac{du}{dx}(L) \right) = d \end{array} \right. \quad (5.24)$$

Figure 5.13 – Solution numérique :  $u(x)$  et  $T(x)u'(x)$

Ce type d'équations différentielles est fréquemment rencontré pour les problèmes de poutres où dans ce cas,  $u(x)$  est la déflexion verticale de la poutre au point  $x$ . Nous savons d'ores et déjà que ce type de problèmes trouve un cadre fonctionnel approprié dans  $H^2(]0, L[)$  et qu'on distingue pour cette équation différentielle d'ordre 4 deux conditions essentielles (imposition de  $u(x)$  et de  $\frac{du}{dx}$ ) et deux conditions naturelles (imposition de  $\frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \right)$  et de  $q(x) \frac{d^2u}{dx^2}$ ) en l'une ou l'autre des 2 extrémités du domaine. Tenant compte des conditions essentielles imposées dans ce problème, on pose :

$$V = \{w \in H^2(]0, L[) \mid w(0) = \frac{dw}{dx}(L) = 0\}$$

L'espace  $V$  est constitué des fonctions de  $H^2(]0, L[)$  qui s'annulent là où les conditions essentielles sont imposées. Dans ce cas, on pose  $u = \delta_u + u_g$  et la formulation variationnelle (laissée en exercice) est :

♠ trouver  $\delta_u \in V$  telle que :

$$a(\delta_u, w) = l(w) - a(u_g, w) \quad \forall w \in V \quad (5.25)$$

où :

$$a(\delta_u, w) = \int_0^1 (p(x)\delta_u(x)w(x) + q(x)\delta_u''(x)w''(x)) dx$$

et :

$$l(w) = \int_0^1 r(x)w(x)dx - d w(L) + b \frac{dw}{dx}(0)$$

La méthode de Ritz nécessite la construction d'un système linéaire global de la forme :

$$A\delta_U = F$$

où :

$$a_{ij} = a(\phi_j(x), \phi_i(x)) \quad \text{et} \quad f_i = l(\phi_i(x)) - a(u_g(x), \phi_i(x))$$

La fonction  $u_g(x)$  désigne comme toujours le relèvement des conditions aux limites essentielles. Il reste donc à construire les fonctions de Ritz  $\phi_i(x)$  dans  $H^2(\Omega)$  et qui seront polynômiales par élément.

### 5.2.2 Le maillage

Le maillage possède les mêmes caractéristiques que pour les problèmes d'ordre 2. Pour illustrer notre propos, on choisit comme domaine  $\Omega$  le segment  $[0, L]$  et on considère un maillage uniforme de 3 éléments. On prend seulement les 2 nœuds géométriques comme nœuds de calcul ( $n_g^K = n_c^K = 2$ ). Le tableau de connectivité des nœuds s'écrit dans ce cas :

Numéros des nœuds de calcul		
Tableau <i>connec</i>		
Élément	Noeud #1	Noeud #2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Rappelons encore ici qu'il y a 2 conditions essentielles pour ce problème et donc qu'il y a 2 degrés de liberté associés à chaque nœud d'interpolation ( $n_d^K = 4$ ). Nous continuerons à numéroter les degrés de liberté où des conditions essentielles sont imposées en tout dernier. Dans le cas qui nous intéresse, on impose  $u$  au premier nœud et on impose  $\frac{du}{dx}$  au quatrième nœud. On aurait la situation suivante :

Numérotation		
Tableau <i>numer</i>		
Noeud	Ddl #1 ( $u(x)$ )	Ddl #2 ( $\frac{du}{dx}$ )
1	?	1
2	2	3
3	4	5
4	6	?

Remarquons que le degré de liberté associé à la variable essentielle  $u(x)$  au premier nœud n'a pas été numéroté de même que celui associé à la variable essentielle  $\frac{du}{dx}$  au nœud # 4 ce qui est fait dans une deuxième étape :

Numérotation		
Tableau <i>numer</i>		
Noeud	Ddl #1 ( $u(x)$ )	Ddl #2 ( $\frac{du}{dx}$ )
1	7	1
2	2	3
3	4	5
4	6	8

On peut maintenant construire le tableau d'adressage :

Numéros des ddls				
Tableau <i>adres</i>				
Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3	Ddl #4
1	7	1	2	3
2	2	3	4	5
3	4	5	6	8

### 5.2.3 Formulation variationnelle élémentaire

Cette étape consiste à obtenir une formulation variationnelle sur un élément quelconque  $K$ . On intègre sur un élément  $K = [x_1^K, x_2^K]$  plutôt que sur le domaine  $\Omega$  au complet. On a alors après 2 intégrations par parties :

$$\begin{aligned} & \int_K \left( p(x)u(x)w(x) + q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} \right) dx \\ &= \int_K r(x)w(x)dx + q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \frac{dw}{dx} \Big|_{x_1^K}^{x_2^K} - \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \right) w(x) \Big|_{x_1^K}^{x_2^K} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} & \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x)u(x)w(x) + q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} \right) dx \\ &= \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x)w(x)dx + s_{12}^K w(x_2^K) + s_{11}^K w(x_1^K) + s_{22}^K \frac{dw}{dx}(x_2^K) + s_{21}^K \frac{dw}{dx}(x_1^K) \end{aligned}$$

où on a introduit les *variables secondaires* :

$$\begin{aligned} s_{11}^K &= \left. \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \right) \right|_{x=x_1^K} & s_{12}^K &= - \left. \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \right) \right|_{x=x_2^K} \\ s_{21}^K &= - \left. \left( q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \right) \right|_{x=x_1^K} & s_{22}^K &= \left. \left( q(x) \frac{d^2u}{dx^2} \right) \right|_{x=x_2^K} \end{aligned}$$

Ces 2 variables secondaires correspondent aux 2 conditions naturelles aux 2 extrémités de l'élément. La notation à 2 indices indique que  $s_{i1}^K$  est la valeur de la  $i$  ième variable secondaire à la première extrémité de l'élément tandis que  $s_{i2}^K$  est la valeur de la  $i$  ième variable secondaire à la deuxième extrémité de l'élément  $K$ . Les signes qui sont affectés aux variables secondaires sont *a priori* arbitraires de manière à ce que les signes soient tous positifs dans la formulation variationnelle élémentaire. Mentionnons cependant qu'en dimension 2 ou 3, le signe est déterminé par le vecteur normal extérieur à la frontière de l'élément.

On passe ensuite en formulation de type correction en remplaçant  $u(x)$  par  $u_g(x) + \delta_u(x)$  :

$$\begin{aligned} & \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x)\delta_u(x)w(x) + q(x) \frac{d^2\delta_u}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} \right) dx \\ &= \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x)w(x)dx - \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x)u_g(x)w(x) + q(x) \frac{d^2u_g}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} \right) dx \\ &+ s_{12}^K w(x_2^K) + s_{11}^K w(x_1^K) + s_{22}^K \frac{dw}{dx}(x_2^K) + s_{21}^K \frac{dw}{dx}(x_1^K) \end{aligned}$$

On pose ensuite :

$$\delta_u(x) = \sum_{j=1}^{n_d^K} \delta_{u_j}^K \psi_j^K(x) \quad \text{et} \quad u_g(x) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \psi_j^K(x)$$

et on choisit ensuite successivement  $w(x) = \psi_i^K(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_d^K$  pour obtenir le système élémentaire :

$$A^K \delta_U^K = F^K + S^K$$

où :

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^K &= \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x) \psi_j^K(x) \psi_i^K(x) + q(x) \frac{d^2 \psi_j^K}{dx^2} \frac{d^2 \psi_i^K}{dx^2} \right) dx \\
 f_i^K &= \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x) \psi_i^K(x) dx - \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( p(x) \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \psi_j^K(x) \right) \psi_i^K(x) + q(x) \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \frac{d^2 \psi_j^K}{dx^2} \right) \frac{d^2 \psi_i^K}{dx^2} \right) dx \\
 s_i^K &= s_{12}^K \psi_i^K(x_2^K) + s_{11}^K \psi_i^K(x_1^K) + s_{22}^K \frac{d\psi_i^K}{dx}(x_2^K) + s_{21}^K \frac{d\psi_i^K}{dx}(x_1^K)
 \end{aligned}$$

#### 5.2.4 Passage à l'élément de référence

Effectuons maintenant le changement de variables dans le système élémentaire. Rappelons de l'équation 5.9 que :

$$\frac{d\psi_i^K}{dx}(x) = \frac{2}{h^K} \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi}(\xi), \quad \frac{d^2\psi_i^K}{dx^2}(x) = \frac{4}{(h^K)^2} \frac{d^2\hat{\psi}_i}{d\xi^2}(\xi) \quad \text{et} \quad dx = \frac{h^K}{2} d\xi$$

On obtient alors sur l'élément de référence :

$$\begin{aligned}
a_{ij}^K &= \int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) \frac{h^K}{2} d\xi \\
&\quad + \int_{-1}^1 q \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \left( \frac{d^2 \hat{\psi}_j}{d\xi^2} \frac{4}{(h^K)^2} \right) \left( \frac{d^2 \hat{\psi}_i}{d\xi^2} \frac{4}{(h^K)^2} \right) \frac{h^K}{2} d\xi \\
&= \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\
&\quad + \frac{8}{(h^K)^3} \int_{-1}^1 q \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \frac{d^2 \hat{\psi}_j}{d\xi^2} \frac{d^2 \hat{\psi}_i}{d\xi^2} d\xi \\
f_i^K &= \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 r \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi - \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j^K} \hat{\psi}_j(\xi) \right) \hat{\psi}_i(\xi) d\xi \\
&\quad - \frac{8}{(h^K)^3} \int_{-1}^1 q \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j^K} \frac{d^2 \hat{\psi}_j}{d\xi^2} \right) \frac{d^2 \hat{\psi}_i}{d\xi^2} d\xi \\
s_i^K &= s_{11}^K \hat{\psi}_i(-1) + s_{12}^K \hat{\psi}_i(1) + s_{21}^K \frac{2}{h^K} \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi}(-1) + s_{22}^K \frac{2}{h^K} \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi}(1)
\end{aligned}$$

Ce système est de dimension  $n_d^K$  sur  $n_d^K$ . Pour l'évaluer, il reste à construire des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence. Puisque la solution recherchée est dans un sous-espace de  $H^2(\Omega)$ , l'approximation polynômiale devra être continue et dérivable au moins une fois (voir le chapitre 2). Cela nous amène à rappeler les polynômes d'Hermite.

### 5.2.5 Construction des fonctions d'interpolation

Pour simplifier l'exposé, nous commencerons par le cas où il y a seulement 2 nœuds de calcul qui correspondent aux 2 nœuds géométriques ( $n_c^K = n_g^K = 2$ ). Puisqu'il y a 2 conditions essentielles par nœud de calcul, on aura 2 degrés de liberté par nœud de calcul et donc 4 fonctions d'interpolation à construire ( $n_d^K = 4$ ). Sur un élément, on a donc :

$$u^K(x) = \sum_{j=1}^4 u_j^K \psi_j^K(x)$$

La valeur des inconnues  $u_j^K$  est définie par :

$$\begin{aligned} u^K(x_1^K) &= \sum_{j=1}^4 u_j^K \psi_j^K(x_1^K) = \sum_{j=1}^4 u_j^K \hat{\psi}_j(-1) = u_1^K \\ \frac{du^K}{dx}(x_1^K) &= \sum_{j=1}^4 u_j^K \frac{d\psi_j^K}{dx}(x_1^K) = \sum_{j=1}^4 u_j^K \frac{2}{h^K} \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi}(-1) = u_2^K \\ u^K(x_2^K) &= \sum_{j=1}^4 u_j^K \psi_j^K(x_2^K) = \sum_{j=1}^4 u_j^K \hat{\psi}_j(+1) = u_3^K \\ \frac{du^K}{dx}(x_2^K) &= \sum_{j=1}^4 u_j^K \frac{d\psi_j^K}{dx}(x_2^K) = \sum_{j=1}^4 u_j^K \frac{2}{h^K} \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi}(+1) = u_4^K \end{aligned}$$

Les fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}(\xi)$  doivent donc vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(-1) &= 1 \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_i(-1) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 1 \\ \frac{d\hat{\psi}_2}{d\xi}(-1) &= \frac{h^K}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi}(-1) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 2 \\ \hat{\psi}_3(+1) &= 1 \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_i(+1) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 3 \\ \frac{d\hat{\psi}_4}{d\xi}(+1) &= \frac{h^K}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi}(+1) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 4 \end{aligned}$$

Ces dernières propriétés ne sont rien de moins que la définition des polynômes d'Hermite (voir par exemple Burden et Faires, réf. [13]). Puisqu'il y a 4 conditions à satisfaire pour chacune des fonctions d'interpolation, il semble naturel d'utiliser des polynômes de degré 3 et il est alors facile de montrer que :

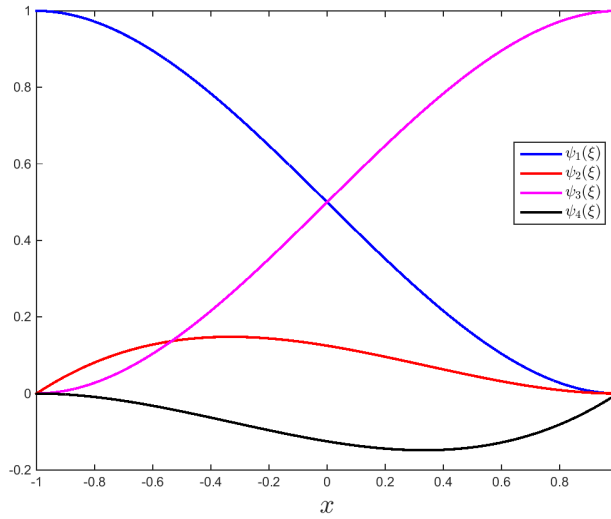
$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(\xi) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) & \hat{\psi}_3(\xi) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) \\ \hat{\psi}_2(\xi) &= \frac{h^K}{8}(1 - \xi^2)(1 - \xi) & \hat{\psi}_4(\xi) &= \frac{h^K}{8}(-1 + \xi^2)(1 + \xi) \end{aligned}$$

Ces fonctions sont illustrées à la figure 5.14 dans le cas particulier où  $h^K = 1$ .

On montre ensuite facilement que :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\psi}_1(\xi)}{d\xi} &= -\frac{3}{4}(1 - \xi^2) & \frac{d\hat{\psi}_3(\xi)}{d\xi} &= \frac{3}{4}(1 - \xi^2) \\ \frac{d\hat{\psi}_2(\xi)}{d\xi} &= \frac{h^K}{8}(-1 + \xi)(1 + 3\xi) & \frac{d\hat{\psi}_4(\xi)}{d\xi} &= \frac{h^K}{8}(-1 - \xi)(1 - 3\xi) \end{aligned}$$



Figure 5.14 – Fonctions d’interpolation d’Hermite ( $h^K = 1$ )

tandis que les dérivées secondes s’écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{\psi}_1(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{3\xi}{2} & \frac{d^2 \hat{\psi}_3(\xi)}{d\xi^2} &= -\frac{3\xi}{2} \\ \frac{d^2 \hat{\psi}_2(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{h^K}{4}(-1 + 3\xi) & \frac{d^2 \hat{\psi}_4(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{h^K}{4}(1 + 3\xi) \end{aligned}$$

Notons que la définition des fonctions d’interpolation sur l’élément de référence dépend de la longueur  $h^K$  de l’élément  $K$ , ce qui n’était nullement le cas pour les fonctions d’interpolation de Lagrange. Ceci est dû à la présence de degrés de liberté portant sur la dérivée de  $u(x)$ . Pour assurer la continuité de la dérivée à la frontière entre 2 éléments, il est nécessaire d’ajuster les fonctions d’interpolation en fonction de la longueur des éléments adjacents à un nœud.

En utilisant ces fonctions d’interpolation, on donne une signification physique précise au vecteur des degrés de liberté élémentaire et par la suite, au vecteur global des degrés de liberté du domaine. Ainsi, le vecteur  $U^K$  correspond aux valeurs de  $u(x)$  et de  $\frac{du}{dx}$ , les 2 variables essentielles aux nœuds de calcul c.-à-d.

$$\begin{aligned} u_1^K &= u(x_1^K) & u_3^K &= u(x_2^K) \\ u_2^K &= \frac{du}{dx}(x_1^K) & u_4^K &= \frac{du}{dx}(x_2^K) \end{aligned}$$

**Remarque 5.15.** La notation utilisée peut peut-être porter à confusion. En effet, le degré de liberté  $u_2^K$  contient la valeur de  $\frac{du}{dx}(x_1^K)$  et non la valeur de  $u$  au nœud correspondant. Nous aurions pu

utiliser une notation différente mais il suffit de se rappeler que  $u_2^K$  correspond au deuxième degré de liberté de l'élément  $K$  et que son interprétation peut varier suivant le problème. ◀

### 5.2.6 Évaluation du système élémentaire

L'évaluation du système élémentaire suit les mêmes lignes que pour les problèmes d'ordre 2. On peut toujours choisir entre l'intégration numérique et l'intégration exacte. Si on suppose encore une fois que les fonctions  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $r(x)$  sont constantes par élément (et  $u_g(x) = 0$ ), le système élémentaire devient :

$$A^K = \frac{h^K p^K}{13\,440} \begin{bmatrix} 4992 & 704h^K & 1728 & -416h^K \\ 704h^K & 128(h^K)^2 & 416h^K & -96(h^K)^2 \\ 1728 & 416h^K & 4992 & -704h^K \\ -416h^K & -96(h^K)^2 & -704h^K & 128(h^K)^2 \end{bmatrix} + \frac{2q^K}{(h^K)^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h^K & -6 & 3h^K \\ 3h^K & 2(h^K)^2 & -3h^K & (h^K)^2 \\ -6 & -3h^K & 6 & -3h^K \\ 3h^K & (h^K)^2 & -3h^K & 2(h^K)^2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Une intégration par une quadrature de Gauss-Legendre nécessiterait au moins 4 points d'intégration car la première matrice de l'équation 5.26 requiert l'intégration de polynômes de degré 6. En ce qui concerne le membre de droite, l'intégrand est cubique et une formule de Gauss-Legendre à 2 points suffirait. On a :

$$f^K + s^K = \frac{h^K r^K}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ h^K \\ 6 \\ -h^K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{21}^K \\ s_{12}^K \\ s_{22}^K \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

### 5.2.7 Assemblage

Rien de neuf sous le soleil en ce qui concerne l'assemblage. On utilise encore le tableau d'adressage *adres* préalablement construit et contenant pour chaque élément les numéros de ses degrés de liberté. On procède exactement comme à la section 5.1.7 pour assembler.

### 5.2.8 Imposition des conditions aux limites

L'imposition des conditions aux limites se fait toujours en 2 étapes. Premièrement les degrés de liberté imposés par les conditions essentielles sont regroupés encore ici dans le vecteur  $U^C$ . On devra donc calculer le vecteur  $U^I$ .

Puisqu'il y a 2 conditions naturelles, le vecteur  $S$  fait intervenir deux types de sauts à la frontière de 2 éléments  $K^+$  et  $K^-$ . Si on note  $x$  le nœud de calcul correspondant à cette frontière et  $i$  et  $j$  les numéros des degrés de liberté associés à ce nœud, le vecteur  $S$  contiendra les coefficients :

$$s_i = s_{12}^{K^-} + s_{11}^{K^+} \quad \text{et} \quad s_j = s_{22}^{K^-} + s_{21}^{K^+}$$

Les indices  $-$  et  $+$  réfèrent aux valeurs à gauche et à droite de la variable en  $x$ . Ces expressions désignent les sauts des 2 variables secondaires au nœud correspondant.

Or si l'un ou l'autre de ces sauts était différent de 0, l'équation différentielle ferait apparaître une distribution de Dirac  $H_1\delta_x$  ou bien une dérivée d'une distribution de Dirac  $H_2\delta'_x$ . Si tel est le

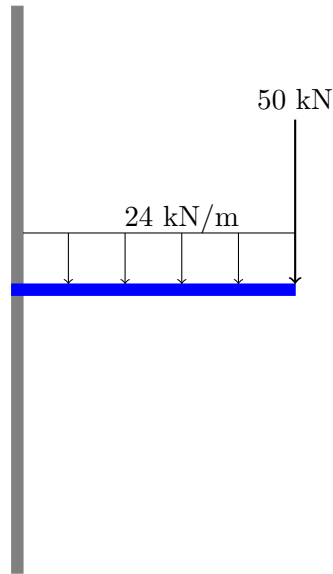


Figure 5.15 – Problème de la poutre encastrée

cas, c'est au moment de l'imposition des conditions naturelles à ce nœud que l'on prend en compte la contribution de cette charge ponctuelle et on pose :

$$s_i = s_{12}^{K^-} + s_{11}^{K^+} = H_1 \quad \text{et/ou} \quad s_j = s_{22}^{K^-} + s_{21}^{K^+} = H_2$$

Sinon, on pose simplement  $s_i = s_j = 0$ .

### 5.2.9 Solution du système global

On procède comme à la section 5.1.9 pour résoudre le système.

### 5.2.10 Exemples et applications

Nous allons considérer une poutre de longueur  $L$  m encastrée à l'une de ses extrémités tel qu'illustrée à la figure 5.15. Ce problème cadre parfaitement avec notre problème type. Les variables essentielles  $u(x)$  et  $u'(x)$  désignent dans ce cas le déplacement vertical (positif si dirigé vers le haut) et la pente. Il suffit ensuite de poser  $p(x) = 0$  et  $q(x) = EI$ , le produit du module de Young  $E$  (en  $\text{N/m}^2$ ) et du moment d'inertie  $I$  de la poutre (en  $\text{m}^4$ ). Enfin,  $r(x)$  est une charge répartie sur la poutre (la charge est positive si dirigée vers le haut). Les 2 conditions naturelles désignent respectivement un effort tranchant (cisaillement) :

$$F(x) = \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \quad \text{en N}$$

et un moment (couple) de flexion :

$$M(x) = \left( q(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \text{ en N}\cdot\text{m}$$

Rappelons que l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d^2}{dx^2} M(x) = r(x) \quad (5.28)$$

que l'on peut interpréter au sens des distributions. Dans un premier temps, si  $M(x)$  possède une discontinuité de première espèce au point  $x$ , alors la relation 5.28 nous assure que l'on verra apparaître la dérivée de la distribution de Dirac  $\delta'_x$  puisqu'on doit dériver 2 fois cette discontinuité. Un couple de flexion en  $x$  est donc modélisé par la distribution  $\delta'_x$ . Par contre, si la force de cisaillement  $F(x)$  possède un saut au point  $x$ , alors seulement la distribution de Dirac  $\delta_x$  apparaîtra.

Nous supposons dans cet exemple que le produit  $EI$  est constant et qu'une charge uniforme  $r(x) = r_0$  N/m est répartie sur toute la poutre. Enfin, à la deuxième extrémité ( $x = L$ ), on place une charge ponctuelle de  $f_0$  N. On remarque qu'on impose les deux variables essentielles  $u(0) = 0$  et  $\frac{du}{dx}(0) = 0$  à la première extrémité traduisant ainsi le fait que la poutre est encastree à cet endroit. On choisira donc  $u_g(x) = 0$  et nous suivrons encore ici les étapes de résolution déjà décrites.

— **Le maillage**

On prendra pour ce problème un maillage très simple de 2 éléments de longueur égale  $h = L/2$  m et comportant 3 nœuds ( $nnoeuds = 3$ ). Dans un premier temps, on obtient le tableau *coor* :

Coordonnées des nœuds		
Tableau <i>coor</i>		
$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0
$L/2$	0	0
$L$	0	0

de même que le tableau de connectivité :

Numéros des nœuds de calcul		
Tableau <i>connec</i>		
Élément	Noeud #1	Noeud #2
1	1	2
2	2	3

Par la suite, on peut numéroter les degrés de liberté associés à chaque nœud. Pour les problèmes d'ordre 4, il y a 2 degrés de liberté par nœud et on a dans un premier temps :

Numérotation Tableau <i>numer</i>		
Noeud	Ddl #1 ( $u(x)$ )	Ddl #2 ( $\frac{du}{dx}$ )
1	?	?
2	1	2
3	3	4

puisque les 2 degrés de liberté associés au premier nœud sont fixés par les conditions essentielles. Un deuxième passage nous donne maintenant :

Numérotation Tableau <i>numer</i>		
Noeud	Ddl #1 ( $u(x)$ )	Ddl #2 ( $\frac{du}{dx}$ )
1	5	6
2	1	2
3	3	4

On peut maintenant construire le tableau d'adressage :

Numéros des dds Tableau <i>adres</i>				
Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3	Ddl #4
1	5	6	1	2
2	1	2	3	4

Rappelons que pour un élément  $K$  quelconque :

$$\begin{aligned} \text{adres}(K, 1) &= \text{numer}(\text{conec}(K, 1), 1) \\ \text{adres}(K, 2) &= \text{numer}(\text{conec}(K, 1), 2) \\ \text{adres}(K, 3) &= \text{numer}(\text{conec}(K, 2), 1) \\ \text{adres}(K, 4) &= \text{numer}(\text{conec}(K, 2), 2) \end{aligned}$$

et ainsi, si on choisit l'élément  $K = 1$  on trouve :

$$\begin{aligned} \text{adres}(1, 1) &= \text{numer}(\text{conec}(1, 1), 1) = 5 \\ \text{adres}(1, 2) &= \text{numer}(\text{conec}(1, 1), 2) = 6 \\ \text{adres}(1, 3) &= \text{numer}(\text{conec}(1, 2), 1) = 1 \\ \text{adres}(1, 4) &= \text{numer}(\text{conec}(1, 2), 2) = 2 \end{aligned}$$

— **Le système élémentaire**

Les propriétés étant constantes dans tout le domaine, on utilise avantageusement les équations 5.26 et 5.27 pour obtenir immédiatement le système élémentaire :

$$\frac{2q^K}{(h^K)^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h^K & -6 & 3h^K \\ 3h^K & 2(h^K)^2 & -3h^K & (h^K)^2 \\ -6 & -3h^K & 6 & -3h^K \\ 3h^K & (h^K)^2 & -3h^K & 2(h^K)^2 \end{bmatrix} = \frac{h^K r^K}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ h^K \\ 6 \\ -h^K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^{K_1} \\ s_{21}^{K_1} \\ s_{12}^{K_1} \\ s_{22}^{K_1} \end{bmatrix}$$

où  $h^K = L/2$ ,  $q^K = EI$ , et  $r^K = r_0$ .

— **L'assemblage**

Si on pose maintenant  $L = 2$  ( $h^K = 1$ ),  $EI = q^K = 5000$  kN m<sup>2</sup>,  $r_0 = r^K = -24$  kN/m et  $f_0 = -50$  kN, les systèmes élémentaires sur les 2 éléments sont les mêmes. Le tableau d'adressage nous permet d'écrire pour le premier élément :

$$10\,000 \begin{bmatrix} & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_1} \\ \delta_{u_2}^{K_1} \\ \delta_{u_3}^{K_1} \\ \delta_{u_4}^{K_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^{K_1} \\ s_{21}^{K_1} \\ s_{12}^{K_1} \\ s_{22}^{K_1} \end{bmatrix}$$

tandis que sur le deuxième élément, on a :

$$10\,000 \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_2} \\ \delta_{u_2}^{K_2} \\ \delta_{u_3}^{K_2} \\ \delta_{u_4}^{K_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^{K_2} \\ s_{21}^{K_2} \\ s_{12}^{K_2} \\ s_{22}^{K_2} \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'adressage du premier élément  $K_1$  est  $[5, 6, 1, 2]$ . Cela signifie que les inconnues élémentaires  $u_i^{K_1}$  correspondent aux degrés de liberté  $u_5, u_6, u_1$  et  $u_2$  du système global qui est de dimension 6 sur 6 dans ce cas. Le système élémentaire est donc équivalent à :

$$10\,000 \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 & 0 & -6 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{12}^{K_1} \\ s_{21}^{K_1} \\ s_{22}^{K_1} \\ 0 \\ s_{11}^{K_1} \\ s_{21}^{K_1} \end{bmatrix}$$

tandis que sur le deuxième élément on a :

$$10\,000 \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^{K_2} \\ s_{21}^{K_2} \\ s_{12}^{K_2} \\ s_{22}^{K_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si on additionne les contributions, on obtient le système global :

$$10\,000 \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -6 & 3 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 0 \\ -12 \\ 2 \\ -12 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^{K_2} + s_{12}^{K_1} \\ s_{21}^{K_2} + s_{22}^{K_1} \\ s_{12}^{K_2} \\ s_{22}^{K_2} \\ \hline s_{11}^{K_1} \\ s_{21}^{K_1} \end{bmatrix}$$

— **Les conditions aux limites**

Deux conditions essentielles sont imposées :  $\delta_{u_5} = \delta_{u_6} = 0$ . Par contre, un cisaillement est imposé au nœud 3. Cela signifie que :

$$s_{12}^{K_2} = -50$$

et puisqu'aucun couple de flexion n'est imposé, on a :

$$s_{22}^{K_2} = 0$$

De plus, puisqu'aucun cisaillement ni couple de flexion n'est imposé au nœud 2, on a :

$$s_{11}^{K_2} + s_{12}^{K_1} = 0 \text{ et } s_{21}^{K_2} + s_{22}^{K_1} = 0$$

— **Résolution du système linéaire**

Après simplification, il reste le système linéaire :

$$10\,000 \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \\ \delta u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 0 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En résolvant ce système et en ajoutant les conditions essentielles ( $U^g = 0$ ) qui étaient imposées, on obtient la solution complète :

$$\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \\ \delta u_4 \\ \delta u_5 \\ \delta u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,173\,333 \times 10^{-2} \\ -2,060\,000 \times 10^{-2} \\ -3,626\,667 \times 10^{-2} \\ -2,640\,000 \times 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

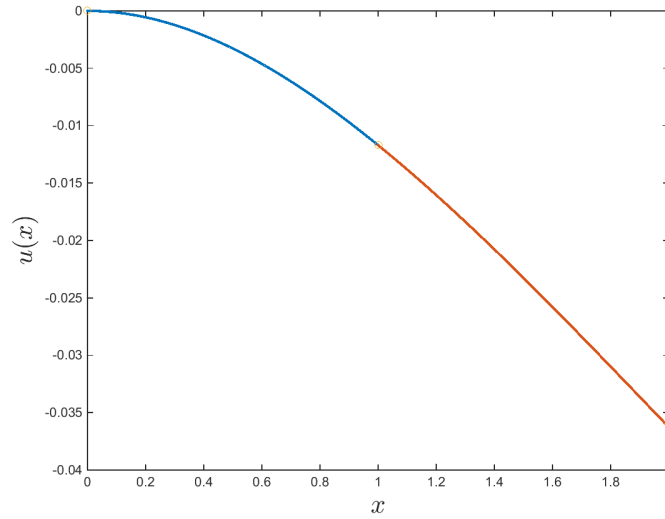


Figure 5.16 – Déformation de la poutre encastree

Puisque  $u_g(x) = 0$ , on a  $u(x) = \delta_u(x)$  et dans le premier élément, le tableau d'adressage nous permet d'écrire la solution :

$$\begin{aligned} u^{K_1}(x) &= \sum_{j=1}^4 u_j^{K_1} \psi_j^{K_1}(x) = u_5 \psi_1^{K_1}(x) + u_6 \psi_2^{K_1}(x) + u_1 \psi_3^{K_1}(x) + u_2 \psi_4^{K_1}(x) \\ &= -10^{-2} \left( 1,173\,333 \psi_3^{K_1}(x) + 2,060\,000 \psi_4^{K_1}(x) \right) \end{aligned}$$

De même sur le deuxième élément, on trouve :

$$\begin{aligned} u^{K_2}(x) &= \sum_{j=1}^4 u_j^{K_2} \psi_j^{K_2}(x) = u_1 \psi_1^{K_2}(x) + u_2 \psi_2^{K_2}(x) + u_3 \psi_3^{K_2}(x) + u_4 \psi_4^{K_2}(x) \\ &= -10^{-2} \left( 1,173\,333 \psi_1^{K_2}(x) + 2,060\,000 \psi_2^{K_2}(x) + 3,626\,667 \psi_3^{K_2}(x) + 2,640,000 \psi_4^{K_2}(x) \right) \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à récupérer les variables secondaires à la première extrémité de la poutre qui rappelons-le, n'étaient pas imposées. On a :

$$\begin{bmatrix} s_{11}^{K_1} \\ s_{21}^{K_1} \end{bmatrix} = 10\,000 \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \\ \delta u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98,0 \\ 148,0 \end{bmatrix}$$



Ce problème possède une solution analytique dans le cas plus général où on impose également un couple de flexion  $M_0$  à l'extrémité droite de la poutre :

$$\begin{aligned}u(x) &= \left( \frac{1}{24}r_0x^4 - \frac{1}{6}(f_0 + r_0L)x^3 + \frac{1}{2}(M_0 + f_0L + \frac{1}{2}r_0L^2)x^2 \right) / EI \\u'(x) &= \left( \frac{1}{6}r_0x^3 - \frac{1}{2}(f_0 + r_0L)x^2 + (M_0 + f_0L + \frac{1}{2}r_0L^2)x \right) / EI \\EIu''(x) &= \left( \frac{1}{2}r_0x^2 - (f_0 + r_0L)x + (M_0 + f_0L + \frac{1}{2}r_0L^2) \right) \\EIu'''(x) &= r_0x - (f_0 + r_0L)\end{aligned}$$

Il suffit de prendre  $M_0 = 0$  dans le cas qui nous intéresse. On présente les solutions analytiques et numériques à la figure [5.16](#).

### 5.3 Exercices

1. Dans le cas quadratique, on peut utiliser une base dite hiérarchique pour interpoler. On pose alors en vertu de l'équation 5.4 :

$$u(x) |_K \simeq u^K(x) = \sum_{j=1}^{n_D} u_j^K \psi_j^K(x)$$

où sur l'élément de référence, on pose  $\hat{\psi}_1(\xi) = (1-\xi)/2$ ,  $\hat{\psi}_2(\xi) = (1+\xi)/2$  et  $\hat{\psi}_3(\xi) = (1-\xi^2)$  c.-à-d. des fonctions linéaires sur les noeuds géométriques et une fonction quadratique au noeud milieu. Interpréter les  $u_j^K$  en fonction des valeurs aux noeuds de calcul  $u^K(x_i^K)$ .

2. Faire l'assemblage de la matrice et du système global de la page 109 en utilisant directement les systèmes élémentaires calculés.
3. Obtenir les fonctions d'interpolation d'Hermite de la page 118.
4. En vous servant des données de l'exemple 5.14 :
  - a) Calculer :

$$-T(x) \frac{du^{K_1}}{dx} \Big|_{x=0} = -400 \frac{du^{K_1}}{dx}(0)$$

en utilisant le passage à l'élément de référence et comparer avec la valeur de la réaction nodale  $s_{11}^{K_1} = 103,67$  que nous avons obtenue. Commenter sur le fait que ces deux quantités sont des approximations de  $-T(x) \frac{du}{dx} \Big|_{x=0}$  dont la valeur exacte est 104.

- b) Si on remplace les conditions aux limites actuelles ( $u(0) = u(5) = 0$ ) de ce problème par  $u(0) = 2$  et  $u(5) = -3$ , donner l'expression de la fonction de relèvement des conditions aux limites ( $u_g$ ) qui sera implicitement construite par notre méthode d'éléments finis. Dessiner-cette fonction sur le maillage de l'exemple 5.14.
5. La formulation variationnelle d'une équation différentielle fait intervenir un terme de la forme :

$$\int_{x_1^K}^{x_2^K} c_2 \frac{du}{dx}(x) w(x) dx$$

où  $c_2$  est une constante. Si on utilise des éléments linéaires, la matrice élémentaire associée à ce terme est de dimension 2 par 2. Évaluer la matrice élémentaire. **On passera bien sûr par l'élément de référence.**

6. Soit le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left( x^3 \frac{du}{dx} \right) + x^2 u = \frac{1}{x+1} \\ u(0) = -1 \\ u(1) = 3 \end{array} \right.$$

On considérera un maillage uniforme de 3 éléments de l'intervalle  $]0, 1[$  et on utilisera une approximation cubique dans chaque élément.

- a) Déterminer la fonction d'interpolation  $\hat{\psi}_3$  dans l'élément de référence.
- b) Dessiner le relèvement des conditions aux limites essentielles sur le maillage utilisé ;
- c) Déterminer le nombre de points de Gauss minimum afin d'évaluer exactement chaque terme de la formulation variationnelle ;
- d) Donner la table d'adressage correspondant au maillage utilisé ;
- e) Déterminer, en fonction des matrices élémentaires  $a_{ij}^K$ , la valeur de  $a_{33}$  et de  $a_{14}$  du système global.



## Chapitre 6

# Éléments finis multidimensionnels

Notre présentation de la méthode des éléments finis unidimensionnels était suffisamment générale pour passer facilement au cas multidimensionnel. Bien sûr quelques difficultés supplémentaires se présenteront mais rien de franchement nouveau. Il faudra par exemple accorder une attention accrue à la numérotation des degrés de liberté pour éviter des matrices exigeant trop d'espace-mémoire. Il est de plus évident que la taille des problèmes augmentera de manière significative, surtout en dimension 3.

### 6.1 Problème type

Nous considérerons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \nabla \cdot (q(\mathbf{x})\nabla u) = r(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \text{ sur } \Gamma_0 \\ q(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h(\mathbf{x}) \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

On suppose que la fonction  $p(\mathbf{x})$  est positive ou nulle et que  $0 < q_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq q_2$  sur le domaine  $\Omega$ . Nous supposerons de plus que les frontières  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  constituent une partition de la frontière  $\Gamma$  du domaine c.-à-d.  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  et  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ . Il faut de plus spécifier la régularité des conditions aux limites. Puisqu'il s'agit d'un problème d'ordre 2, on travaillera dans  $H^1(\Omega)$  et l'imposition de  $u(\mathbf{x})$  sera l'unique condition essentielle. Il s'en suit que l'espace fonctionnel approprié est l'espace  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . On doit donc supposer que  $g(\mathbf{x}) \in H^{1/2}(\Gamma_0)$  ce qui nous permettra d'effectuer le relèvement de la condition aux limites essentielle par une fonction  $u_g(\mathbf{x})$  de  $H^1(\Omega)$ .

Sous ces conditions, les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. On obtient de plus la formulation variationnelle (laissée en exercice) :

♠ Trouver  $\delta_u(\mathbf{x}) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  telle que :

$$a(\delta_u, w) = l(w) - a(u_g, w) \quad \forall w(\mathbf{x}) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$$

où :

$$a(\delta_u, w) = \int_{\Omega} (p(\mathbf{x})\delta_u(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\nabla\delta_u \cdot \nabla w) \, dv$$

et :

$$l(w) = \int_{\Omega} r(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) \, dv + \int_{\Gamma_1} h(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) \, ds$$

Ce problème généralise naturellement le problème 5.1 du chapitre 5.

## 6.2 Le maillage

Il est de toute évidence plus difficile de concevoir un maillage en dimension 2 ou 3. En effet, découper un domaine de forme quelconque en sous-domaines de formes géométriques simples n'est pas une mince tâche. Plusieurs techniques de génération de maillage existent avec des avantages et inconvénients de toutes sortes. Nous ne mentionnerons à ce sujet que le mailleur GMSH disponible gratuitement à l'adresse :

<http://geuz.org/gmsh/>

qui produit des maillages de triangles en dimension 2 et de tétraèdres en dimension 3.

Dans la majeure partie de ce chapitre, nous nous limiterons à des maillages très simples comportant peu d'éléments. Les applications de fin de chapitre permettront au lecteur de voir des exemples concrets et relativement réalistes.

Avant de parler de maillage, il faut décider de la forme géométrique des éléments. En dimension 1, ce choix est facile mais déjà en dimension 2, des variantes existent. Il faut choisir une forme géométrique simple. En dimension 2 nous considérerons les triangles et les quadrilatères tandis qu'en dimension 3 nous nous limiterons aux tétraèdres. En fait, la vaste majorité des mailleurs modernes produisent des triangles en dimension 2 et des tétraèdres en dimension 3. Il est en effet beaucoup plus difficile de décomposer un domaine en quadrilatères (en dimension 2) et en hexaèdres (en dimension 3).

La forme géométrique des éléments étant choisie, on suppose que nous avons un maillage comportant  $nel$  éléments tel qu'illustré à la figure 6.11.

### 6.2.1 Les nœuds

Sur chaque élément  $K$ , on définit  $n_g^K$  nœuds géométriques. Très souvent, les nœuds géométriques correspondent aux sommets du triangle, du quadrilatère ou du tétraèdre. Le choix des nœuds géométriques déterminera la transformation à l'élément de référence.

Comme en dimension 1, on introduit également les nœuds de calcul où on évaluera les valeurs des variables essentielles du problème. On supposera ici encore, bien que ce ne soit pas absolument nécessaire, que les nœuds de calcul comprennent les nœuds géométriques. Le nombre total de nœuds de l'élément  $K$  est noté  $n_c^K$ .

On place les coordonnées de tous les nœuds (géométriques et/ou de calcul) du maillage dans le tableau *coor* de dimension  $nnoeuds$  multipliée par la dimension d'espace  $d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ). Enfin, le tableau de connectivité des nœuds *connec* contient, pour chaque élément  $K$  les numéros de ses  $n_c^K$  nœuds de calcul (en plaçant les nœuds géométriques en premier).

### 6.2.2 Les degrés de liberté

On associe à chaque nœud de calcul un certain nombre de degrés de liberté (au total  $n_d^K$  sur chaque élément), dépendant du nombre de variables essentielles du problème. Ici encore, on numérotera en dernier les degrés de liberté qui sont imposés par les conditions aux limites essentielles du problème donné. On a donc la partition :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{nddl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^I \\ U^C \end{bmatrix}$$

où  $nddl$  désigne le nombre total de degrés de liberté du maillage.

Rappelons qu'on associe à chaque degré de liberté une fonction de Ritz qui sera construite élément par élément. La méthode de Ritz-Galerkin nous mènera à la résolution d'un système linéaire global de la forme :

$$A\delta_U = F + S \quad (6.2)$$

suivant une notation similaire à celle des éléments unidimensionnels (voir la relation 5.19).

### 6.2.3 Numérotation des degrés de liberté

S'il est relativement simple de numéroter les degrés de liberté en dimension 1, il faut être beaucoup plus prudent en dimension supérieure. En effet, cette numérotation a une influence majeure sur la structure de la matrice globale qui sera assemblée. Nous avons vu que les matrices engendrées par la méthode des éléments finis sont creuses c.-à-d. contiennent une part importante de zéros. Cette structure dépend directement du tableau *adres* qui détermine si un degré de liberté  $i$  est connecté ou non à un autre degré de liberté  $j$ . Si tel est le cas, le coefficient  $a_{ij}$  de la matrice globale sera non nul. Sinon, on a tout simplement  $a_{ij} = 0$ . Pour que 2 degrés de liberté soient connectés, il faut et il suffit qu'ils apparaissent tous deux dans une même ligne du tableau *adres*. C'est une autre façon de dire que les supports des fonctions de Ritz associées à ces degrés de liberté s'intersectent.

Introduisons immédiatement un peu de terminologie. On définit la *largeur de bande* de la ligne  $i$  du système 6.2 par la relation :

$$l_i = \max_{j \geq i | a_{ij} \neq 0} (j - i + 1)$$

Il s'agit tout simplement de la distance entre la diagonale de la matrice et le dernier terme non nul de la ligne  $i$ . En d'autres termes,  $a_{ij} = 0$  pour  $j \geq i + l_i$ . De même, la *largeur de bande maximale*  $l_{max}$  est la plus grande valeur des  $l_i$  c.-à-d. :

$$l_{max} = \max_i l_i$$

Il est important de concentrer les termes non nuls de la matrice au voisinage de la diagonale principale de façon à diminuer l'espace-mémoire requis. Cela revient à minimiser les largeurs de bande. On obtient ainsi une matrice dite *matrice bande* ou plus précisément une matrice dite en *ligne de ciel*. Cela est particulièrement important si on utilise une décomposition  $LU$  pour la résolution

du système linéaire global. En effet, cette méthode préserve la structure bande de la matrice de sorte que l'on peut stocker la décomposition  $LU$  sans augmenter la mémoire nécessaire. Sur chaque ligne du système, les termes au delà d'une distance  $l_i$  de la diagonale sont nuls et resteront nuls après la décomposition  $LU$ . Il suffit pour s'en convaincre de regarder l'algorithme de la décomposition  $LU$  (voir Fortin, réf.[25]) :

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \quad \text{et} \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}$$

En pratique, on donne une numérotation quelconque des degrés de liberté dans le tableau *numer*. Par la suite, on passe les tableaux *numer* et *connec* à un programme d'optimisation qui renumérottera les degrés de liberté (en modifiant le tableau *numer*) et créera le tableau *adres* suivant un certain critère d'optimisation. On voudra par exemple minimiser la largeur de bande maximale  $l_{max}$  de la matrice ou encore minimiser :

$$\sum_i l_i$$

qui est une indication de l'espace-mémoire nécessaire. Différents algorithmes de numérotation des degrés de liberté existent et nous ne mentionnerons que celui de Cuthill-McKee [32].

Pour illustrer ce point, on présente à la figure 6.1 un exemple typique de matrice creuse (de dimension 60 par 60) semblables à celles obtenues par éléments finis. On indique seulement les termes non nuls par un point. Si on renumérote les degrés de liberté à l'aide de l'algorithme de Cuthill-McKee, on obtient la deuxième matrice de la figure 6.1. On remarque aisément la diminution de la largeur de bande entre les deux matrices illustrées. Ainsi, entre les deux numérotations (entre les deux vecteurs *numer*), la largeur de bande maximale  $l_{max}$  est passée de 35 à 12. Il en résulte une économie d'espace-mémoire et généralement une plus grande rapidité de résolution du système linéaire.

### 6.3 Formulation variationnelle élémentaire

La formulation variationnelle élémentaire s'obtient à partir de l'équation aux dérivées partielles de départ mais en intégrant cette fois sur un élément  $K$ . On obtient ainsi à l'aide de la relation A.5 :

$$\int_K (p(\mathbf{x})u(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\nabla u \cdot \nabla w) dv = \int_K r(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K} s^K(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) ds$$

On a ainsi introduit la variable secondaire :

$$s^K(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^K}$$

où  $\mathbf{n}^K$  est le vecteur normal extérieur à la frontière  $\partial K$  de  $K$ . La variable  $s^K(\mathbf{x})$  est la condition naturelle de ce problème. On passe maintenant en correction :

$$\begin{aligned} & \int_K (p(\mathbf{x})\delta_u(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\nabla \delta_u \cdot \nabla w) dv \\ &= \int_K r(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) dv - \int_K (p(\mathbf{x})u_g(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\nabla u_g \cdot \nabla w) dv + \int_{\partial K} s^K(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$



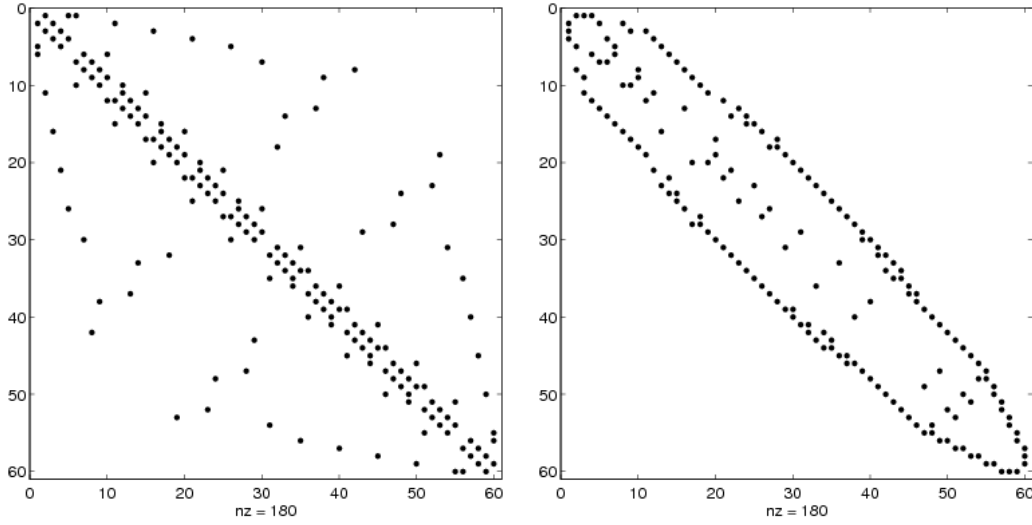


Figure 6.1 – Structure de la matrice avant et après renumérotation

On applique la méthode de Ritz sur chaque élément  $K$  en posant :

$$\delta_u(\mathbf{x})|_K \simeq \delta_u^K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_d^K} \delta_{u_j}^K \psi_j^K(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad u_g^K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \psi_j^K(\mathbf{x}) \quad (6.3)$$

Remplaçant dans la formulation variationnelle et en prenant successivement  $w(\mathbf{x}) = \psi_i^K(\mathbf{x})$ , pour  $i$  allant de 1 jusqu'à  $n_d^K$ . On obtient ainsi le système :

$$A^K \delta_U^K = F^K + S^K$$

où :

$$a_{ij}^K = \int_K \left( p(\mathbf{x}) \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \nabla \psi_j^K(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i^K(\mathbf{x}) \right) dv$$

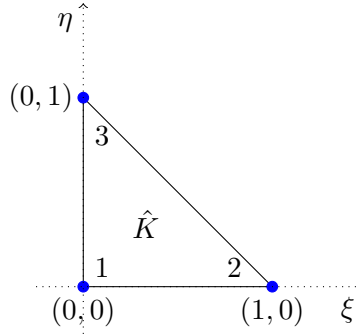
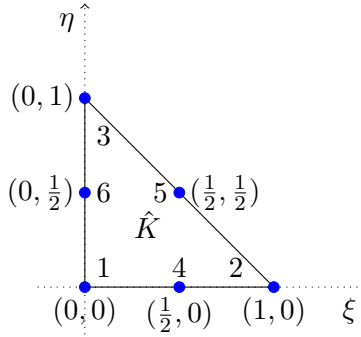
$$f_i^K = \int_K r(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) dv - \int_K \left( p(\mathbf{x}) u_g^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \nabla u_g^K(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i^K(\mathbf{x}) \right) dv$$

et :

$$s_i^K = \int_{\partial K} s^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) ds$$

## 6.4 Passage à l'élément de référence

C'est ici que le choix de la forme de l'élément et le choix des nœuds géométriques prennent beaucoup d'importance. Tout comme en dimension 1, l'élément de référence  $\hat{K}$  est un élément

Figure 6.2 – Élément de référence triangulaire à 3 nœuds ( $n_g^K = 3$ )Figure 6.3 – Élément de référence triangulaire à 6 nœuds ( $n_g^K = 6$ )

sur lequel on effectue tous les calculs nécessaires à l'obtention du système élémentaire. Ceci n'est possible qu'après un changement de variables. Contrairement au cas unidimensionnel, plusieurs choix d'éléments de référence sont envisageables et certains sont illustrés aux figures 6.2 à 6.6. Il reste à déterminer la transformation de l'élément réel à l'élément de référence que nous appellerons encore ici la *transformation géométrique*.

Pour éviter une lourdeur excessive de la notation, nous choisissons de prendre comme vecteur position  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  au lieu de  $(x_1, x_2, x_3)$ . De même sur l'élément de référence, on prendra  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ .

À chaque nœud géométrique  $\mathbf{x}_i^K = (x_i^K, y_i^K, z_i^K)$  de l'élément  $K$  doit correspondre un nœud géométrique  $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  sur l'élément de référence  $\hat{K}$ . La transformation  $T^K$  vérifie donc :

$$T^K(\boldsymbol{\xi}_i) = \mathbf{x}_i^K \quad \text{ou inversement} \quad (T^K)^{-1}(\mathbf{x}_i^K) = \boldsymbol{\xi}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_g^K$$

Pour déterminer la transformation géométrique, il suffit de trouver une base de polynômes de dimension égale au nombre de nœuds géométriques. On construit ensuite  $n_g^K$  fonctions d'interpolation

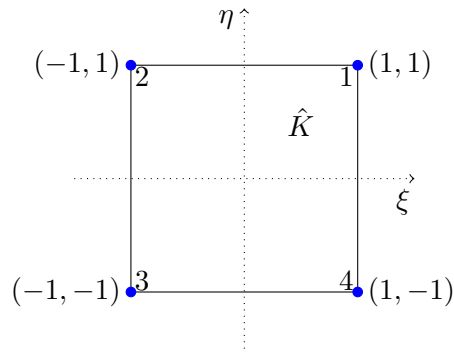


Figure 6.4 – Élément de référence quadrangulaire à 4 nœuds ( $n_g^K = 4$ )

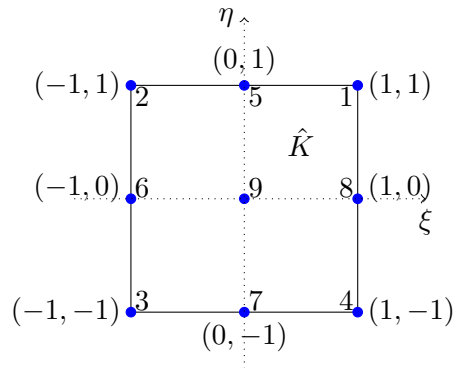
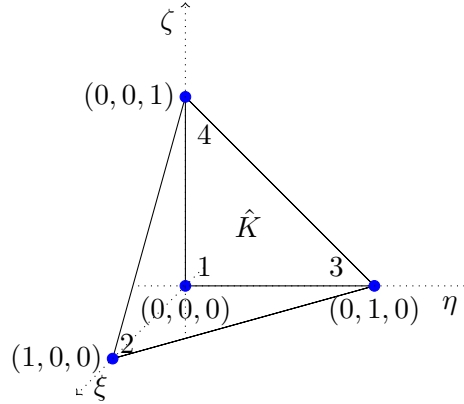


Figure 6.5 – Élément de référence quadrangulaire à 9 nœuds ( $n_g^K = 9$ )

Figure 6.6 – Élément de référence tétraédrique à 4 nœuds ( $n_g^K = 4$ )

géométriques vérifiant :

$$L_i(\xi_j) = 1 \text{ si } i = j \text{ et } 0 \text{ autrement.} \quad (6.4)$$

C'est la base même de l'interpolation de Lagrange (voir l'annexe B) et les fonctions  $L_i(\xi)$  sont bien sûr les fonctions d'interpolation de Lagrange. Il est facile de vérifier que la transformation :

$$T^K : \quad \hat{K} \quad \rightarrow \quad K$$

$$\xi = (\xi, \eta, \zeta) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = (x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_g^K} \mathbf{x}_i^K L_i(\xi) \quad (6.5)$$

possède les propriétés désirées. Il faudra ensuite transformer les dérivées des fonctions d'interpolation. C'est la technique classique de la dérivation en chaîne. Pour ce faire, il est utile d'introduire la *matrice jacobienne*  $DT^K$  associée et son inverse noté  $B^K$  que l'on définit par :

$$DT^K = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B^K = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Il est facile de déterminer les coefficients de cette matrice, simplement en dérivant la relation 6.5. La matrice jacobienne doit être inversible pour que la transformation  $T^K$  le soit aussi. Il suffit donc que le déterminant  $J^K$  de cette matrice soit non nul. On appelle ce déterminant le *jacobien* de la

transformation. Toute fonction d'interpolation  $\psi^K(x, y, z)$  est ainsi définie à partir de l'élément de référence par la relation :

$$\psi^K(x, y, z) = \psi^K(T^K(\xi, \eta, \zeta)) = \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta)$$

Pour transformer les dérivées partielles, la dérivation en chaîne nous donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi^K(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi^K(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi^K(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

ou encore sous forme compacte :

$$\left[ \nabla_{\mathbf{x}} \psi^K(x, y, z) \right] = (B^K)^\top \left[ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta) \right]$$

La matrice  $B^K$  est essentielle pour l'évaluation du système élémentaire. On l'obtient en constatant que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi^K(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi^K(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi^K(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

qui s'écrit également :

$$\left[ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta) \right] = (DT^K)^\top \left[ \nabla_{\mathbf{x}} \psi^K(x, y, z) \right]$$

En combinant les relations 6.6 et 6.7, on conclut que la matrice de passage  $B^K$  n'est autre que  $(DT^K)^{-1}$  c'est-à-dire l'inverse de la matrice jacobienne. On a ainsi :

$$\left[ \nabla_{\mathbf{x}} \psi^K(x, y, z) \right] = (DT^K)^{-\top} \left[ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta) \right] = (B^K)^\top \left[ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta) \right] \quad (6.8)$$

Le système élémentaire devient ensuite :

$$\begin{aligned}
a_{ij}^K &= \int_K \left( p(\mathbf{x}) \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \nabla \psi_j^K(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i^K(\mathbf{x}) \right) dv \\
&= \int_K \left( p(\mathbf{x}) \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \left[ \nabla_{\mathbf{x}} \psi_j^K(x, y, z) \right]^\top \left[ \nabla_{\mathbf{x}} \psi_i^K(x, y, z) \right] \right) dv \\
&= \int_{\hat{K}} \left( p(T^K(\boldsymbol{\xi})) \hat{\psi}_j(\boldsymbol{\xi}) \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) + q(T^K(\boldsymbol{\xi})) \left[ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\psi}_j(\boldsymbol{\xi}, \eta, \zeta) \right]^\top (B^K)(B^K)^\top \left[ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}, \eta, \zeta) \right] \right) J^K d\hat{v} \\
f_i^K &= \int_{\hat{K}} r(T^K(\boldsymbol{\xi})) \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) J^K d\hat{v} - \int_{\hat{K}} p(T^K(\boldsymbol{\xi})) \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \hat{\psi}_j(\boldsymbol{\xi}) \right) \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) J^K d\hat{v} \\
&\quad - \int_{\hat{K}} q(T^K(\boldsymbol{\xi})) \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{g_j}^K \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\psi}_j(\boldsymbol{\xi}, \eta, \zeta) \right) \right]^\top (B^K)(B^K)^\top \left[ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}, \eta, \zeta) \right] J^K d\hat{v} \\
s_i^K &= \int_{\partial K} s^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) ds
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Remarquons que l'intégrale sur la frontière des éléments n'a pas été transformée. On le fera plus tard si le besoin s'en fait sentir.

**Exemple 6.1.** Considérons en premier lieu des transformations géométriques linéaires en dimension 2. Tout d'abord sur le triangle à 3 nœuds géométriques ( $n_g^K = 3$ ) de la figure 6.7. L'élément de référence est indiqué à la figure 6.2. La transformation  $T^K$  s'écrit à l'aide des fonctions de Lagrange B.3 sous la forme :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= T^K(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^3 L_i(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} x_i^K \\ y_i^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(\boldsymbol{\xi})x_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})x_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})x_3^K \\ L_1(\boldsymbol{\xi})y_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})y_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})y_3^K \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta)x_1^K + \xi x_2^K + \eta x_3^K \\ (1 - \xi - \eta)y_1^K + \xi y_2^K + \eta y_3^K \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que les fonctions  $L_i(\boldsymbol{\xi})$  vérifient la condition 6.4. La matrice jacobienne est alors :

$$DT^K = \begin{bmatrix} x_2^K - x_1^K & x_3^K - x_1^K \\ y_2^K - y_1^K & y_3^K - y_1^K \end{bmatrix}$$

Le jacobien  $J^K$  de cette transformation n'est nul que si les points  $\mathbf{x}_i^K$  sont colinéaires et donc si le triangle est dégénéré. De plus :

$$B^K = (DT^K)^{-1} = \frac{1}{J^K} \begin{bmatrix} y_3^K - y_1^K & x_1^K - x_3^K \\ y_1^K - y_2^K & x_2^K - x_1^K \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

et on montre de plus facilement que  $J^K = 2 \times \text{aire}(K)$  (en exercice). Notons enfin que le jacobien est une constante sur l'élément  $K$  et ne dépend pas de  $\boldsymbol{\xi}$ . Ce ne sera pas toujours le cas. ♦

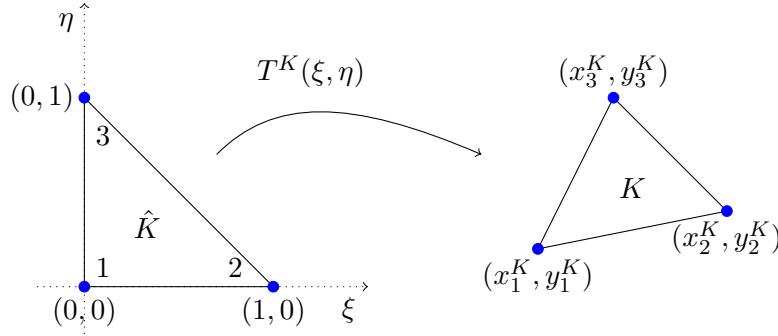


Figure 6.7 – Transformation linéaire sur un triangle ( $n_g^K = 3$ )

**Remarque 6.2.** Dans le cas d’une approximation linéaire sur les éléments triangulaires, et si de plus  $p(x) = 0$ ,  $u_g(x) = 0$  et les fonctions  $q(x)$  et  $r(x)$  sont constantes par élément ( $q(x) = q^K$  et  $r(x) = r^K$  sur l’élément  $K$ ), on peut facilement évaluer le système élémentaire (voir Reddy, réf. [52]) et on obtient :

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^K &= \frac{q^K}{4A^K} (\beta_i^K \beta_j^K + \gamma_i^K \gamma_j^K) \\
 f_i^K &= \frac{1}{3} r^K A^K
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

où  $A^K$  est l’aire de l’élément et les constantes  $\beta_i^K$  et  $\gamma_i^K$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 \beta_1^K &= y_2^K - y_3^K & \gamma_1^K &= -(x_2^K - x_3^K) \\
 \beta_2^K &= y_3^K - y_1^K & \gamma_2^K &= -(x_3^K - x_1^K) \\
 \beta_3^K &= y_1^K - y_2^K & \gamma_3^K &= -(x_1^K - x_2^K)
 \end{aligned}$$



**Exemple 6.3.** Considérons maintenant une transformation géométrique dite bilinéaire. On considère des éléments quadrangulaires à 4 sommets ( $n_g^K = 4$ ). L’élément de référence est indiqué à la figure 6.4. La transformation  $T^K$  s’écrit dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^K(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^4 L_i(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} x_i^K \\ y_i^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(\boldsymbol{\xi})x_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})x_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})x_3^K + L_4(\boldsymbol{\xi})x_4^K \\ L_1(\boldsymbol{\xi})y_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})y_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})y_3^K + L_4(\boldsymbol{\xi})y_4^K \end{bmatrix}$$

où les fonctions  $L_i(\boldsymbol{\xi})$  sont données au tableau B.7 :

$$L_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$L_2(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$L_3(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$L_4(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

La matrice jacobienne exige un peu de calcul et on obtient sous forme compacte :

$$DT^K = \begin{bmatrix} B_{11}^K + \eta C_{11}^K & B_{12}^K + \xi C_{12}^K \\ B_{21}^K + \eta C_{21}^K & B_{22}^K + \xi C_{22}^K \end{bmatrix}$$

où :

$$B_{11}^K = \frac{1}{4}(x_1^K - x_2^K - x_3^K + x_4^K) \quad C_{11}^K = \frac{1}{4}(x_1^K - x_2^K + x_3^K - x_4^K)$$

$$B_{12}^K = \frac{1}{4}(x_1^K + x_2^K - x_3^K - x_4^K) \quad C_{12}^K = \frac{1}{4}(x_1^K - x_2^K + x_3^K - x_4^K)$$

$$B_{21}^K = \frac{1}{4}(y_1^K - y_2^K - y_3^K + y_4^K) \quad C_{21}^K = \frac{1}{4}(y_1^K - y_2^K + y_3^K - y_4^K)$$

$$B_{22}^K = \frac{1}{4}(y_1^K + y_2^K - y_3^K - y_4^K) \quad C_{22}^K = \frac{1}{4}(y_1^K - y_2^K + y_3^K - y_4^K)$$

Le déterminant est de toute évidence non constant et est bien une fonction de  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ . Notons de plus que :

$$B^K = (DT^K)^{-1} = \frac{1}{J^K} \begin{bmatrix} B_{22}^K + \xi C_{22}^K & -(B_{12}^K + \xi C_{12}^K) \\ -(B_{21}^K + \eta C_{21}^K) & B_{11}^K + \eta C_{11}^K \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

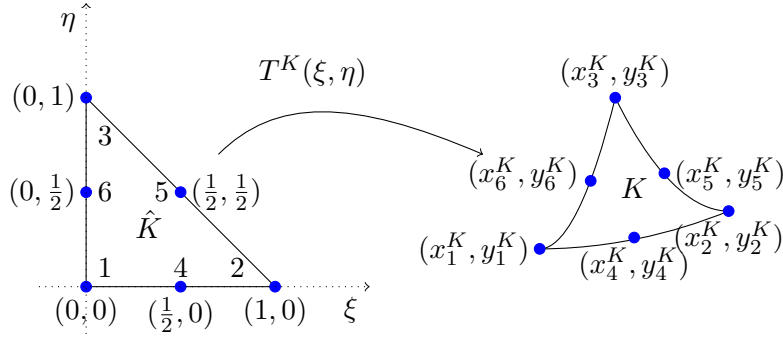


**Exemple 6.4.** Les 2 exemples précédents nécessitent l'utilisation de triangles ou de quadrilatères ayant des côtés droits. Cela est dû aux transformations linéaires (ou bilinéaires) qui assurent qu'un segment de droite (et donc un côté droit) est transformé en un autre segment de droite. Cependant, il est parfois utile de prendre des éléments ayant des côtés courbes. Pensons par exemple à une géométrie où il y a un arc de cercle. Il est de toute évidence plus facile d'approcher un arc de cercle par des triangles (ou des quadrilatères) ayant des côtés courbes.

Pour illustrer une telle situation, considérons maintenant une transformation géométrique quadratique en dimension 2 sur le triangle à 6 nœuds géométriques ( $n_g^K = 6$ ) (illustré à la figure 6.3). Cette transformation est illustrée à la figure 6.8. La transformation  $T^K$  s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^K(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^6 L_i(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} x_i^K \\ y_i^K \end{bmatrix}$$




 Figure 6.8 – Transformation quadratique sur un triangle ( $n_g^K = 6$ )

On trouvera la liste des fonctions d'interpolation  $L_i(\boldsymbol{\xi})$  au tableau B.4. Il est important qu'une telle transformation n'a pas un jacobien constant (contrairement à la transformation linéaire) et que l'on doit en tenir compte lors du choix de la formule d'intégration numérique.  $\blacklozenge$

**Remarque 6.5.** La plupart des mailleurs disponibles vont générer à la base des éléments à côtés droits en dimension deux ou à faces planes en dimension 3. Pour des géométries de domaines polygonaux ou polyédriques, une transformation géométrique linéaire (ou bilinéaire pour les quadrangles) sera suffisante. De toute manière, une transformation géométrique quadratique dégénérera en une transformation linéaire et ne changera strictement rien.

Pour une géométrie courbe toutefois, on commencera par générer des éléments à côtés droits dont seuls les sommets sont sur la frontière tel qu'illustré à la figure 6.9 où la frontière est un arc de cercle. Par la suite, si on souhaite interpoler quadratiquement, il est préférable de projeter les milieux d'arêtes sur la frontière courbe, généralement au point le plus proche. De cette manière, on conservera toute la précision de l'interpolation quadratique. Par conséquent, l'un des côtés du triangle aura une frontière parabolique (indiquée en rouge sur la figure). On notera que même cette arête courbe ne coïncide pas parfaitement avec la frontière à moins qu'elle ne soit elle-même parabolique. Une transformation géométrique quadratique (illustrée à la figure 6.8) nous ramènera alors sur l'élément de référence. Notons enfin que cette transformation préservera les côtés qui sont droits mais prendra le côté courbe en compte.  $\blacktriangleleft$

**Exemple 6.6.** Passons au cas tridimensionnel et considérons une transformation géométrique linéaire. Tout d'abord sur le tétraèdre à 4 nœuds géométriques ( $n_g^K = 4$ ). L'élément de référence est indiqué à la figure 6.6. La transformation  $T^K$  (voir la figure 6.10) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T^K(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} L_1(\boldsymbol{\xi})x_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})x_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})x_3^K + L_4(\boldsymbol{\xi})x_4^K \\ L_1(\boldsymbol{\xi})y_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})y_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})y_3^K + L_4(\boldsymbol{\xi})y_4^K \\ L_1(\boldsymbol{\xi})z_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})z_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})z_3^K + L_4(\boldsymbol{\xi})z_4^K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta - \zeta)x_1^K + \xi x_2^K + \eta x_3^K + \zeta x_4^K \\ (1 - \xi - \eta - \zeta)y_1^K + \xi y_2^K + \eta y_3^K + \zeta y_4^K \\ (1 - \xi - \eta - \zeta)z_1^K + \xi z_2^K + \eta z_3^K + \zeta z_4^K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

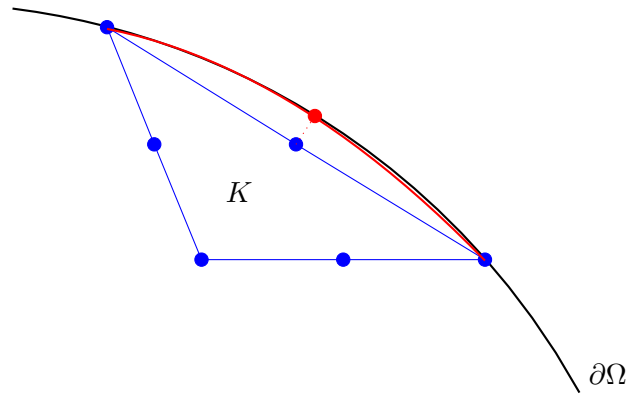


Figure 6.9 – Géométrie courbe en dimension 2

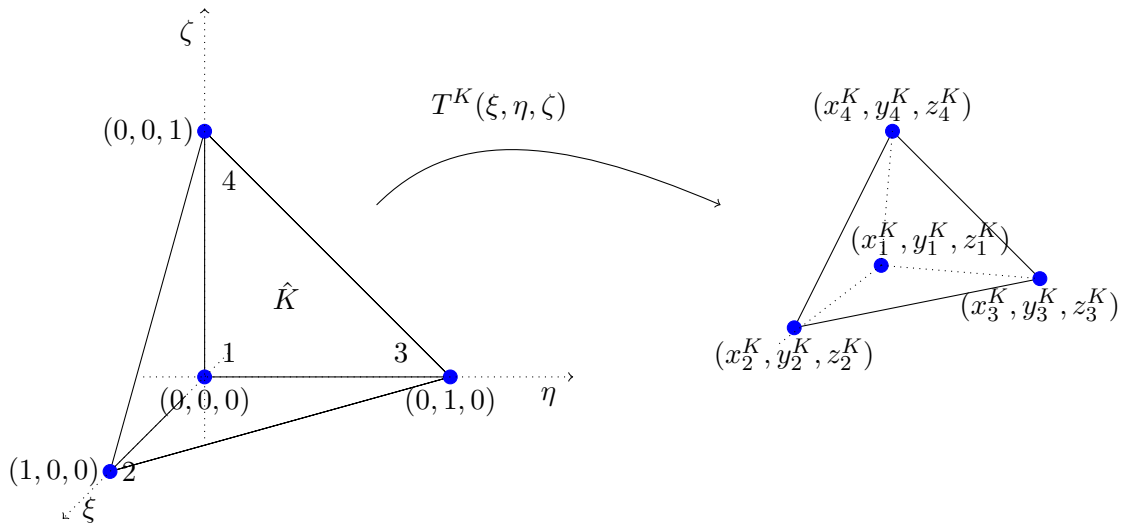


Figure 6.10 – Transformation linéaire sur un tétraèdre ( $n_g^K = 4$ )

Il est facile de vérifier que les fonctions  $L_i(\boldsymbol{\xi})$  vérifient la condition 6.4. La matrice jacobienne est alors :

$$DT^K = \begin{bmatrix} x_2^K - x_1^K & x_3^K - x_1^K & x_4^K - x_1^K \\ y_2^K - y_1^K & y_3^K - y_1^K & y_4^K - y_1^K \\ z_2^K - z_1^K & z_3^K - z_1^K & z_4^K - z_1^K \end{bmatrix}$$

Le jacobien  $J^K$  de cette transformation n'est nul que si les points  $\mathbf{x}_i^K$  sont coplanaires et donc si le tétraèdre est dégénéré. Notons de plus que si on dénote  $t_{ij}^K$  les coefficients de la matrice  $DT^K$ , la matrice inverse s'écrit :

$$B^K = (DT^K)^{-1} = \frac{1}{J^K} \begin{bmatrix} t_{22}^K t_{33}^K - t_{32}^K t_{23}^K & t_{31}^K t_{23}^K - t_{21}^K t_{33}^K & t_{21}^K t_{32}^K - t_{31}^K t_{22}^K \\ t_{13}^K t_{32}^K - t_{12}^K t_{33}^K & t_{11}^K t_{33}^K - t_{13}^K t_{31}^K & t_{12}^K t_{31}^K - t_{32}^K t_{11}^K \\ t_{12}^K t_{23}^K - t_{13}^K t_{22}^K & t_{21}^K t_{13}^K - t_{23}^K t_{11}^K & t_{11}^K t_{22}^K - t_{12}^K t_{21}^K \end{bmatrix}$$

On montre de plus facilement que  $J^K = 6 \times \text{volume}(K)$  (en exercice). Notons qu'encore ici que le jacobien est une constante et ne dépend pas de  $\boldsymbol{\xi}$ . ♦

## 6.5 Construction des fonctions d'interpolation

Tout comme en dimension 1, à chaque nœud de calcul ( $\mathbf{x}_1^K, \mathbf{x}_2^K, \dots, \mathbf{x}_{n_c}^K$ ) de l'élément réel  $K$ , correspond un nœud d'interpolation ( $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n_c}$ ) sur l'élément de référence par la relation :

$$\boldsymbol{\xi}_i = (T^K)^{-1}(\mathbf{x}_i^K) \text{ ou encore } \mathbf{x}_i^K = T^K(\boldsymbol{\xi}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n_c^K$$

Sur l'élément  $K$ , à chaque degré de liberté de chaque nœud de calcul correspond une fonction d'interpolation  $\psi_j^K(\mathbf{x})$ . Ces fonctions ne seront construites que sur l'élément de référence et en se servant de la transformation  $T^K$ , on aura :

$$\psi_j^K(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_j(\boldsymbol{\xi})$$

et en particulier :

$$\psi_j^K(\mathbf{x}_i^K) = \hat{\psi}_j(\boldsymbol{\xi}_i)$$

Généralement, il n'y a nul besoin de construire explicitement les fonctions  $\psi_j^K(\mathbf{x})$  puisque nous ne travaillerons que sur l'élément de référence. La seule différence existant avec le cas unidimensionnel est la plus grande variété de transformations  $T^K$  que l'on peut utiliser.

Le choix des fonctions  $\psi_j^K(\mathbf{x})$  dépend du problème que l'on souhaite résoudre et plus particulièrement de l'espace  $V$  de la formulation variationnelle. Pour le moment nous nous limiterons aux équations aux dérivées partielles d'ordre 2 de sorte que l'espace  $V$  sera  $H^1(\Omega)$  ou l'un de ses sous-espaces. Pour construire des fonctions d'interpolation de  $H^1(\Omega)$ , rappelons que l'on doit s'assurer de la continuité à la frontière des éléments. Cela est une conséquence du théorème 2.12.

Pour les problèmes d'ordre 2, on peut utiliser l'interpolation de Lagrange décrite à la section B.2 de l'annexe B. On préfère généralement les approximations linéaires ou quadratiques, que ce soit sur les triangles, les quadrilatères, les tétraèdres ou les hexaèdres. Bien entendu, rien n'empêche d'utiliser des polynômes de degré plus élevé mais le nombre de degrés de liberté augmente rapidement avec le degré des polynômes.

## 6.6 Évaluation du système élémentaire

Pour évaluer les coefficients du système élémentaire 6.9, on recourt le plus souvent à l'intégration numérique, bien que l'intégration exacte puisse être utile dans les cas très simples (interpolation de bas degré et propriétés  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $r(x)$  constantes par exemple).

Il n'y a pas de difficultés particulières mis-à-part le fait que le nombre de points d'intégration augmente lorsqu'on passe en dimension 2 ou 3. Ainsi, on trouvera à l'annexe C les points et les poids d'intégration de quelques unes des quadratures les plus utilisées en pratique. Ainsi sur les quadrilatères et les hexaèdres, on peut utiliser les mêmes quadratures qu'en dimension 1 (voir le tableau C.1 par le biais des relations C.4 et C.5).

Sur les triangles ou les tétraèdres, on utilise les quadratures dites de Hammer données aux tableaux C.2 et C.3. Rappelons que le degré de précision de la quadrature est un critère important dans le choix de la quadrature appropriée au calcul de termes du système élémentaire.

## 6.7 Assemblage

L'assemblage suit exactement les mêmes étapes qu'en dimension 1. Bien sûr la taille des matrices élémentaires augmente avec la dimension d'espace et le degré des fonctions d'interpolation mais les principes généraux demeurent les mêmes. On utilise l'algorithme de la page 98 qui ne change nullement avec la dimension d'espace.

La fonction de Ritz  $\phi_i(\mathbf{x})$  associée au  $i^{\text{ième}}$  degré de liberté du problème résulte de l'assemblage des fonctions d'interpolation locales  $\psi_j^K(\mathbf{x})$  sur les éléments  $K$  qui contiennent le degré de liberté numéro  $i$  dans leur tableau d'adressage. On aura donc pour ces éléments :

$$adres(K, j) = i$$

pour un certain  $j$  compris entre 1 et  $n_d^K$ .

## 6.8 Imposition des conditions aux limites

Une fois tous les systèmes élémentaires assemblés et en vertu de la convention utilisée pour le tableau *numer*, on obtient un système global de la forme :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_U^I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^C \\ F_2^C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^C \\ S^I \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

La partition de la matrice  $A$  suit directement celle du vecteur global des degrés de liberté  $U$ . Les matrices  $M_{11}$  et  $M_{22}$  sont toujours carrées et les matrices  $M_{12}$  et  $M_{21}$  sont rectangulaires. Si la forme bilinéaire du problème est symétrique, on a  $M_{12}^T = M_{21}$ . Les matrices  $M_{12}$  et  $M_{22}$  pourraient ne pas être assemblées puisqu'elles n'ont aucun rôle par la suite.

Enfin, il reste à analyser le terme de droite composé de 2 parties. Le vecteur  $F$  est entièrement déterminé et ne pose aucun problème. Par contre, le vecteur  $S$  contenant la contribution des variables secondaires est lui aussi décomposé en 2 parties. Là où la variable essentielle est imposée (et donc connue), nous avons vu que la condition naturelle est inconnue et vice versa.

Bien que similaire, la situation est légèrement plus complexe que dans le cas unidimensionnel et mérite donc une attention particulière. Rappelons que le vecteur  $S$  est constitué de l'assemblage de termes de la forme :

$$s_i^K = \int_{\partial K} s^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) ds$$

où :

$$s^K(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^K}$$

Comme nous le verrons plus loin, le traitement du vecteur  $S$  est sensiblement plus délicat que dans le cas unidimensionnel.

## 6.9 Résolution du système linéaire global

Pour la résolution du système linéaire on procède toujours en 2 étapes. Tout d'abord, on détermine le vecteur  $U^I$  en résolvant le système linéaire :

$$M_{11} \delta_U^I = F_1^C + S^C \quad (6.14)$$

qui n'est qu'une réécriture de la première équation du système 6.13. On remarque que le terme de droite est entièrement connu. Pour cela, on utilise les techniques classiques comme la méthode de décomposition  $LU$ . Remarquons que cette équation n'est rien d'autre que la discrétisation de la forme variationnelle :

$$a(\delta_u, w) = l(w) - a(u_g, w)$$

puisque le vecteur  $U^C$  correspond au relèvement des conditions essentielles  $u_g$ .

Une fois le vecteur  $U^I$  calculé, on détermine si nécessaire le vecteur  $S^I$  directement en posant :

$$S^I = M_{21} \delta_U^I - F_2^C \quad (6.15)$$

## 6.10 Présentation des résultats

Nous n'insisterons jamais assez sur l'importance d'un bon visualisateur, particulièrement en dimension 2 et 3. Si en dimension 1 on peut se débrouiller avec des instruments graphiques simples, ce n'est plus le cas en dimension supérieure. Pour les résultats qui suivent, nous utiliserons le logiciel VU développé par Benoît Ozell [47] et qui possède toutes les fonctionnalités requises en dimension 2 ou 3.

Un bon logiciel de visualisation sera capable de produire rapidement des courbes d'isovaleurs des différentes variables calculées, des champs de vecteurs, des coupes de toutes sortes, qui permettent de donner une signification à des colonnes de chiffres qui autrement seraient difficilement utilisables.

## 6.11 Exemples et applications

Dans cette section, nous présentons quelques exemples simples sur des maillages de petite taille pour illustrer la méthode et les différentes étapes à suivre. Nous terminons par des applications dans différents domaines.

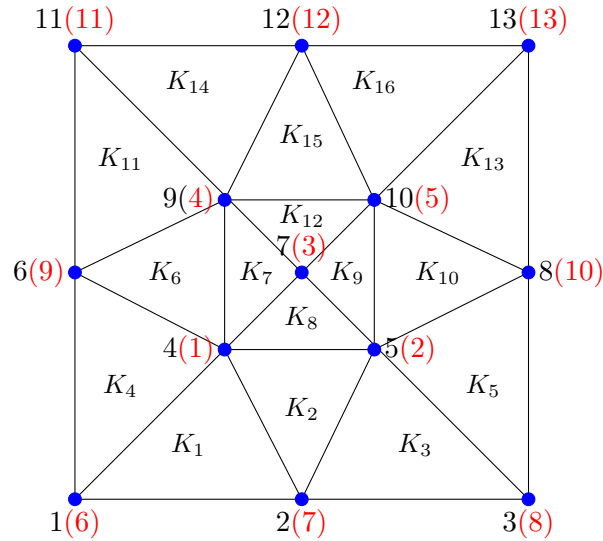


Figure 6.11 – Numérotation des éléments et des nœuds et des (degrés de liberté)

**Exemple 6.7.** Nous pouvons dès maintenant passer à un exemple relativement simple. La géométrie du domaine est le carré  $[0, 1]^2$ . On résoudra l'équation de Poisson :

$$-\nabla^2 u(x) = 1$$

avec des conditions essentielles homogènes sur toute la frontière ( $u_g(x) = 0$ ).

— **Le maillage**

On utilise le maillage de la figure 6.11 constitué de 16 éléments et de 13 nœuds. Nous choisissons une interpolation linéaire sur chaque élément ( $n_c^K = n_g^K = 3$ ). Le tableau *coord* prend la forme :

Coordonnées des nœuds					
Tableau <i>coord</i>					
Noeud	Composante $x_1$	Composante $x_2$	Noeud	Composante $x_1$	Composante $x_2$
1	0,0000	0,0000	8	1,0000	0,5000
2	0,5000	0,0000	9	0,3333	0,6667
3	1,0000	0,0000	10	0,6667	0,6667
4	0,3333	0,3333	11	0,0000	1,0000
5	0,6667	0,3333	12	0,5000	1,0000
6	0,0000	0,5000	13	1,0000	1,0000
7	0,5000	0,5000			

Numéros des nœuds							
Tableau <i>connec</i>							
Élément	Noeuds			Élément	Noeuds		
	#1	#2	#3		#1	#2	#3
1	1	2	4	9	5	10	7
2	2	5	4	10	8	10	5
3	2	3	5	11	11	6	9
4	6	1	4	12	10	9	7
5	3	8	5	13	8	13	10
6	6	4	9	14	12	11	9
7	9	4	7	15	12	9	10
8	4	5	7	16	13	12	10

On construit le tableau *numer* en 2 étapes en évitant dans un premier temps de numéroter les degrés de liberté qui sont fixés par les conditions aux limites essentielles. On obtient ainsi :

Numérotation		Numérotation	
Tableau <i>numer</i>		Tableau <i>numer</i>	
Noeud	<i>u</i>	Noeud	<i>u</i>
1	?	1	6
2	?	2	7
3	?	3	8
4	1	4	1
5	2	5	2
6	?	6	9
7	3	7	3
8	?	8	10
9	4	9	4
10	5	10	5
11	?	11	11
12	?	12	12
13	?	13	13

Enfin, on peut déterminer le tableau d'adressage *adres* à l'aide des tableaux de connectivité *connec* et de numérotation *numer* (voir les exercices de fin de chapitre) :

Numéros des dds							
Tableau <i>adres</i>							
Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3	Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3
1	6	7	1	9	2	5	3
2	7	2	1	10	10	5	2
3	7	8	2	11	11	9	4
4	9	6	1	12	5	4	3
5	8	10	2	13	10	13	5
6	9	1	4	14	12	11	4
7	4	1	3	15	12	4	5
8	1	2	3	16	13	12	5

— **Les systèmes élémentaires**

Il reste à construire les systèmes élémentaires. On peut directement utiliser la relation 6.11 puisque dans cet exemple,  $p(\mathbf{x}) = 0$ ,  $u_g(x) = 0$  et  $q^K = f^K = 1$  pour tous les éléments  $K$ . Pour le premier élément, on a :

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_1} \\ \delta_{u_2}^{K_1} \\ \delta_{u_3}^{K_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1^{K_1} \\ s_2^{K_1} \\ s_3^{K_1} \end{bmatrix}$$

La numérotation des nœuds (et donc des degrés de liberté) fait en sorte qu'on obtient exactement le même système élémentaire pour les éléments 5, 11, et 16. Pour le deuxième élément, on a :

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_2} \\ \delta_{u_2}^{K_2} \\ \delta_{u_3}^{K_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1^{K_2} \\ s_2^{K_2} \\ s_3^{K_2} \end{bmatrix}$$

Ici encore, le même système élémentaire est aussi valable pour les éléments 6, 10 et 15. Pour le troisième élément (ainsi que pour les éléments 4, 13 et 14), on a :

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 8 & -2 & -6 \\ -2 & 5 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_3} \\ \delta_{u_2}^{K_3} \\ \delta_{u_3}^{K_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1^{K_3} \\ s_2^{K_3} \\ s_3^{K_3} \end{bmatrix}$$

Pour le septième élément (ainsi que pour les éléments 8, 9 et 12), on a :

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_7} \\ \delta_{u_2}^{K_7} \\ \delta_{u_3}^{K_7} \end{bmatrix} = \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1^{K_7} \\ s_2^{K_7} \\ s_3^{K_7} \end{bmatrix}$$

— **L'assemblage**

Un système linéaire de dimension 13 par 13 doit être assemblé à partir des systèmes élémentaires que nous venons d'obtenir. On utilise exactement la même technique qu'en dimension



1 et nous nous limiterons à en rappeler brièvement les principales étapes. À l'aide du tableau *adres*, on écrit le système élémentaire du premier élément sous la forme :

$$\frac{1}{12} \left[ \begin{array}{c|ccc} & 6 & 7 & 1 \\ \hline 6 & 5 & -2 & -3 \\ 7 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_{u_1}^{K_1} \\ \delta_{u_2}^{K_1} \\ \delta_{u_3}^{K_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1^{K_1} \\ s_2^{K_1} \\ s_3^{K_1} \end{bmatrix}$$

On fait de même pour tous les éléments et on obtient (en exercice) :

$$\frac{1}{24} \left[ \begin{array}{ccccc|cccccccc} 90 & -9 & -24 & -9 & 0 & -12 & -18 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 90 & -24 & 0 & -9 & 0 & -18 & -12 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -24 & 96 & -24 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -24 & 90 & -9 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & -12 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & -24 & -9 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & -18 & -12 \\ \hline -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & -18 & 0 & 0 & 0 & -4 & 44 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -4 & 20 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & -18 & 0 & -4 & 0 & 0 & 44 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & -4 & 0 & 44 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 20 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 44 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 20 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_{u_1} \\ \delta_{u_2} \\ \delta_{u_3} \\ \delta_{u_4} \\ \delta_{u_5} \\ \delta_{u_6} \\ \delta_{u_7} \\ \delta_{u_8} \\ \delta_{u_9} \\ \delta_{u_{10}} \\ \delta_{u_{11}} \\ \delta_{u_{12}} \\ \delta_{u_{13}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_3^{K_1} + s_3^{K_4} + s_3^{K_2} + s_2^{K_6} + s_2^{K_7} + s_1^{K_8} \\ s_3^{K_3} + s_3^{K_5} + s_2^{K_2} + s_3^{K_{10}} + s_2^{K_8} + s_1^{K_9} \\ s_3^{K_7} + s_3^{K_8} + s_3^{K_9} + s_3^{K_{12}} \\ s_3^{K_{11}} + s_3^{K_{14}} + s_3^{K_6} + s_2^{K_{15}} + s_1^{K_7} + s_2^{K_{12}} \\ s_3^{K_{13}} + s_3^{K_{16}} + s_2^{K_{10}} + s_3^{K_{15}} + s_2^{K_9} + s_1^{K_{12}} \\ \hline s_1^{K_1} + s_2^{K_4} \\ s_2^{K_1} + s_1^{K_3} + s_1^{K_2} \\ s_2^{K_3} + s_1^{K_5} \\ s_1^{K_4} + s_2^{K_{11}} + s_1^{K_6} \\ s_2^{K_5} + s_1^{K_{13}} + s_1^{K_{10}} \\ s_1^{K_{11}} + s_2^{K_{14}} \\ s_1^{K_{14}} + s_2^{K_{16}} + s_1^{K_{15}} \\ s_2^{K_{13}} + s_1^{K_{16}} \end{bmatrix}$$

qui est encore ici de la forme de la partition 5.19.

— **Imposition des conditions aux limites**

Pour ce problème, les conditions aux limites essentielles sont homogènes (nulles). Les corrections inconnues  $\delta_{u_6}$  jusqu'à  $\delta_{u_{13}}$  prennent donc la valeur 0.

Il reste à considérer le vecteur  $S$  des conditions naturelles. En principe, le vecteur  $S^C$  est connu mais cela ne semble pas évident lorsque l'on regarde le système global obtenu. Il faut

donc y voir de plus près. Considérons donc l'expression :

$$\begin{aligned}
s_1 &= s_3^{K_1} + s_3^{K_4} + s_3^{K_2} + s_2^{K_6} + s_2^{K_7} + s_1^{K_8} \\
&= \int_{\partial_{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds + \int_{\partial_{K_4}} s^{K_4} \psi_3^{K_4} ds + \int_{\partial_{K_2}} s^{K_2} \psi_3^{K_2} ds \\
&= + \int_{\partial_{K_6}} s^{K_6} \psi_2^{K_6} ds + \int_{\partial_{K_7}} s^{K_7} \psi_2^{K_7} ds + \int_{\partial_{K_8}} s^{K_8} \psi_1^{K_8} ds
\end{aligned}$$

qui appartient au vecteur  $\mathbf{S}^C$ . Le raisonnement qui suit pourra s'appliquer aux termes  $s_2$  jusqu'à  $s_5$ . Le terme  $s_1$  correspond au premier degré de liberté, lui-même associé au nœud 4 ( $\text{numer}(4) = 1$ ) de la figure 6.11. On notera donc  $\phi_1(\mathbf{x})$  la fonction de Ritz globale, linéaire par élément, et qui vaut 1 au nœud 4 et 0 à tous les autres nœuds. On a par exemple :

$$s_3^{K_1} = \int_{\partial_{K_1}} s^{K_1}(\mathbf{x}) \psi_3^{K_1}(\mathbf{x}) ds = \int_{\partial_{K_1}} s^{K_1}(\mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}) ds$$

car  $\psi_3^{K_1}(\mathbf{x})$  n'est rien d'autre que la restriction à  $K_1$  de  $\phi_1(\mathbf{x})$ . En rappelant que puisque  $q(\mathbf{x}) = 1$  :

$$s^{K_1} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^{K_1}}$$

On peut ainsi constater que  $\psi_3^{K_1}, \psi_3^{K_4}, \psi_3^{K_2}, \psi_2^{K_6}, \psi_2^{K_7}$  et  $\psi_1^{K_8}$  ne sont que les restrictions de  $\phi_1(\mathbf{x})$  à chacun des éléments. On a donc de manière plus compacte :

$$s_1 = \sum_{K \in T_4} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^K} \phi_1(\mathbf{x}) ds \quad (6.16)$$

où  $T_4$  est l'ensemble de tous les éléments dont l'un des sommets est le numéro 4 soit  $K_1, K_2, K_4, K_6, K_7$  et  $K_8$  (voir la figure 6.11).

On peut alors écrire :

$$s_3^{K_1} = \int_{C_1^{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds + \int_{C_2^{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds + \int_{C_3^{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds$$

où  $C_i^{K_1}$  désigne le  $i$ -ième côté de l'élément  $K_1$ . La fonction  $\psi_3^{K_1}$  (ou encore  $\phi_1$ ) est linéaire et prend la valeur 1 sur le troisième sommet de l'élément  $K_1$  et s'annule sur les 2 autres sommets. Elle s'annule donc identiquement sur le côté  $C_1^{K_1}$  entre les sommets 1 et 2 ce qui permet d'éliminer le premier terme de cette dernière expression. Il en est de même pour les autres coefficients et on a :

$$\begin{aligned}
s_1 &= \int_{C_2^{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds + \int_{C_3^{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds + \int_{C_2^{K_4}} s^{K_4} \psi_3^{K_4} ds + \int_{C_3^{K_4}} s^{K_4} \psi_3^{K_4} ds + \\
&\int_{C_2^{K_2}} s^{K_2} \psi_3^{K_2} ds + \int_{C_3^{K_2}} s^{K_2} \psi_3^{K_2} ds + \int_{C_1^{K_6}} s^{K_6} \psi_2^{K_6} ds + \int_{C_2^{K_6}} s^{K_6} \psi_2^{K_6} ds + \\
&\int_{C_1^{K_7}} s^{K_7} \psi_2^{K_7} ds + \int_{C_2^{K_7}} s^{K_7} \psi_2^{K_7} ds + \int_{C_1^{K_8}} s^{K_8} \psi_1^{K_8} ds + \int_{C_3^{K_8}} s^{K_8} \psi_1^{K_8} ds
\end{aligned}$$

On peut regrouper ces termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
s_1 = & \int_{C_2^{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds + \int_{C_3^{K_2}} s^{K_2} \psi_3^{K_2} ds + \int_{C_3^{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds + \int_{C_2^{K_4}} s^{K_4} \psi_3^{K_4} ds + \\
& \int_{C_3^{K_4}} s^{K_4} \psi_3^{K_4} ds + \int_{C_1^{K_6}} s^{K_6} \psi_2^{K_6} ds + \int_{C_2^{K_2}} s^{K_2} \psi_3^{K_2} ds + \int_{C_1^{K_8}} s^{K_8} \psi_1^{K_8} ds + \\
& \int_{C_2^{K_6}} s^{K_6} \psi_2^{K_6} ds + \int_{C_1^{K_7}} s^{K_7} \psi_2^{K_7} ds + \int_{C_2^{K_7}} s^{K_7} \psi_2^{K_7} ds + \int_{C_3^{K_8}} s^{K_8} \psi_1^{K_8} ds
\end{aligned}$$

Regardons les deux premiers termes. La simplification est immédiate puisque  $C_2^{K_1}$  et  $C_3^{K_2}$  sont en fait le même côté, sur ce côté,  $\psi_3^{K_1} = \psi_3^{K_2} = \phi_1$ . On a alors :

$$\int_{C_2^{K_1}} s^{K_1} \psi_3^{K_1} ds + \int_{C_3^{K_2}} s^{K_2} \psi_3^{K_2} ds = \int_{C_2^{K_1}} (s^{K_1} + s^{K_2}) \phi_1 ds = \int_{C_2^{K_1}} \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^{K_1}} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^{K_2}} \right) \phi_1 ds$$

Mais puisque :

$$\mathbf{n}^{K_2} = -\mathbf{n}^{K_1}$$

on obtient :

$$\int_{C_2^{K_1}} \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^{K_1}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^{K_1}} \right) \phi_1 ds = 0$$

terme qui fait intervenir le saut de la variable secondaire à l'interface entre ces 2 éléments adjacents. En se rappelant la relation 2.19, on constate que ce saut est nul car autrement un terme source (une simple couche) serait présent à cet endroit. Il en va de même pour les 5 autres couples d'intégrales curvilignes et par conséquent, on a  $s_1 = 0$ . Le même raisonnement montrerait que les termes  $s_2$  à  $s_5$  sont également nuls (voir les exercices de fin de chapitre).

— **Solution du système linéaire**

Il résulte de tout cela un système linéaire de dimension 5 que l'on peut résoudre par décomposition  $LU$ . Pour ce faire, on résout successivement les équations 6.14 et 6.15. On obtient ainsi :

$$\delta_U^I = \begin{bmatrix} 0,060\ 185 \\ 0,060\ 185 \\ 0,069\ 444 \\ 0,060\ 185 \\ 0,060\ 185 \end{bmatrix}$$

Une fois cette étape franchie, on peut calculer (au besoin) le vecteur  $S^I$  par la relation 6.15.

Le calcul nous donne le vecteur :

$$S^I = \begin{bmatrix} -8,564805 \times 10^{-2} \\ -1,643515 \times 10^{-1} \\ -8,564805 \times 10^{-2} \\ -1,643515 \times 10^{-1} \\ -1,643515 \times 10^{-1} \\ -8,564805 \times 10^{-2} \\ -1,643515 \times 10^{-1} \\ -8,564805 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Il peut être intéressant de regarder d'un peu plus près l'interprétation de ce vecteur souvent appelé *vecteur des réactions nodales*. On vérifie sans difficulté que la somme de ce vecteur est  $-0,999\,998\,519$ , la question étant de savoir pourquoi. Considérons le premier terme de ce vecteur soit  $s_6$ . Le sixième degré de liberté correspond au nœud 1 de la figure 6.11 et on a

$$\begin{aligned} s_6 = s_1^{K_1} + s_2^{K_4} &= \int_{C_1^{K_1}} s^{K_1} \psi_1^{K_1} ds + \int_{C_2^{K_1}} s^{K_1} \psi_1^{K_1} ds + \int_{C_3^{K_1}} s^{K_1} \psi_1^{K_1} ds + \\ &\int_{C_1^{K_4}} s^{K_4} \psi_2^{K_4} ds + \int_{C_2^{K_4}} s^{K_4} \psi_2^{K_4} ds + \int_{C_3^{K_4}} s^{K_4} \psi_2^{K_4} ds \\ &= \int_{C_1^{K_1}} s^{K_1} \psi_1^{K_1} ds + \int_{C_2^{K_4}} s^{K_4} \psi_2^{K_4} ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \phi_6(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

où  $\phi_6(\mathbf{x})$  est la fonction de Ritz associée au nœud 1 du maillage c.-à-d. la fonction linéaire par élément qui vaut 1 au nœud numéro 1 et qui vaut 0 à tous les autres nœuds. Il en est de même pour toutes les autres composantes du vecteur  $S^I$  qui valent donc respectivement :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \phi_i(\mathbf{x}) ds, \quad \text{pour } i = 6, 7, \dots, 13 \quad (6.17)$$

C'est ce que l'on appelle la réaction nodale au nœud  $i$ . Il est ainsi facile de constater que lorsque l'on somme le vecteur  $S^I$  c.-à-d. lorsque l'on somme les réactions nodales, on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$$

car la somme des  $\phi_i$  est toujours égale à 1 sur chacun des côtés d'un élément. L'équation aux dérivées partielles de départ nous donne alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dv - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w ds = \int_{\Omega} w dv$$

En choisissant  $w = 1$ , on trouve :

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\Omega} 1 dv = 1$$

et la somme du vecteur  $S^I$  ( $-0,999\,998\,519$ ) en est une très bonne approximation.

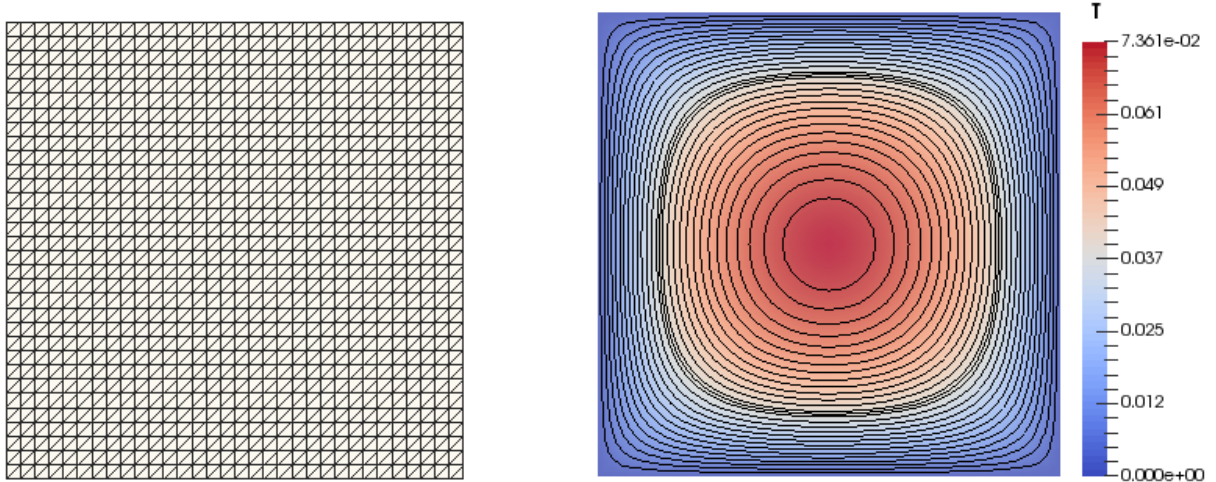


Figure 6.12 – Maillage fin et Isovaleurs de la fonction  $u(x, y)$  pour l'exemple 6.7

— **Présentation des résultats**

Bien évidemment, un maillage grossier comme celui de la figure 6.11 ne pourra produire des résultats d'une grande précision, même sur un problème aussi simple. On présente donc à la figure 6.12 les résultats obtenus sur un maillage beaucoup plus fin. On peut y constater la simplicité de même que la symétrie de la solution. On aurait pu en fait limiter les calculs au quart de la géométrie initiale et gagné ainsi encore en précision.



**Exemple 6.8.** Nous sommes maintenant en mesure d'aborder un problème plus réaliste, mais aussi de plus grande taille. Nous ne pourrons plus expliciter les détails de tous les calculs. On considère un problème de transfert de chaleur dans une plaque métallique constituée de 2 matériaux de conductivité thermique différente tel qu'illustrée à la figure 6.13.

La partie gauche de la plaque est maintenue à une température de  $100^\circ\text{C}$  (condition aux limites essentielle) et elle est supposée parfaitement isolée sur les parois supérieure et inférieure de même que dans la partie en forme de U (condition aux limites naturelle nulle). Enfin, un flux de chaleur de 1 ( $-\mathbf{K}\nabla T \cdot \mathbf{n} = -1$ ) est imposée aux deux extrémités à droite. Ce problème requiert la solution de l'équation de la chaleur :

$$-\nabla \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{x})\nabla T) = 0$$

où  $K(\mathbf{x})$  est la conductivité thermique. La formulation variationnelle correspondante est :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{K}(\mathbf{x})\nabla T) \cdot \nabla w_T \, dA = \int_{\Gamma_{\text{sortie}}} w_T \, ds$$

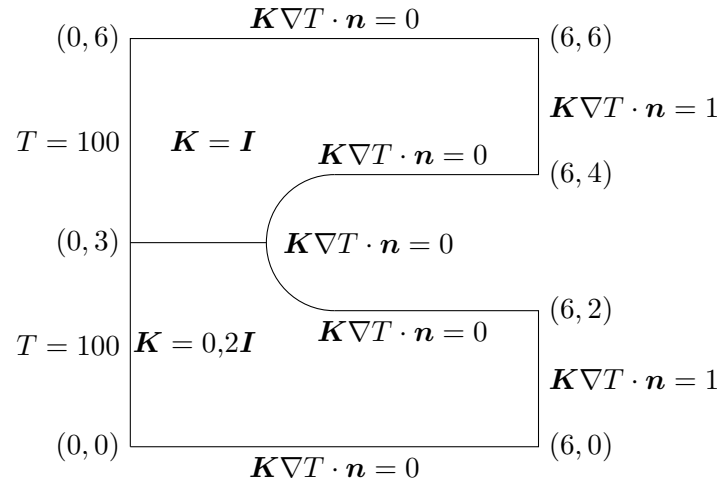


Figure 6.13 – Géométrie et conditions aux limites

Notons qu'il faudrait relever les conditions de Dirichlet non nulles pour être plus rigoureux (voir les exercices de fin de chapitre).

On a résolu ce problème sur le maillage de la figure 6.14. La transformation vers l'élément de référence est linéaire (voir la figure 6.7) tandis que les fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}$  sont quadratiques (voir le tableau B.4) Le maillage est constitué de 4992 triangles (2633 sommets et 7624 arêtes) ce qui résulte en un système linéaire de 10 257 degrés de liberté.

Les isovaleurs de température sont également illustrées sur cette figure. On constate aisément la différence de comportement entre les deux moitiés du domaine. La partie de la plaque où la conductivité thermique est la plus grande (moitié supérieure) évacue la chaleur beaucoup plus facilement, ce qui évite une augmentation de la température. La température en sortie (sur l'axe  $x = 6$ ) est d'un peu moins de  $126^\circ\text{C}$  sur la partie inférieure et d'environ  $105^\circ\text{C}$  sur la partie supérieure. ♦

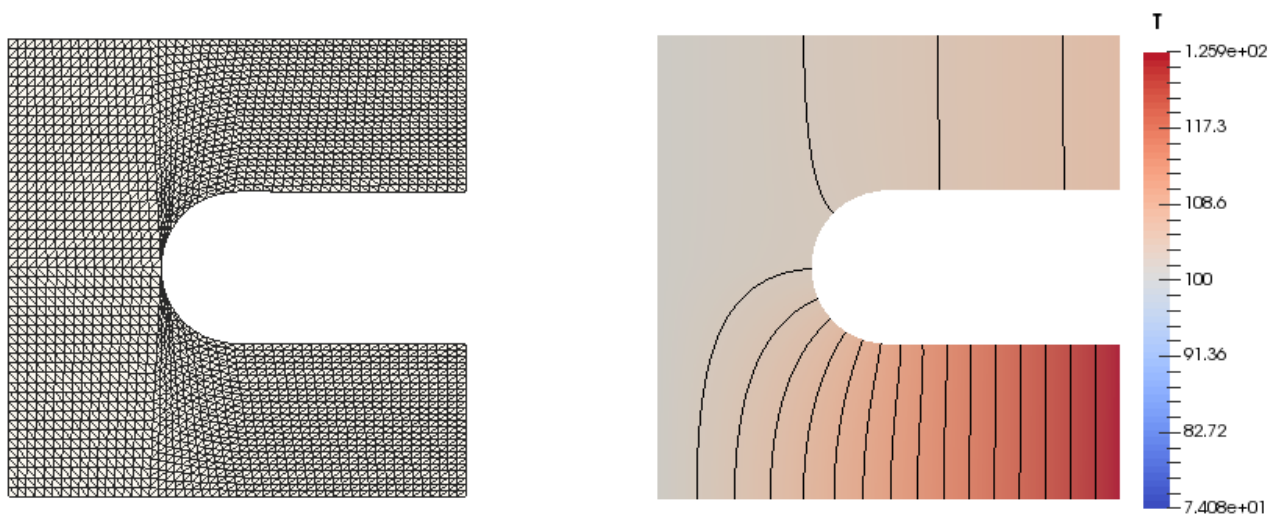


Figure 6.14 – Maillage et isothermes pour l'exemple 6.8

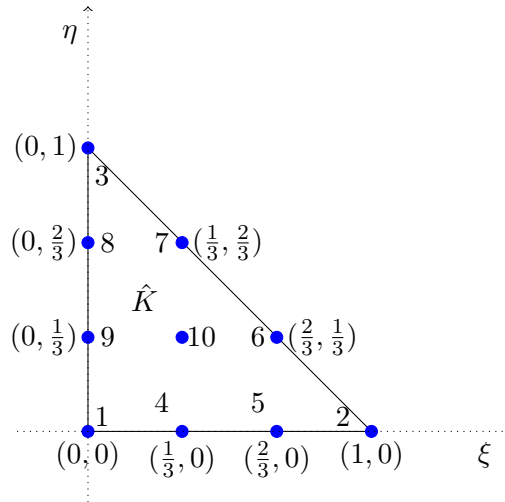


Figure 6.15 – Élément de référence triangulaire de degré 3 ( $n_g^K = 10$ )

## 6.12 Exercices

1. Obtenir la formulation variationnelle élémentaire de la page 134.
2. Vérifier les relations entre le jacobien  $J^K$  et l'aire (page 140) en dimension 2 et le volume (page 145) en dimension 3 pour les transformations linéaires de l'élément réel vers l'élément de référence.
3. Construire le tableau *adres* de la page 150.
4. Assembler le système élémentaire de la page 151.
5. Dans le terme de droite  $S$  du système de la page 151, vérifier que  $s_3 = 0$ .
6. Toujours dans le terme de droite  $S$  du système de la page 151, simplifier au maximum l'expression de  $s_6$  et  $s_7$ .
7. Obtenir les coefficients  $a_{11}^K$  et  $a_{12}^K$  dans la relation 6.11 à partir de la formulation variationnelle élémentaire 6.9.
8. Une formulation variationnelle fait apparaître le terme suivant dans un domaine bidimensionnel :

$$\int_K q(\mathbf{x}) \nabla \psi_j^K(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i^K(\mathbf{x}) dv$$

où  $K$  est un élément triangulaire (à côtés droits) et les  $\psi_i^K(\mathbf{x})$  sont les fonctions d'interpolation quadratiques ( $P_2$ ). Donner le nombre de points d'intégration minimal permettant d'évaluer exactement ce terme si  $q(\mathbf{x})$  est linéaire dans l'élément. Même question si cette fois on a un élément quadrangulaire (à côtés droits) et des fonctions d'interpolation  $Q_2$ .

9. La figure 6.15 illustre un élément bidimensionnel de degré 3 de type Lagrange. Donner l'expression de la fonction  $\hat{\psi}_4(\xi, \eta)$ .



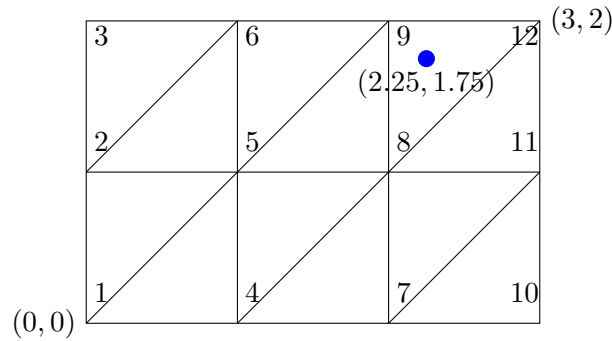


Figure 6.16 – Maillage et numéros de degrés de liberté

10. On donne le maillage de la figure 6.16. Le tableau de connectivité est :

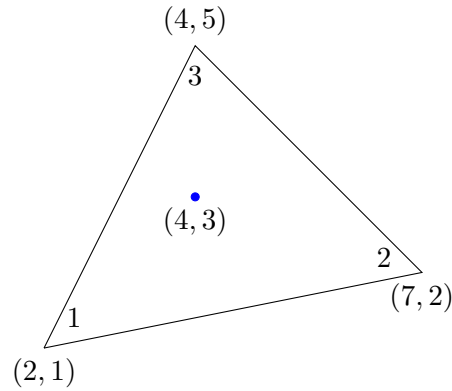
Connectivité			
Tableau <i>convec</i>			
Élément	Noeud #1	Noeud #2	Noeud #3
1	1	4	5
2	1	5	2
3	2	5	6
4	2	6	3
5	4	7	8
6	4	8	5
7	5	8	9
8	5	9	6
9	7	10	11
10	7	11	8
11	8	11	12
12	8	12	9

Une condition de Dirichlet homogène a été imposée sur la paroi de droite (degrés de liberté 10 à 12) et des conditions de Neumann sur les 3 autres parois. On a utilisé des éléments triangulaires linéaires et le tableau d’adressage est le même que le tableau de connectivité. Après avoir résolu le problème, on a trouvé la solution :

$$U = [ 0,6362 \ 0,7214 \ 1,0000 \ 0,5510 \ 0,6248 \ 0,8660 \ 0,3181 \ 0,3607 \ 0,5000 \ 0,0000 \ 0,0000 \ 0,0000 ]^T$$

On considère le point  $\mathbf{P} = (2,25, 1,75)$  dans l’élément 12.

- Donnez l’expression de la transformation linéaire  $T^{K_{12}}$  qui envoie l’élément de référence sur le douzième élément.
- Trouvez le point  $(\xi, \eta)$  de l’élément de référence qui est envoyé sur  $\mathbf{P}$ .

Figure 6.17 – Élément  $K$ 

- c) Évaluer  $u(\mathbf{P})$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{P})$ .
11. On a résolu un problème en éléments finis et on a trouvé une solution numérique  $u_h(x_1, x_2)$  telle que  $u_h(2, 1) = 5$ ,  $u_h(7, 2) = 53$  et  $u_h(4, 5) = 41$ . Évaluer  $u_h(4, 3)$  et  $\frac{\partial u_h}{\partial x_1}(4, 3)$  en vous servant de la figure 6.17.
- Remarque :** Il vous faudra inverser la transformation géométrique  $T^K$  appropriée pour déterminer à quelle coordonnée de l'élément de référence correspond le point  $(4, 3)$ .
12. Obtenir (avec tous les détails) la formulation variationnelle du problème 6.8.

## Chapitre 7

# Analyse de convergence

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier comment convergent les méthodes d'éléments finis pour les problèmes elliptiques et à quel ordre. Nous compléterons le chapitre avec quelques exemples.

### 7.1 Bases théoriques

Nous avons vu au chapitre 3 les conditions d'existence et d'unicité d'une solution  $u$  d'un problème de la forme :

♠ trouver une fonction  $u \in V$  telle que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V \quad (7.1)$$

Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées à savoir que la forme linéaire  $l$  est continue et que la forme bilinéaire  $a$  est continue et coercive sur  $V$ .

Nous avons vu comment construire des solutions numériques par la méthode des éléments finis pour obtenir une approximation  $u_h$  de cette solution unique. Cela revient à construire un sous-espace de dimension finie  $V_h$  de  $V$  et à calculer  $u_h \in V_h$  solution de :

$$a(u_h, w_h) = l(w_h) \quad \forall w_h \in V_h \quad (7.2)$$

Le sous-espace  $V_h$  a pour base les fonctions de Ritz  $\phi_i(\mathbf{x})$  associées aux  $nndl$  degrés de liberté du maillage. On a en fait :

$$V_h = \{w_h | w_h = \sum_{i=1}^{nndl} \alpha_i \phi_i(\mathbf{x}), \alpha_i \in R\}$$

qui est un espace de dimension finie. Puisque l'on a construit des fonctions de Ritz  $\phi_i(\mathbf{x})$  appartenant à  $V$ , on a par construction  $V_h \subset V$ . Mentionnons toutefois que cette inclusion n'est pas absolument nécessaire comme en font foi les éléments dits non conformes qui sont toutefois hors de notre propos pour le moment.

L'indice  $h$  réfère à la taille des éléments du maillage. Plus  $h$  est petit, plus les éléments sont petits et plus ils sont nombreux, et plus il y a de degrés de liberté. La dimension de  $V_h$  augmente donc lorsque  $h$  diminue. Pour un élément  $K$  du maillage, on note  $h^K$  la taille de l'élément. En dimension 1,  $h^K$  est simplement la longueur de l'élément mais en dimension 2 ou 3, on peut définir cette taille de plusieurs façons. En général, on pose :

$$h^K = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_e$$

où  $\|\cdot\|_e$  est la norme euclidienne. C'est donc la distance maximale entre 2 points de l'élément. On pose ensuite :

$$h = \max_K h^K$$

Intuitivement, plus l'espace  $V_h$  est riche, plus la solution numérique  $u_h$  devrait se rapprocher de la solution  $u$ . Pour enrichir  $V_h$  on peut soit augmenter le nombre d'éléments, soit augmenter le degré des polynômes utilisés dans chaque élément. Il reste à s'assurer dans quelle(s) condition(s) on a bien convergence de  $u_h$  vers  $u$ , et s'il y a convergence, à quel ordre, etc. Le nombre d'éléments ainsi que le degré des polynômes utilisés auront des rôles importants à jouer. Pour fixer les idées, rappelons un peu de terminologie qui nous sera utile par la suite.

#### Définition 7.1: Convergence

On dit que la solution numérique  $u_h$  converge vers  $u$  dans  $V$  si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ , la taille de tous les éléments tend vers 0. Il est important de remarquer que la norme utilisée est celle de l'espace  $V$ .

#### Définition 7.2: Ordre de convergence

On dit que la solution numérique  $u_h$  converge à l'ordre  $p$  vers  $u$  dans  $V$  s'il existe une constante  $C$  telle que :

$$\|u - u_h\|_V \simeq Ch^p$$

lorsque  $h$  tend vers 0.

**Remarque 7.3.** Dans ce qui suit, le même symbole  $C$  désignera diverses constantes indépendantes de  $h$ . ◀

**Théorème 7.4: de Céa**

Si  $a$  est une forme bilinéaire continue et coercive et si  $u$  et  $u_h$  dénotent les solutions respectives de 7.1 et 7.2, alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V \quad (7.3)$$

*Démonstration.* Ce résultat très simple mais aussi très important est dû à Céa [18]. On a immédiatement en vertu des problèmes 7.1 et 7.2 que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V$$

$$a(u_h, w_h) = l(w_h) \quad \forall w_h \in V_h$$

Puisque  $V_h \subset V$ , on peut prendre  $w = w_h$  dans la première équation et soustraire pour obtenir :

$$a(u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h \quad (7.4)$$

En particulier :

$$a(u - u_h, u_h) = 0$$

et on en conclut que :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w_h) \quad \forall w_h \in V_h$$

La coercivité et la continuité de la forme bilinéaire  $a$  nous permettent alors d'écrire :

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq C \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V \quad \forall w_h \in V_h$$

ce qui entraîne que :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - w_h\|_V \quad \forall w_h \in V_h$$

Puisque cette dernière inégalité est vraie quel que soit  $w_h \in V_h$ , on a le résultat. ■

L'interprétation de ce résultat est fondamentale. Nous venons en fait de ramener l'analyse de convergence de la solution éléments finis à un problème classique d'interpolation. En effet, la relation 7.3 affirme qu'à une constante près, l'erreur commise  $\|u - u_h\|_V$  est plus petite que la meilleure interpolation possible de  $u$  par des fonctions de  $V_h$ .

Notre intuition de départ se précise donc. En effet, plus l'espace  $V_h$  est riche, meilleure est la qualité de l'interpolation de  $u$  par des fonctions de  $V_h$  et en vertu de la relation 7.3, meilleure sera notre solution par éléments finis. La richesse de l'espace discret est bien sûr fonction du nombre d'éléments du maillage mais aussi du nombre de noeuds de calcul de chaque élément. Il est en effet clair que pour un même nombre d'éléments, une interpolation linéaire sera moins riche qu'une interpolation quadratique qui sera elle-même moins riche qu'une interpolation cubique, etc. La différence entre ces différentes approximations se manifestera au niveau de l'ordre de convergence.

## 7.2 Quelques exemples

**Exemple 7.5.** Supposons que le problème 7.1 soit suffisamment simple pour que sa solution  $u$  soit dans  $V_h$  (ce qui revient à supposer que l'espace discret  $V_h$  est suffisamment riche pour contenir la solution  $u$ ).

De l'équation 7.4, la solution numérique vérifie :

$$a(u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h$$

En particulier, on peut prendre  $w_h = u - u_h$  ce qui est possible car  $u \in V_h$  et donc  $u - u_h \in V_h$ . On obtient ainsi :

$$a(u - u_h, u - u_h) = 0$$

La coercivité de la forme bilinéaire  $a$  entraîne alors que  $\|u - u_h\|_V = 0$  et donc que  $u = u_h$ .

Ce résultat trivial a quand même une grande importance pratique. Si un problème possède une solution telle que l'on peut l'interpoler exactement (sans erreur) dans  $V_h$ , alors la solution par éléments finis  $u_h$  sera aussi exacte. On se sert régulièrement de ce résultat pour vérifier un programme d'éléments finis. Au besoin, on construit de façon artificielle un problème dont la solution est dans l'espace discret  $V_h$  et on calcule par éléments finis cette solution. Tant que la solution analytique n'est pas reproduite exactement (à la précision machine), on conclut que le programme a une ou des erreur(s). Cette stratégie est fort utile pour « déboguer » un programme. ♦

### Proposition 7.6

Si  $a$  est une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive et si  $u$  et  $u_h$  dénotent les solutions respectives de 7.1 et 7.2, alors on a :

$$I(u) = \inf_{w \in V} I(w) \quad \text{et} \quad I(u_h) = \inf_{w_h \in V_h} I(w_h) \quad (7.5)$$

où  $I(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - l(w)$ . De plus, on a :

$$I(u) \leq I(u_h) \quad (7.6)$$

Nous avons déjà démontré au chapitre 3 (voir la relation 3.5) l'équivalence entre les problèmes 7.1 et 7.2 et les problèmes de minimisation 7.5. La démonstration de l'inégalité 7.6 est immédiate puisque l'on a supposé que  $V_h \subset V$ . Ce qu'apporte en plus ce dernier résultat est que lorsqu'il y a convergence,  $I(u_h) \rightarrow I(u)$  en décroissant. Puisque  $I(u)$  est souvent liée à une énergie (fonctionnelle d'énergie), cela signifie que la solution par éléments finis surestimera l'énergie du système.

Terminons enfin avec le résultat le plus important qui porte sur l'ordre de convergence d'une solution éléments finis.

### Théorème 7.7: Ordre de convergence

Soit  $u$  et  $u_h$  les solutions respectives des problèmes continu 7.1 et discret 7.2. On suppose de plus que la solution  $u$  du problème continu soit suffisamment régulière. Supposons enfin que l'espace  $V_h \subset H^m(\Omega)$  soit tel que sa restriction à chaque élément  $K$  contienne les polynômes de degré  $k$ , alors :

$$\|u - u_h\|_{m,\Omega} \leq Ch^{k+1-m} \|u\|_{k+1,\Omega} \quad (7.7)$$

**Preuve :** voir Ciarlet, réf. [15]

La méthode des éléments finis permet justement la construction de ce type d'espace  $V_h$  de fonctions polynômiales par élément. Ce dernier résultat nous donne alors l'ordre de convergence de la méthode d'éléments finis utilisée lorsqu'on choisit des polynômes de degré  $k$  sur chaque élément. Nous pouvons maintenant revenir sur certains des problèmes pour lesquels nous avons calculé une solution par éléments finis.

**Exemple 7.8.** Pour les équations aux dérivées partielles d'ordre 2, l'espace de base est  $H^1(\Omega)$  et on doit utiliser la norme correspondante ( $m = 1$  dans l'inégalité 7.7). En utilisant une discrétisation par éléments finis linéaires ( $k = 1$ ), on a :

$$\|u - u_h\|_V = \|u - u_h\|_{1,\Omega} = \left( \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla u - \nabla u_h\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \leq Ch \|u\|_{2,\Omega}$$

On constate donc une convergence linéaire en norme  $H^1(\Omega)$  en supposant que la solution  $u$  soit dans  $H^2(\Omega)$  ce qui n'est pas toujours le cas. On sait en effet que la solution  $u$  est dans  $H^1(\Omega)$  et que  $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ . Rien ne nous assure donc *a priori* que  $u$  soit dans  $H^2(\Omega)$ . C'est ce que nous signifions lorsque nous supposons que  $u$  est suffisamment régulière dans l'énoncé du théorème.

Notons que le résultat est également vrai en norme  $L^2(\Omega)$  et que :

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{2,\Omega}$$

et que la convergence est alors quadratique dans cette norme. Bien que valide, ce dernier résultat ne donne pas une idée exacte de l'ordre de convergence de la solution puisque nous utilisons le mauvais instrument de mesure, c.-à-d. la mauvaise norme. On peut toutefois, puisque la différence entre la norme  $H^1(\Omega)$  et la norme  $L^2(\Omega)$  n'est rien d'autre que la norme  $L^2(\Omega)$  des dérivées partielles  $\|\nabla u - \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ , conclure que ce sont ces dérivées partielles qui convergent moins vite. On a en fait :

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \|u\|_{2,\Omega}$$

Nous avons déjà remarqué lors de certains exemples numériques que les dérivées (ordinaires ou partielles) de  $u$  étaient plus difficile à approcher. Ce résultat le confirme de manière théorique.

Si on passe maintenant à des éléments quadratiques ( $k = 2$ ), on trouve une convergence quadratique :

$$\|u - u_h\|_V = \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{2+1-1} \|u\|_{3,\Omega}$$

ce qui exige cependant encore plus de régularité sur  $u$  ( $u \in H^3(\Omega)$ ). ♦

**Exemple 7.9.** Pour les problèmes d'ordre 4, nous n'avons vu qu'un seul élément de degré 3 ( $k = 3$ ) en dimension 1. Cela nous donne en norme  $H^2(\Omega)$  ( $m = 2$ ) :

$$\|u - u_h\|_V = \|u - u_h\|_{2,\Omega} \leq Ch^{3+1-2} \|u\|_{4,\Omega} = Ch^2 \|u\|_{4,\Omega}$$

c.-à-d. une convergence d'ordre 2 (quadratique). Tout comme précédemment, on a également :

$$\|u - u_h\|_{2,\Omega} \leq C h^2 \|u\|_{4,\Omega}$$

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^3 \|u\|_{4,\Omega}$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C h^4 \|u\|_{4,\Omega}$$

et ici encore, on conclut que pour les problèmes d'ordre 4, les dérivées secondes convergent en norme  $L^2(\Omega)$  moins vite (à l'ordre 2) que les dérivées premières qui elles-mêmes convergent moins vite (à l'ordre 3) que  $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$  qui converge à l'ordre 4. ♦

**Exemple 7.10.** Illustrons maintenant concrètement comment on peut vérifier ces ordres de convergence théoriques. Cela est souvent utile pour s'assurer qu'un programme d'éléments finis a le bon comportement et donc pas d'erreur de programmation.

Pour ce faire, on se donne une solution analytique dont l'expression est suffisamment complexe pour ne pas appartenir à l'espace de discrétisation  $V_h$ . Dans cet exemple : on pose :

$$u(x) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2) \arctan \left( 20 \frac{(x_1 + x_2)}{\sqrt{2}} - 16 \right) \quad (7.8)$$

et on va résoudre l'équation de Laplace :

$$-\nabla^2 u(x) = f(x)$$

sur le carré  $[0, 1]^2$  et en choisissant comme terme de droite  $f(x)$  précisément le laplacien de la fonction 7.8 de sorte que celle-ci est bien la solution de notre problème. C'est ce que l'on appelle une *solution manufacturée* au sens de Roache [54]. Le choix d'une telle fonction est *a priori* arbitraire mais il est recommandé d'essayer de choisir des fonctions qui représentent au mieux les comportements observés sur de vrais problèmes.

On vérifie facilement que les conditions aux limites sont nulles sur toute la frontière du domaine. Notre stratégie consiste à obtenir des solutions à ce problème par la méthode des éléments finis sur des maillages de plus en plus fins. Nous avons choisi des maillages réguliers de 4 par 4, 8 par 8, 16 par 16, 32 par 32, 64 par 64 et enfin de 128 par 128 éléments. Nous avons illustrées aux figures 7.1 et 7.2 les maillages utilisées de même que les solutions correspondantes. On peut y constater, du moins visuellement, la convergence des solutions numériques vers la solution analytique. La différence entre la solution sur le maillage  $64 \times 64$  et celle sur le maillage  $128 \times 128$  est minime.

On peut quantifier plus précisément la convergence. Pour chaque maillage et chaque solution numérique  $u_h$ , on calcule les normes  $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$  et  $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$  de l'erreur. Rappelons que l'on aurait pu utiliser pour ce problème la norme  $|u - u_h|_{1,\Omega}$  (au lieu de la norme  $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ ) car on travaille en fait dans  $H_0^1(\Omega)$ . De plus, on calcule la norme  $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$  seulement pour illustrer plus en détails le comportement de l'erreur. Enfin, nous avons considéré des approximations linéaires et quadratiques pour souligner l'effet du degré des polynômes sur la convergence.



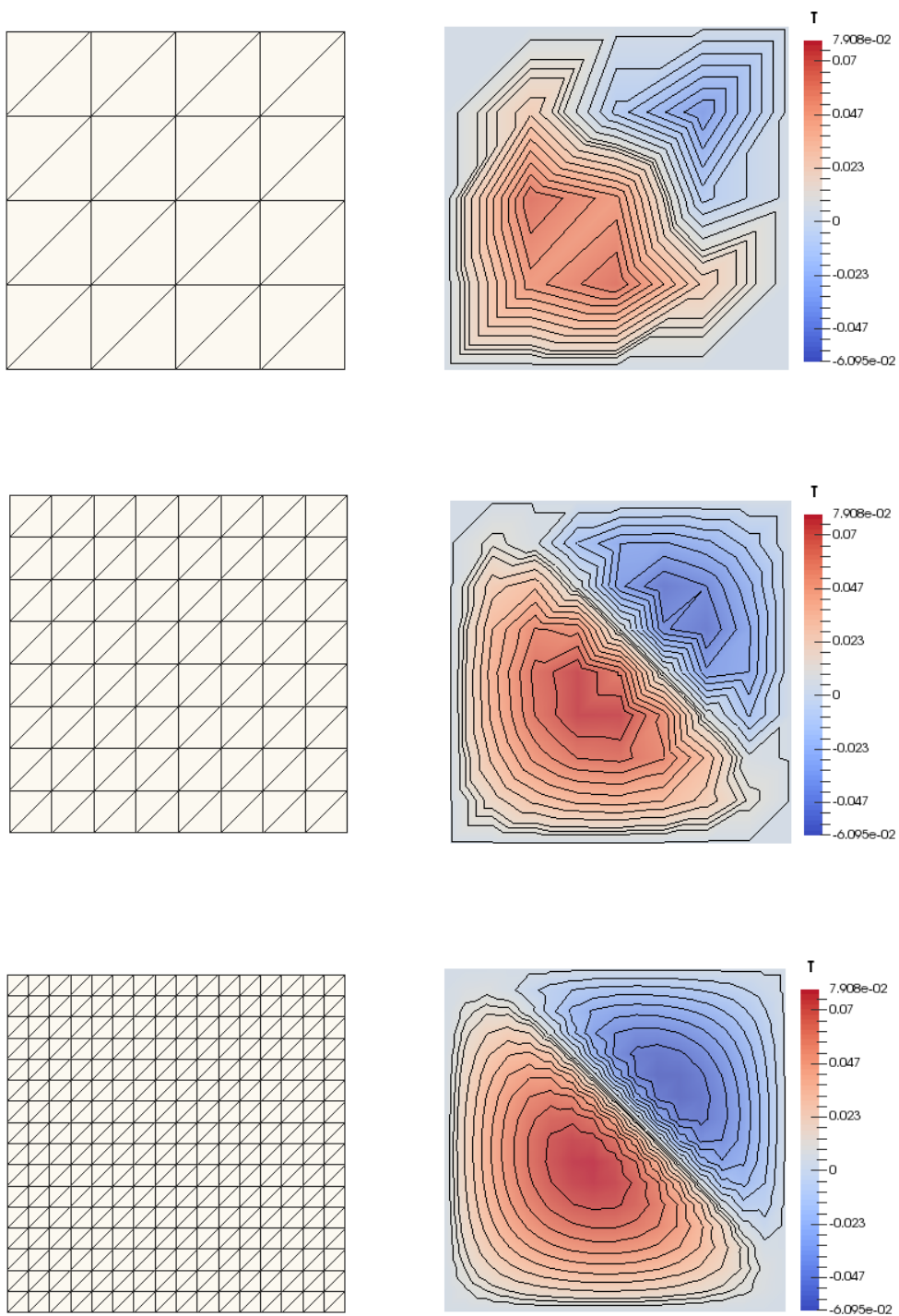


Figure 7.1 – Maillages et solutions

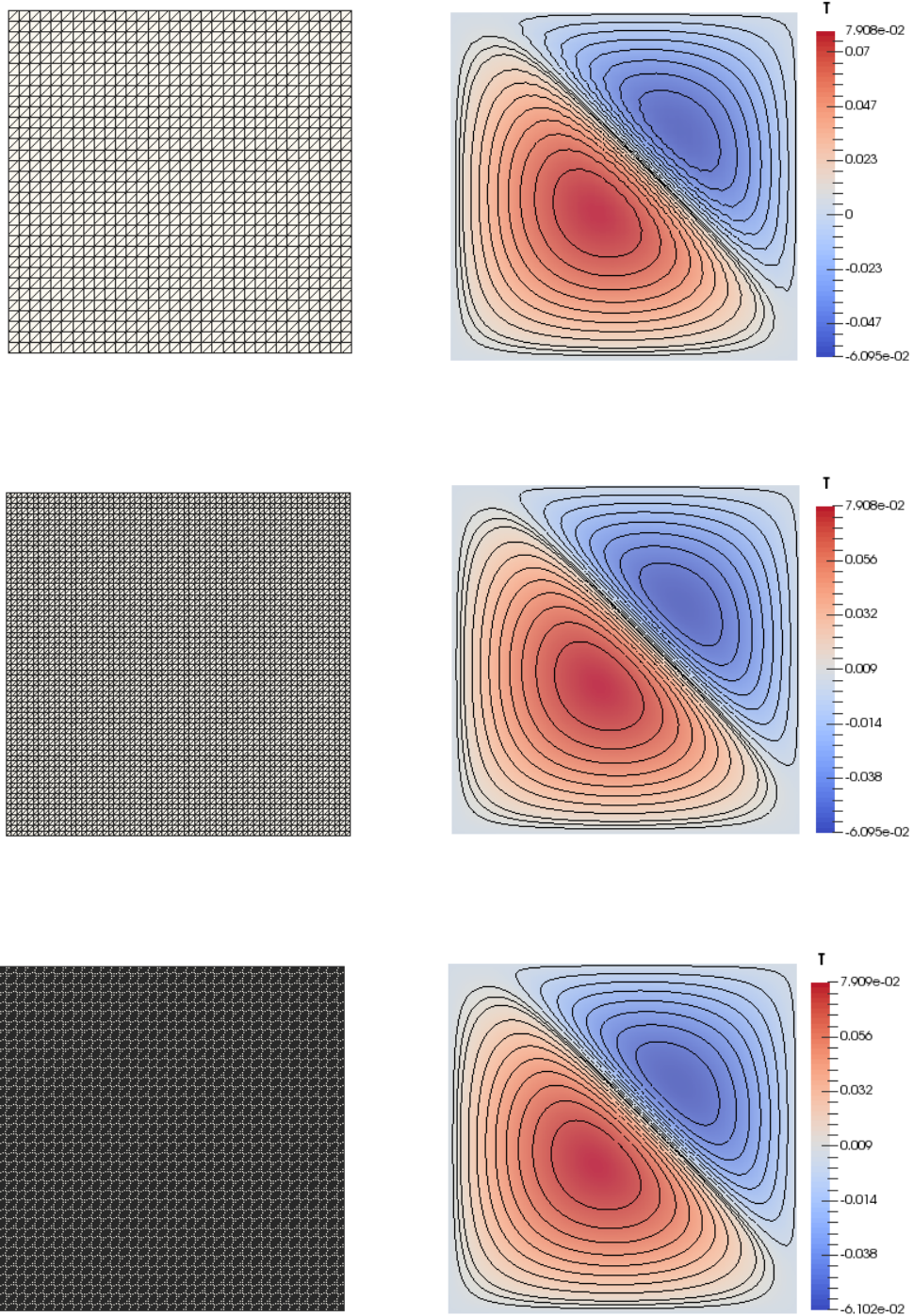


Figure 7.2 – Maillages et solutions (suite)

### Approximation linéaire

Dans ce premier cas, on choisit des approximations linéaires (voir la figure 6.2) sur chaque élément. Nous notons  $u_h^1$  la solution numérique obtenue. On sait alors que :

$$\|u - u_h^1\|_{1,\Omega} \simeq Ch$$

ou encore, en prenant le logarithme naturel de chaque côté :

$$\ln \left( \|u - u_h^1\|_{1,\Omega} \right) \simeq 1 \ln h + \ln C$$

Sur échelle logarithmique, on obtient ainsi une droite de pente 1 (qui est l'ordre de convergence). Ce résultat est bien sûr asymptotique en ce sens qu'il n'est vrai que pour des valeurs de  $h$  suffisamment petites. C'est ce que nous constatons dans cet exemple à la figure 7.3 tracée à partir des données de la table suivante :

Convergence : cas linéaire			
Maillage	$h$	$\ u - u_h^1\ _{1,\Omega}$	$\ u - u_h^1\ _{0,\Omega}$
$4 \times 4$	0,25	0,464 812	$0,1795 \times 10^{-1}$
$8 \times 8$	0,125	0,323 407	$0,8231 \times 10^{-2}$
$16 \times 16$	0,0625	0,200 552	$0,2636 \times 10^{-2}$
$32 \times 32$	0,03125	0,110 145	$0,7640 \times 10^{-3}$
$64 \times 64$	0,015625	0,056 758	$0,2025 \times 10^{-3}$
$128 \times 128$	0,0078125	0,028 613	$0,5146 \times 10^{-4}$

On remarque que pour les grandes valeurs de  $h$ , la courbe de  $\|u - u_h^1\|_{1,\Omega}$  a une pente différente mais au fur et à mesure que la valeur de  $h$  diminue, la pente devient très voisine de 1. On trouve en effet une valeur de 0,989 en prenant les trois derniers points. La commande polyfit de matlab peut être utile à cet effet.

Si on travaille en norme  $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ , on remarque que conformément à la relation 7.7, on a une courbe de pente 2 (en fait 1,95 en prenant les trois derniers points). Ceci illustre une fois de plus que les dérivées de la fonctions  $u(x)$  convergent moins vite que la fonction  $u(x)$  elle-même.

### Approximation quadratique

Dans ce second cas, on choisit des approximations quadratiques sur chaque élément (voir la figure 6.2). Nous notons  $u_h^2$  la solution numérique obtenue. On sait alors que :

$$\|u - u_h^2\|_{1,\Omega} \simeq Ch^2$$

et on obtient cette fois une droite de pente 2 sur une échelle logarithmique :

$$\ln \left( \|u - u_h^2\|_{1,\Omega} \right) \simeq 2 \ln h + \ln C$$

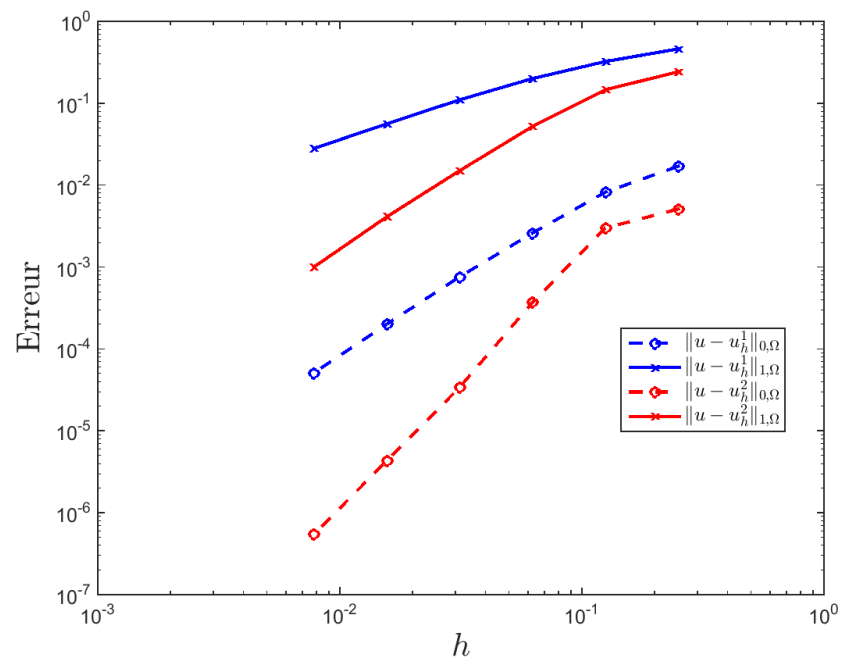


Figure 7.3 – Erreurs commises pour les approximations linéaire et quadratique

Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

Convergence : cas quadratique			
Maillage	$h$	$\ u - u_h^2\ _{1,\Omega}$	$\ u - u_h^2\ _{0,\Omega}$
$4 \times 4$	0,25	0,242 390	$0,5179 \times 10^{-2}$
$8 \times 8$	0,125	0,146 069	$0,3043 \times 10^{-2}$
$16 \times 16$	0,0625	0,052 467	$0,3694 \times 10^{-3}$
$32 \times 32$	0,03125	0,015 405	$0,3406 \times 10^{-4}$
$64 \times 64$	0,015625	0,004 136	$0,4345 \times 10^{-5}$
$128 \times 128$	0,0078125	0,001 056	$0,5477 \times 10^{-6}$

On observe le même comportement que dans le cas linéaire si ce n'est que les ordres de convergence sont maintenant 2 (1,97 avec les trois derniers points) pour la norme  $\|u - u_h^2\|_{1,\Omega}$  et 3 (2,98 avec les trois derniers points) pour la norme  $\|u - u_h^2\|_{0,\Omega}$  (voir la figure 7.3). On remarque de plus que, pour un maillage donné, les erreurs sont beaucoup plus faibles si on utilise une approximation quadratique. En fait, la solution obtenue sur un maillage avec une approximation quadratique est toujours plus précise que celle obtenue avec une approximation linéaire sur le maillage ayant 4 fois plus d'éléments. ♦

**Exemple 7.11.** Pour illustrer de manière plus pragmatique comment on peut vérifier la convergence d'une solution numérique, nous reprenons le problème thermique du chapitre 6 page 155. On retrouvera la géométrie et les conditions aux limites à la figure 6.13.

On peut s'assurer d'une plus grande précision en résolvant le même problème sur une série de maillages de plus en plus fins. On note cependant ici que l'on ne connaît pas la solution exacte et que l'on ne peut pas calculer une erreur de façon précise. Chaque maillage comporte 4 fois plus d'éléments que le précédent et est obtenu en divisant chaque arête du maillage en 2, multipliant ainsi le nombre d'éléments par 4. Ils comportent respectivement 312, 1248, 4992 et 19968 éléments linéaires. Les trois derniers maillages utilisés et les isothermes correspondantes sont présentés à la figure 7.4 (seul le maillage le plus grossier n'est pas illustré). On y constate une très légère évolution des isothermes même si le portrait global reste sensiblement le même.

On peut davantage saisir ces variations à la figure 7.5 où nous avons effectué une coupe de la température sur l'axe  $y = 1$  correspondant au milieu de la partie inférieure de la géométrie. Nous avons également résolu le problème sur le maillage de 19968 éléments avec une approximation quadratique et cette solution nous servira de « solution exacte » (ce qui n'est pas vraiment le cas). On constate quand même que l'erreur est divisée par un facteur 2 sur chaque maillage puisque la valeur de  $h$  est divisée par 2 et que nous avons utilisé un élément linéaire. ♦

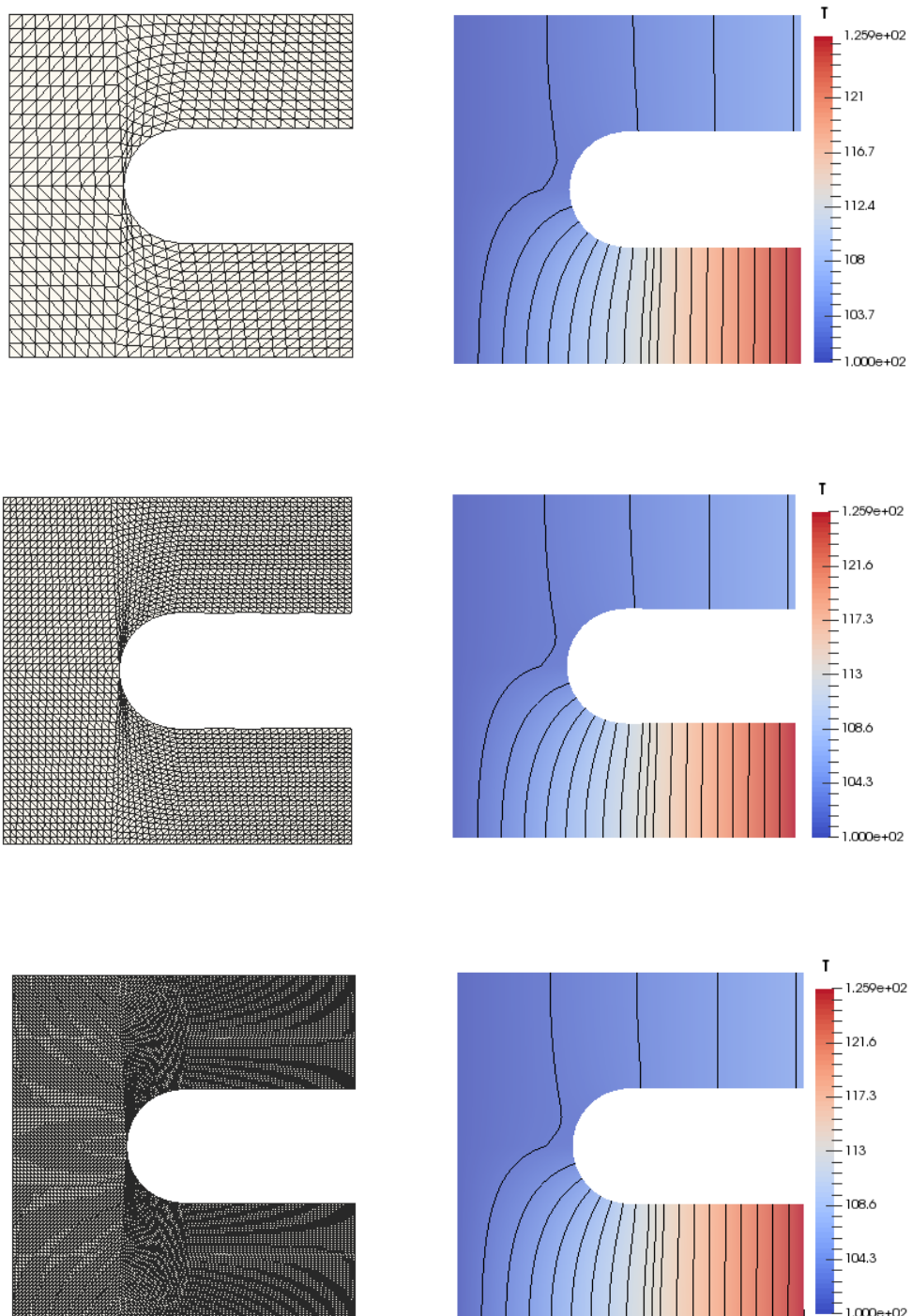


Figure 7.4 – Transfert thermique : maillages et solutions

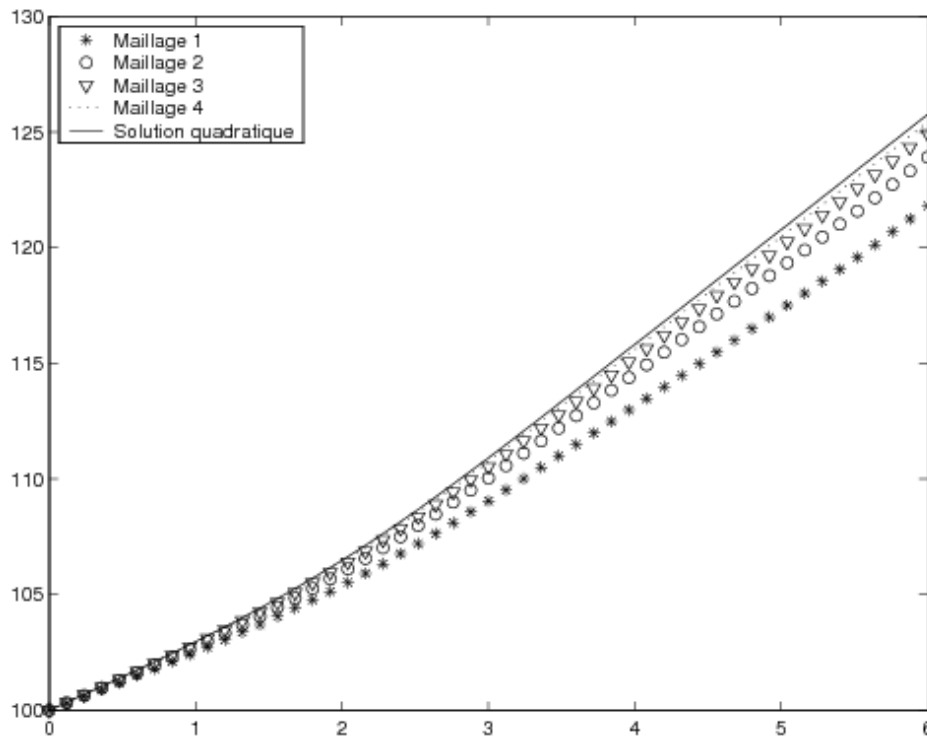


Figure 7.5 – Coupe de la température sur l'axe  $y = 1$





## Chapitre 8

# Problèmes non linéaires

Nous n'avons jusqu'à maintenant considéré que les problèmes linéaires qui sont certes importants mais non suffisants pour les applications. En effet, la nature, ou plus précisément les modèles que nous utilisons pour décrire les phénomènes naturels, est le plus souvent non linéaire. La théorie développée dans les premiers chapitres n'est malheureusement valide que dans le cas linéaire. En effet, le théorème de Lax-Milgram permet de montrer l'existence et l'unicité de problèmes de la forme :

♠ trouver une fonction  $u \in V$  telle que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V \quad (8.1)$$

où  $l$  et  $a$  sont respectivement des formes linéaire et bilinéaire. Ce ne sera plus le cas dans ce chapitre.

Bien que la théorie des problèmes non linéaires soit beaucoup plus complexe, nous nous limiterons à une généralisation formelle de la théorie développée dans le cas linéaire. Il faudra toutefois être conscients que les espaces fonctionnels impliqués sont parfois plus complexes que les espaces  $H^1(\Omega)$  et  $H^2(\Omega)$  rencontrés jusqu'à maintenant.

Le plus simple est de considérer immédiatement un exemple d'équation aux dérivées partielles non linéaire :

$$p(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))u(\mathbf{x}) - \nabla \cdot (q(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\nabla u(\mathbf{x})) = r(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$$

auquel on ajoute par exemple des conditions aux limites essentielles sur  $u$ . On remarque la dépendance des fonctions  $p$ ,  $q$  et  $r$  sur la variable inconnue  $u$ . C'est ce qui rend le problème non linéaire. La non-linéarité pourra aussi, comme nous le verrons, provenir des conditions aux limites.

Nous procéderons comme dans le cas linéaire. Multiplions par une fonction test  $w(\mathbf{x})$  dans un espace fonctionnel  $V$  et intégrons par parties sur le domaine  $\Omega$ . On obtient ainsi :

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \, dv - \int_{\Gamma} (q(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\nabla u(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} \, w \, ds = \int_{\Omega} r(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) \, dv$$

Puisque nous avons supposé des conditions aux limites essentielles sur toute la frontière, l'intégrale de bord s'annule et il reste :

♠ trouver une fonction  $u(\mathbf{x}) \in V$  telle que :

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \, dv = \int_{\Omega} r(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))w(\mathbf{x}) \, dv \quad \forall w(\mathbf{x}) \in V$$

On constate immédiatement que le terme de gauche de cette expression ne représente pas une forme bilinéaire en raison des coefficients  $p(\mathbf{x}, u)$  et  $q(\mathbf{x}, u)$ . Par conséquent, le théorème de Lax-Milgram ne peut donc pas s'appliquer ici.

Pour résoudre, on devra linéariser le problème c'est-à-dire en ramener la solution à un problème linéaire ou plus précisément à une suite de problèmes linéaires. La convergence de cette suite de problèmes linéaires vers la solution du problème non linéaire de départ n'est toutefois nullement garantie. On voit immédiatement l'analogie avec les systèmes de fonctions algébriques non linéaires :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

que l'on peut résoudre (voir Fortin, réf. [25]) par des méthodes de points fixes, par la méthode de Newton, etc. Toutes ces méthodes se généralisent assez facilement aux problèmes variationnels.

## 8.1 Rappel sur les systèmes d'équations non linéaires

Dans cette section, nous rappelons quelques techniques de base pour la résolution des équations non linéaires. Le problème consiste à trouver le ou les vecteurs  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  vérifiant les  $n$  équations non linéaires suivantes :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

ou plus explicitement :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

où les  $f_i$  sont des fonctions de  $n$  variables que nous supposons différentiables. Contrairement aux systèmes linéaires, il n'y a pas de condition simple associée aux systèmes non linéaires qui permette d'assurer l'existence et l'unicité de la solution.

Les méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont nombreuses. Nous présentons ici un cadre relativement général pour les méthodes itératives avec comme cas particulier important la *méthode de Newton*. La présentation inclura toutefois des variantes de cette méthode de même qu'un aperçu des méthodes de points fixes.

L'application de la méthode de Newton à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général. Considérons donc le système :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Soit  $(x_1^0, x_2^0)$ , une approximation initiale de la solution de ce système. *Cette approximation initiale est cruciale et doit toujours être choisie avec soin.* Le but de ce qui suit est de déterminer une correction  $(\delta_{x_1}, \delta_{x_2})$  à  $(x_1^0, x_2^0)$  de telle sorte que :

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0 + \delta_{x_1}, x_2^0 + \delta_{x_2}) &= 0 \\ f_2(x_1^0 + \delta_{x_1}, x_2^0 + \delta_{x_2}) &= 0 \end{aligned}$$

Pour déterminer  $(\delta_{x_1}, \delta_{x_2})$ , il suffit maintenant de faire un développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions :

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \delta_{x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \delta_{x_2} + \dots \\ 0 &= f_2(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \delta_{x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \delta_{x_2} + \dots \end{aligned}$$

Dans les relations précédentes, les pointillés désignent des termes d'ordre supérieur ou égal à deux et faisant intervenir les dérivées partielles d'ordre correspondant. Pour déterminer  $(\delta_{x_1}, \delta_{x_2})$ , il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \delta_{x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \delta_{x_2} &= -f_1(x_1^0, x_2^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \delta_{x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \delta_{x_2} &= -f_2(x_1^0, x_2^0) \end{aligned}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_1^0, x_2^0) \\ f_2(x_1^0, x_2^0) \end{bmatrix}$$

Ce système *linéaire* s'écrit également sous une forme plus compacte :

$$J_f(x_1^0, x_2^0) \boldsymbol{\delta}_x = -\mathbf{f}(x_1^0, x_2^0) \tag{8.3}$$

où  $J_f(x_1^0, x_2^0)$  désigne la matrice des dérivées partielles ou *matrice jacobienne* évaluée au point  $(x_1^0, x_2^0)$ ,  $\boldsymbol{\delta}_x = (\delta_{x_1}, \delta_{x_2})$  est le vecteur des corrections relatives à chaque variable et où  $-\mathbf{f}(x_1^0, x_2^0)$  est le *vecteur résidu* évalué en  $(x_1^0, x_2^0)$ . Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le *jacobien*. Le jacobien doit bien entendu être différent de 0 pour que la matrice jacobienne soit inversible. On pose ensuite :

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 + \delta_{x_1} \\ x_2^1 &= x_2^0 + \delta_{x_2} \end{aligned}$$

qui est la nouvelle approximation de la solution du système non linéaire. On cherchera par la suite à corriger  $(x_1^1, x_2^1)$  d'une nouvelle quantité  $(\boldsymbol{\delta}_x)$ , et ce jusqu'à la convergence.

De manière plus générale, on pose :

$$J_f(\mathbf{x}^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^k) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^k) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^k) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^k) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^k) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}^k) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice jacobienne évaluée au point  $\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ . De plus on pose :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^k) \\ f_2(\mathbf{x}^k) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\delta}_x = \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \\ \vdots \\ \delta_{x_n} \end{bmatrix}$$

pour en arriver à l'algorithme général suivant extrait de la référence [25].

### Algorithme 8.1: Méthode de Newton

1. Étant donné  $\epsilon$ , un critère d'arrêt
2. Étant donné  $N$ , le nombre maximal d'itérations
3. Étant donné  $\mathbf{x}^0 = [x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_n^0]^T$ , une approximation initiale de la solution du système
4. Résoudre le système linéaire :

$$J_f(\mathbf{x}^k) \boldsymbol{\delta}_x = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \quad (8.4)$$

et poser :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \boldsymbol{\delta}_x$$

5. Si  $\frac{\|\boldsymbol{\delta}_x\|}{\|\mathbf{x}^{k+1}\|} < \epsilon$  et  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1})\| \leq \epsilon$  :
  - convergence atteinte
  - écrire la solution  $\mathbf{x}^{k+1}$
  - arrêt
6. Si le nombre maximal d'itérations  $N$  est atteint :
  - convergence non atteinte en  $N$  itérations
  - arrêt
7. Retour à l'étape 4

La méthode de Newton n'est qu'un cas particulier de schéma itératif pour la résolution du système 8.2. De façon plus générale, on peut écrire un schéma itératif sous la forme :

$$A_k(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = 0 \quad (8.5)$$

où  $A_k$  est une matrice non singulière. L'équation 8.5 a alors comme unique solution :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - A_k^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \quad (8.6)$$

La méthode de Newton n'est qu'un cas particulier où  $A_k = J_f(\mathbf{x}^k)$ .

**Remarque 8.2.** Il est bien entendu que l'expression 8.6 ne signifie nullement qu'il faille inverser la matrice  $A_k$  ce qui serait terriblement coûteux. On résoudra en fait le système linéaire 8.5. ◀

Les variantes de la relation 8.5 sont nombreuses. L'idée de base étant toujours de diminuer les coûts de calcul et de mémoire. En effet, le calcul de la matrice jacobienne est une opération coûteuse qui doit être effectuée à chaque itération. On a alors imaginé des variantes qui contournent cette difficulté au moins en partie. Ces variantes dépendent de la forme de la fonction  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Par exemple, si on a :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{8.7}$$

où  $B(\mathbf{x})$  est une matrice dont les coefficients peuvent dépendre eux-mêmes de la solution (mais pas forcément) et que l'on suppose inversible et  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  est une autre fonction non linéaire. En prenant  $A_k = B(\mathbf{x}^k)$ , l'équation 8.6 devient :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - B^{-1}(\mathbf{x}^k) \left( B(\mathbf{x}^k)\mathbf{x}^k - \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \right) = B^{-1}(\mathbf{x}^k)\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$$

qui revient au système linéaire :

$$B(\mathbf{x}^k)\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \tag{8.8}$$

En particulier, si  $B = I$ , on a la méthode des points fixes classique. Si la matrice  $B$  ne dépend pas de  $\mathbf{x}$ , la convergence de l'algorithme 8.8 vers la solution (le point fixe)  $\mathbf{r}$  est liée au rayon spectral  $\rho$  (voir Fortin [25]) de la matrice  $B^{-1}(J_g(\mathbf{r}))$  ( $J_g$  est la matrice jacobienne associée à la fonction  $g$ ). Plus précisément, on doit avoir :

$$\rho \left( B^{-1}(J_g(\mathbf{r})) \right) < 1$$

pour que l'algorithme puisse converger. Encore faut-il que l'estimation de départ  $\mathbf{x}^0$  ne soit pas trop loin de la solution. En pratique, il est extrêmement difficile de s'assurer que cette condition est satisfaite.

De nombreuses autres variantes entrent dans ce cadre général. Par exemple, on peut prendre  $A_k = J_f(\mathbf{x}^0) = A_0$  ce qui revient à fixer la matrice itérative  $A_k$  à la première matrice jacobienne. Cela évite de réassembler et refactoriser une nouvelle matrice jacobienne à chaque nouvelle itération. Il peut en résulter un gain important en temps de calcul au risque d'une plus grande vulnérabilité au niveau des propriétés de convergence. On peut aussi remettre à jour cette matrice de temps à autre. Cette variante est parfois intéressante pour les problèmes instationnaires où il n'est pas forcément nécessaire de calculer la matrice jacobienne à chaque itération de chaque pas de temps.

## 8.2 Dérivée d'une fonctionnelle

Pour éventuellement appliquer la méthode de Newton à la résolution dans le cas d'une formulation variationnelle non linéaire, nous devons étendre le concept de dérivée aux fonctionnelles. C'est l'objectif des définitions suivantes.

**Définition 8.3: Fonctionnelle dérivable**

Soit  $G(v)$  une fonctionnelle définie sur un espace de Hilbert  $V$ . On dit que  $G$  est dérivable en

$v_0$  s'il existe une fonctionnelle linéaire de  $V$  dans  $\mathcal{R}$  notée  $D_v G(v_0)$  telle que :

$$G(v_0 + \delta_v) = G(v_0) + D_v G(v_0)[\delta_v] + \|\delta_v\| o(\delta_v) \quad (8.9)$$

où  $o(\delta_v)$  est une fonctionnelle vérifiant :

$$\lim_{\delta_v \rightarrow 0} o(\delta_v) = 0$$

Cette définition revient à supposer l'existence d'une forme de développement de Taylor puisque le dernier terme de droite doit être petit pour des  $\delta_v$  petits. Il reste à définir le sens de l'expression :

$$D_v G(v_0)[\delta_v]$$

#### Définition 8.4: Dérivée de Gateaux

Soit  $G(v)$  une fonctionnelle dérivable en  $v_0$ . La dérivée de Gateaux de la fonctionnelle  $G$  par rapport à  $v$  en  $v_0$  et dans la direction  $\delta_v$  est définie par :

$$D_v G(v_0)[\delta_v] = \frac{\partial G}{\partial v}(v_0)[\delta_v] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G(v_0 + \epsilon \delta_v) - G(v_0)}{\epsilon} = \left. \frac{d}{d\epsilon} [G(v_0 + \epsilon \delta_v)] \right|_{\epsilon=0} \quad (8.10)$$

si cette limite existe. Si la limite existe  $\forall \delta_v \in V$ , alors on dit que  $G$  possède une dérivée de Gateaux en  $v_0$ .

On reconnaît là une dérivée directionnelle. On nomme parfois cette dérivée la *première variation de  $G$* . Le terme de droite contient une dérivée classique par rapport à une variable réelle  $\epsilon$  et est plus simple à calculer.<sup>1</sup>

**Remarque 8.5.** Propriétés de la dérivée de Gateaux :

En vue des applications des prochains chapitres, nous nous placerons dans un cadre légèrement plus général. Nous considérerons en effet des fonctionnelles allant d'un espace vectoriel normé  $V$  à un autre espace vectoriel normé  $W$ . La dérivée de Gateaux est alors une fonctionnelle linéaire de  $V$  dans  $W$ . Dans beaucoup de situations,  $W$  sera tout simplement l'ensemble des réels  $R$ .

1. **Dérivée d'une somme** : Si  $G_1$  et  $G_2$  sont des applications de  $V$  dans  $W$  et si  $G(v) = G_1(v) + G_2(v)$ , alors :

$$D_v(G_1 + G_2)(v_0)[\delta_v] = D_v G_1(v_0)[\delta_v] + D_v G_2(v_0)[\delta_v] \quad (8.11)$$

2. **Dérivée d'un produit** : Si  $G_1$  et  $G_2$  sont des applications de  $V$  dans  $W$  et si on pose  $G(v) = G_1(v) \cdot G_2(v)$ , alors :

$$D_v(G_1 \cdot G_2)(v_0)[\delta_v] = D_v G_1(v_0)[\delta_v] \cdot G_2(v_0) + G_1(v_0) \cdot D_v G_2(v_0)[\delta_v] \quad (8.12)$$

1. René Eugène Gateaux (1889-1914) était un jeune mathématicien français tué au combat au début de la première guerre mondiale et dont les travaux ont été repris et généralisés par Paul Pierre Lévy et publiés à partir de 1919. N.B. D'après son acte de naissance, son nom s'orthographe sans accent circonflexe.

On notera au passage que la notation  $(\cdot)$  peut désigner toute forme de produit définie sur  $W$ .

3. **Dérivée de la composition de deux fonctionnelles** : Si  $G_1$  est une fonctionnelle de  $V$  dans  $U$  (un espace vectoriel) et si  $G_2$  est une fonctionnelle de  $U$  dans  $W$ , alors on peut composer  $G_1$  et  $G_2$  et ainsi définir une fonctionnelle  $G$  de  $V$  dans  $W$  par la composition suivante :  $v \rightarrow G_1(v) = u \in U \rightarrow G_2(u) = G_2(G_1(v)) = G(v) \in W$ . La dérivée de Gateaux est alors une fonctionnelle linéaire de  $V$  dans  $W$  définie par :

$$D_v(G_2(G_1(v_0)))[\delta_v] = D_u G_2(u_0) [(D_v G_1(v_0))[\delta_v]] \quad \text{où } u_0 = G_1(v_0) \quad (8.13)$$



### 8.3 Application aux formulations variationnelles

Considérons le problème non linéaire :

$$\begin{aligned} (u(\mathbf{x}))^\alpha - \nabla \cdot (q(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) &= r(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \\ u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (8.14)$$

Pour simplifier l'exposé, nous supposerons des conditions essentielles homogènes sur  $u$ , le cas non homogène ne posant aucune difficulté supplémentaire. La non-linéarité provient du premier terme de gauche affublé d'un exposant  $\alpha$  pour le moment quelconque (mais différent de 0 ou 1). Une formulation variationnelle pour ce problème est alors :

♠ Trouver  $u(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} ((u(\mathbf{x}))^\alpha w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x})) \, dv = \int_{\Omega} r(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) \, dv \quad \forall w(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$$

On pose alors :

$$R(u, w) = \int_{\Omega} ((u(\mathbf{x}))^\alpha w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x})) \, dv - \int_{\Omega} r(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) \, dv$$

et le problème peut maintenant s'écrire :

$$R(u, w) = 0 \quad \forall w(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$$

Pour les systèmes algébriques non linéaires, nous avons utilisé la méthode de Newton qui nécessitait le calcul d'une matrice jacobienne et donc le calcul des dérivées partielles. Revenons maintenant à notre problème non linéaire de départ. Partant d'une première approximation  $u_g^0(\mathbf{x})$  de la solution et vérifiant toutes les conditions aux limites essentielles (homogènes ou non), on cherche une correction  $\delta_u(\mathbf{x})$  telle que :

$$R(u_g^0(\mathbf{x}) + \delta_u(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall w \in V$$

**Remarque 8.6.** La notation utilisée ici est similaire à celle du cas linéaire. Dans le cas linéaire, on partait d'un relèvement des conditions aux limites essentielles  $u_g$  et on calculait une solution  $\delta_u$  vérifiant les conditions essentielles homogènes de sorte que :

$$u(\mathbf{x}) = u_g(\mathbf{x}) + \delta_u(\mathbf{x})$$

soit la solution du problème. Dans le cas non linéaire, la fonction  $u_g^0$  peut être perçue comme un relèvement des conditions aux limites essentielles et  $\delta_u(\mathbf{x})$  a exactement le même rôle que dans le cas linéaire. ◀

Appliquant le résultat précédent, on trouve :

$$0 = R(u_g^0, w) + D_u(u_g^0, w)[\delta_u] + \|\delta_u\| o(\delta_u, w)$$

Négligeant le terme  $\|\delta_u\| o(\delta_u, w)$ , on doit maintenant résoudre :

$$D_u R(u_g^0, w)[\delta_u] = -R(u_g^0, w)$$

qui est un problème linéaire et qui correspond exactement au système linéaire 8.4 pour les systèmes d'équations algébriques. Si on revient à notre exemple, on a :

$$\begin{aligned} D_u R(u_g^0(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}))[\delta_u(\mathbf{x})] &= \frac{d}{d\epsilon} \left[ R(u_g^0(\mathbf{x}) + \epsilon \delta_u(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})) \right] \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left( \int_{\Omega} \left( (u_g^0(\mathbf{x}) + \epsilon \delta_u(\mathbf{x}))^\alpha w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \nabla(u_g^0(\mathbf{x}) + \epsilon \delta_u(\mathbf{x})) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \right) dv \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} r(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) dv \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} \left( \alpha (u_g^0(\mathbf{x}) + \epsilon \delta_u(\mathbf{x}))^{\alpha-1} \delta_u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \nabla \delta_u(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \right) dv \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} \left( \alpha (u_g^0(\mathbf{x}))^{\alpha-1} \delta_u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \nabla \delta_u(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \right) dv \end{aligned}$$

Le problème linéarisé consiste donc à :

♠ Pour  $u_g^0(\mathbf{x})$  donné, trouver  $\delta_u(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} \left( \alpha (u_g^0(\mathbf{x}))^{\alpha-1} \delta_u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \nabla \delta_u(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \right) dv = -R(u_g^0(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})) \quad \forall w(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$$

Une fois ce problème linéaire résolu, on obtient une nouvelle approximation de la solution en posant  $u_g^1(\mathbf{x}) = u_g^0(\mathbf{x}) + \delta_u(\mathbf{x})$ . On en arrive à l'algorithme :

- $u_g^0(\mathbf{x})$  étant donné ;
- On résout pour  $k \geq 1$  :

$$\int_{\Omega} \left( \alpha (u_g^{k-1}(\mathbf{x}))^{\alpha-1} \delta_u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \nabla \delta_u(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \right) dv = -R((u_g)^{k-1}(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})) \quad \forall w(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega) \quad (8.15)$$

- Mise à jour de la solution :  $u_g^k(\mathbf{x}) = u_g^{k-1}(\mathbf{x}) + \delta_u(\mathbf{x})$  ;



**Algorithme 8.7: Méthode de Newton**

1. Étant donné  $\epsilon$ , un critère d'arrêt
2. Étant donné  $N$ , le nombre maximal d'itérations
3. Étant donné  $u_g^0(\mathbf{x})$ , une approximation initiale de la solution du système
4. Résoudre le système linéaire :

$$D_u R(u_g^k, w)[\delta_u] = -R(u_g^k, w) \quad (8.16)$$

5. Mise à jour :

$$u_g^{k+1}(\mathbf{x}) = u_g^k(\mathbf{x}) + \delta_u(\mathbf{x})$$

6. Si  $\frac{\|\delta_u\|_V}{\|u_g^{k+1}\|_V} < \epsilon$ 
  - convergence atteinte
  - écrire la solution  $u_{k+1}(\mathbf{x})$
  - arrêt
7. Si le nombre maximal d'itérations  $N$  est atteint :
  - convergence non atteinte en  $N$  itérations
  - arrêt
8. Retour à l'étape 4

L'algorithme de la méthode de Newton 8.16 converge généralement à l'ordre 2 ce qui signifie que si  $u$  est la solution du problème non linéaire, alors :

$$\|u - u_g^{k+1}\|_V \simeq C \|u - u_g^k\|_V^2$$

et la norme du résidu a exactement le même comportement c.-à-d. :

$$\|R(u_g^{k+1})\|_\infty \simeq C \|R(u_g^k)\|_\infty^2 \quad (8.17)$$

Notre problème non linéaire n'est pas sans rappeler la forme de l'équation 8.7 pour les systèmes algébriques. On peut aussi proposer les algorithmes de points fixes suivant :

- $u_g^0$  étant donné ;
- On résout pour  $k \geq 1$  :

$$\int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \nabla u_g^{k+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \, dv = - \int_{\Omega} (u_g^k(\mathbf{x}))^\alpha w(\mathbf{x}) \, dv + \int_{\Omega} r(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) \, dv \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (8.18)$$

ou encore :

$$\int_{\Omega} \left( q(\mathbf{x}) \nabla u_g^{k+1} \cdot \nabla w + (u_g^k(\mathbf{x}))^{\alpha-1} u_g^{k+1}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) \right) \, dv = \int_{\Omega} r(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) \, dv \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (8.19)$$

Les 2 derniers algorithmes sont des variantes de l'algorithme 8.7 pour les systèmes algébriques.

**Remarque 8.8.** Les algorithmes de points fixes convergent généralement linéairement :

$$\|u - u_g^{k+1}\|_V \simeq C \|u - u_g^k\|_V \quad (C < 1) \quad (8.20)$$

Puisqu'il n'est pas toujours possible de calculer la norme de l'erreur, on note qu'en pratique, la norme du résidu a exactement le même comportement c.-à-d. :

$$\|R(u_g^{k+1})\|_\infty \simeq C \|R(u_g^k)\|_\infty \quad (8.21)$$

Les formes bilinéaires des formulations variationnelles 8.15, 8.18 et 8.19 sont symétriques mais ce n'est pas forcément toujours le cas. La méthode de Newton notamment, mène souvent à des matrices non symétriques. Les matrices symétriques sont plus avantageuses car elles nécessitent moins d'espace mémoire et surtout, si elles sont de plus définies positives, on peut utiliser des méthodes itératives telles le gradient conjugué (préconditionné) pour résoudre les systèmes linéaires correspondants. Dans le cas non symétrique, il existe également des méthodes itératives très efficaces comme la méthode GMRES (« Generalized minimal residual »). ◀

**Exemple 8.9.** On considère un problème unidimensionnel pour illustrer les notions de convergence des méthodes de Newton et de points fixes. On cherche donc à résoudre dans l'intervalle  $]0, 5[$  :

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2}(x) & = \beta e^{u(x)} \\ u(0) = u(5) & = 0 \end{cases}$$

On multiplie par une fonction test  $w$  (en notant dorénavant  $w$  au lieu de  $w(x)$  pour alléger la notation) s'annulant en  $x = 0$  et  $x = 5$  et on intègre sur le domaine. On obtient la formulation variationnelle :

$$\int_0^5 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^5 \beta e^u w dx$$

de sorte que pour une fonction  $u_g^0$  donnée et vérifiant les conditions aux limites essentielles, on définit la fonctionnelle résidu :

$$R(u_g^0, w) = \int_0^5 \left( \frac{du_g^0}{dx} \frac{dw}{dx} - \beta e^{u_g^0} w \right) dx$$

La méthode de Newton appliquée à ce problème nécessite le calcul d'une correction  $\delta_u$  solution de :

$$\int_0^5 \left( \frac{d\delta_u}{dx} \frac{dw}{dx} + \beta e^{u_g^0} \delta_u w \right) dx = - \int_0^5 \left( \frac{du_g^0}{dx} \frac{dw}{dx} - \beta e^{u_g^0} w \right) dx$$

Pour  $\beta = 1/10$  et pour  $u_g^0 = 0$ , les itérations de la méthode de Newton ont donné les résultats suivants :

Méthode de Newton	
Itération	$\ R(u_g^{k+1})\ _\infty$
1	$0,421 \times 10^{+0}$
2	$0,361 \times 10^{-1}$
3	$0,332 \times 10^{-3}$
4	$0,285 \times 10^{-9}$
5	$0,710 \times 10^{-17}$

On constate la convergence quadratique (voir équation 8.17) typique de la méthode. Par contre, une méthode de points fixes possible serait :

$$\int_0^5 \frac{du_g^1}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^5 \beta e^{u_g^0} w dx$$

qui peut aussi s'écrire en posant  $u_g^1 = u_g^0 + \delta_u$  :

$$\int_0^5 \frac{d\delta_u}{dx} \frac{dw}{dx} dx = - \int_0^5 \left( \frac{du_g^0}{dx} \frac{dw}{dx} - \beta e^{u_g^0} w \right) dx$$

On obtient alors les itérés suivants :

Méthode de points fixes			
Itération	$\ R(u_g^{k+1})\ _\infty$	Itération	$\ R(u_g^{k+1})\ _\infty$
1	$0,312 \times 10^{+0}$	7	$0,632 \times 10^{-3}$
2	$0,937 \times 10^{-1}$	8	$0,238 \times 10^{-3}$
3	$0,326 \times 10^{-1}$	$\vdots$	$\vdots$
4	$0,119 \times 10^{-1}$	22	$0,281 \times 10^{-11}$
5	$0,447 \times 10^{-2}$	23	$0,106 \times 10^{-11}$
6	$0,167 \times 10^{-2}$	24	$0,400 \times 10^{-12}$

La convergence est visiblement linéaire (voir l'équation 8.21) avec une constante  $C$  de l'ordre de 0,37. Si on modifie très légèrement en prenant  $\beta$  un peu plus grand ( $\beta = 1/5$ ), la convergence est plus difficile. Partant encore de  $u_g^0 = 0$ , ni la méthode de Newton, ni celle des points fixes n'a convergé. Une stratégie alternative est donc nécessaire. Le problème provient du choix de  $u_g^0 = 0$  qui est trop loin de la solution recherchée. Pour remédier à cela, on peut par exemple résoudre d'abord avec  $\beta = 1/10$  et se servir de la solution obtenue comme point de départ pour la résolution à  $\beta = 1/5$ . On récupère ainsi la convergence quadratique. Une telle stratégie est appelée *méthode de continuation* et il en existe plusieurs variantes plus ou moins sophistiquées. ♦

## 8.4 Exercices

1. On veut résoudre le problème non linéaire suivant par la méthode de Newton :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot [k(1 + \lambda u^2)^m \nabla u(x_1, x_2)] &= f(x_1, x_2) \quad \text{dans } \Omega \\ u(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2) \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ [k(1 + \lambda u^2)^m] \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_1, x_2) &= h(x_1, x_2) \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

où  $k$ ,  $\lambda$  et  $m$  sont des constantes positives.

- Obtenir la formulation variationnelle, linéariser le problème et donner l'algorithme de la méthode de Newton.
  - Pour bien converger, la méthode de Newton requiert une solution de départ vérifiant les conditions essentielles et « pas trop loin » de la solution du problème. Suggérer une façon d'obtenir  $u_0$ .
  - Proposer maintenant une méthode de points fixes pour ce problème.
2. On veut résoudre le problème non linéaire suivant par la méthode de Newton :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k \nabla u(x_1, x_2)) &= f(x_1, x_2) \quad \text{dans } \Omega \\ u(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2) \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_1, x_2) &= -h(u^4(x_1, x_2) - u_\infty^4) \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

où  $k$ ,  $h$  et  $u_\infty$  sont des constantes positives.

- Pour bien converger, la méthode de Newton requiert une solution de départ vérifiant les conditions essentielles et « pas trop loin » de la solution du problème non linéaire. Suggérer une façon d'obtenir  $u_0$ .
- Linéariser le problème et donner l'algorithme de la méthode de Newton.

## Chapitre 9

# Problèmes instationnaires

Les problèmes d'évolution (instationnaires) sont d'une très grande importance pratique. La nature même de certains problèmes fait en sorte qu'un état permanent (indépendant du temps) n'est jamais atteint. L'écoulement turbulent d'une rivière en est un exemple. On peut aussi s'intéresser à la transition entre l'état initial d'un système et son état permanent. Dans chaque cas, la solution recherchée varie non seulement en espace mais aussi avec le temps  $t$ .

### 9.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

Avant de passer au cas des équations aux dérivées partielles, il convient de faire un rappel sur les schémas instationnaires classiques pour les équations différentielles ordinaires. Nous référons le lecteur à Fortin, réf. [25] pour une discussion plus complète. Soit le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = f(t, U), & \text{pour } t \in [t_0, t_f] \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

On cherchera à obtenir une approximation de la fonction  $u(t)$  pour  $t_0 \leq t \leq t_f$ . Soit  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$  une partition de l'intervalle  $[t_0, t_f]$  et  $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ . On notera  $U_n$  l'approximation de  $U(t)$  en  $t = t_n$ . L'idée la plus simple consiste à remplacer la dérivée temporelle par une formule de différences finies. Par exemple :

$$\begin{cases} \frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta t_{n+1}} = f(t_{n+1}, U_{n+1}) \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

qui donne le schéma d'Euler implicite d'ordre 1 ou encore :

$$\begin{cases} \frac{3U_{n+1} - 4U_n + U_{n-1}}{2\Delta t} = f(t_{n+1}, U_{n+1}) \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

qui est le schéma de différence arrière d'ordre 2 (ou schéma de Gear) où on a supposé que le pas de temps était constant ( $\Delta t_{n+1} = \Delta t_n = \Delta t$ ). Il s'agit ici d'un schéma à deux pas en ce sens que l'on doit conserver la solution aux deux pas précédents (en  $t = t_n$  et en  $t = t_{n-1}$ ) pour calculer la solution au temps  $t = t_{n+1}$ . On peut aussi introduire un schéma explicite (Euler) :

$$\begin{cases} \frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta t_{n+1}} = f(t_n, U_n) \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

Plusieurs variantes sont ainsi possibles, chacune ayant ses avantages et inconvénients, la plus importante considération étant la stabilité dont nous discuterons un peu plus loin.

On peut regrouper un certain nombre de ces schémas et introduire une famille de méthodes numériques en considérant la somme pondérée des dérivées de  $U$  de la manière suivante :

$$\theta \frac{dU}{dt}(t_{n+1}) + (1 - \theta) \frac{dU}{dt}(t_n) = \frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\Delta t_{n+1}} \quad \text{pour } \theta \in [0, 1] \quad (9.1)$$

qui mène directement au schéma général :

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta t_{n+1}} = \theta f(t_{n+1}, U_{n+1}) + (1 - \theta) f(t_n, U_n)$$

ou encore :

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t_{n+1} (\theta f(t_{n+1}, U_{n+1}) + (1 - \theta) f(t_n, U_n)) \quad (9.2)$$

On appelle theta-schéma cette famille de discrétisations temporelles.

### 9.1.1 Ordre de convergence

Nous ferons l'analyse dans le cas où le pas de temps est constant c.-à-d.  $\Delta t_{n+1} = \Delta t$ . On montre alors facilement, à l'aide des développements de Taylor appropriés, que l'erreur de troncature locale (voir Fortin [25]) est :

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(\Delta t) &= \left( \frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\Delta t_{n+1}} \right) - \theta f(t_{n+1}, U(t_{n+1})) - (1 - \theta) f(t_n, U(t_n)) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \Delta t_{n+1} \frac{d^2 U}{dt^2}(t_n) + \left( \frac{1}{6} - \frac{\theta}{2} \right) (\Delta t_{n+1})^2 \frac{d^3 U}{dt^3}(t_n) + \dots \end{aligned}$$

et on en tire les conclusions suivantes :

- Le schéma d'Euler explicite ( $\theta = 0$ ) est d'ordre 1 ;
- Le schéma d'Euler implicite ( $\theta = 1$ ) est également d'ordre 1 ;
- Le schéma de Crank-Nicholson ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) est d'ordre 2.

### 9.1.2 Stabilité absolue

L'ordre de convergence ne fait pas foi de tout. Pour étudier la stabilité absolue du theta-schéma, on considère (voir Fortin [25]) l'équation différentielle :

$$U'(t) + \lambda U(t) = 0, \quad U(0) = 1 \tag{9.3}$$

dont la solution analytique est simplement  $U(t) = e^{-\lambda t}$ . On considèrera le cas où  $\lambda$  est un nombre complexe dont la partie réelle est positive. La solution est donc décroissante et on souhaite avoir la même propriété pour le schéma numérique. Si on applique le theta-schéma à cette équation différentielle particulière, on obtient :

$$U_{n+1} = U_n - \theta \lambda U_{n+1} - (1 - \theta) \lambda U_n$$

et en regroupant, on trouve facilement que :

$$U_{n+1} = \left( \frac{1 - \Delta t(1 - \theta)\lambda}{1 + \theta \lambda \Delta t} \right) U_n$$

Puisque  $\lambda$  est potentiellement un nombre complexe, on pose  $z = \lambda \Delta t = x + iy$  et la suite  $U_n$  sera donc décroissante si :

$$\left| \frac{1 - (1 - \theta)z}{1 + \theta z} \right| \leq 1 \text{ ou encore si } |1 - (1 - \theta)z| < |1 + \theta z| \tag{9.4}$$

et on rappelle que l'on ne s'intéresse qu'au cas où la partie réelle  $x$  est positive<sup>1</sup>. Un simple calcul montre que cette dernière condition est équivalente à :

$$(1 - 2\theta)(x^2 + y^2) < 2x \tag{9.5}$$

et de cette inégalité, on tire immédiatement les conclusions suivantes :

- Si  $\theta \geq 1/2$ , l'inégalité est vérifiée pour tout  $x > 0$ . La zone de stabilité absolue contient donc tout le demi-plan des nombres complexes à partie réelle positive et on dit que le schéma est inconditionnellement stable. C'est donc le cas du schéma de Crank-Nicholson qui est de plus d'ordre 2.
- Le cas  $\theta = 1$  correspond au schéma d'Euler implicite qui est donc inconditionnellement stable mais seulement d'ordre 1.
- Pour  $\theta < 1/2$ , l'inégalité 9.5 peut s'écrire

$$\left( x - \frac{1}{1 - 2\theta} \right)^2 + y^2 < \left( \frac{1}{1 - 2\theta} \right)^2$$

et le schéma est dit conditionnellement stable. La zone de stabilité absolue est le cercle de centre  $(1/(1 - 2\theta), 0)$  et de rayon  $1/(1 - 2\theta)$ .

---

1. On notera qu'il y a un changement de signe de  $\lambda$  par rapport à la référence [25]. La raison deviendra plus évidente lorsque l'on considèrera les applications en éléments finis

- En particulier, pour le schéma d'Euler explicite ( $\theta = 0$ ), la zone de stabilité absolue est l'intérieur du cercle centré en 1 et de rayon 1. Pour  $\lambda$  réel positif ( $x = \lambda\Delta t > 0$  et  $y = 0$ ), cela signifie que soit

$$-1 < \lambda\Delta t - 1 < 1$$

L'inégalité de droite est triviale mais celle de gauche donne une borne supérieure pour le pas de temps :

$$0 < \Delta t < \frac{2}{\lambda}$$

On montrera (voir les exercices de fin de chapitre) que dans le cas général, cette condition s'écrit :

$$0 < \Delta t < \frac{2}{(1 - 2\theta)\lambda} \quad (9.6)$$

Dans l'utilisation de la méthode des éléments finis, c'est un système d'équations différentielles que nous rencontrerons. Plus précisément, dans le cas d'une équation linéaire, nous obtiendrons une forme quasi-variationnelle de la forme :

$$M\dot{U} + AU = F + S$$

où l'on peut supposer les matrices  $M$  et  $A$  symétriques et définies positives. Pour l'analyse de stabilité absolue, on peut considérer l'équation homogène :

$$M\dot{U} + AU = 0$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\dot{U} + M^{-1}AU = 0$$

La matrice  $M^{-1}A$  étant définie positive, elle possède une base de vecteurs propres orthonormaux et chaque vecteur propre est associé à une valeur propre réelle et positive. On peut donc écrire  $M^{-1}A = Q\Lambda Q^T$  où  $Q$  est une matrice orthonormale dont les colonnes sont les vecteurs propres de  $M^{-1}A$  tandis que la matrice  $\Lambda$  est diagonale et contient les valeurs propres. On a alors :

$$\dot{U} + Q\Lambda Q^T U = 0$$

et en posant  $Q^T U = Y$  de sorte que  $\dot{U} = Q\dot{Y}$  on obtient :

$$\dot{Y} + \Lambda Y = 0$$

qui n'est rien d'autre qu'un système d'équations différentielles totalement indépendantes les unes des autres et toutes de la forme 9.3. L'analyse de stabilité est donc la même et dans le cas des schémas conditionnellement stables, on prendra la contrainte la plus serrée sur le pas de temps. Dans le cas du schéma d'Euler explicite, la condition de stabilité absolue sera :

$$\Delta t < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

où bien entendu,  $\lambda_{max}$  est la plus grande valeur propre de  $M^{-1}A$ .

**Remarque 9.1.** En pratique, il n'est pas facile de s'assurer de respecter cette condition de stabilité car les valeurs propres de  $M^{-1}K$  sont en général inconnues. ◀



## 9.2 Formulation quasi-variationnelle

Nous considérerons ici l'équation aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} c(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t))\dot{u}(\mathbf{x}, t) + p(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t))u(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x}, t) \\ \quad - \nabla \cdot (q(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t))\nabla u(\mathbf{x}, t)) = r(\mathbf{x}, t, u) \quad \text{dans } \Omega \\ \quad \quad \quad u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \quad \quad \quad q(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t))\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t)) \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \quad \quad \quad u(\mathbf{x}, t_0) = u_0(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (9.7)$$

que nous avons vue au chapitre 6 mais enrichie d'une dérivée temporelle  $\dot{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$  ainsi que d'une condition initiale. On remarque de plus que les fonctions  $p$ ,  $q$  et  $r$  de même que les conditions aux limites peuvent dépendre du temps (mais pas forcément) et même de la solution  $u$  elle-même dans le cas non linéaire. Il s'agit donc d'un problème d'évolution en temps à partir d'une condition initiale donnée. On cherche ainsi à obtenir une approximation de la fonction  $u(\mathbf{x}, t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$  pour  $t_0 \leq t \leq t_f$  et  $\mathbf{x}$  dans un domaine  $\Omega$ . On ne pourra calculer la solution que sur une partition  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$  de l'intervalle  $[t_0, t_f]$  et on pose  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ . et  $t_n = t_0 + \sum_{i=1}^n \Delta t_i$ .

Au temps  $t = t_n$ , multiplions l'équation différentielle par une fonction test  $w$  et intégrons par parties sur l'élément  $K$ , sans prendre de dispositions particulières pour la dérivée temporelle. On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_K (c(\mathbf{x}, t_n, u(\mathbf{x}, t_n))\dot{u}(\mathbf{x}, t_n)w(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, t_n, u(\mathbf{x}, t_n))u(\mathbf{x}, t)w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}, t_n, u(\mathbf{x}, t_n))\nabla u \cdot \nabla w) dv \\ & = \int_K r(\mathbf{x}, t_n, u(\mathbf{x}, t_n)) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(\mathbf{x}, t_n, u(\mathbf{x}, t_n)) w(\mathbf{x}) ds \end{aligned} \quad (9.8)$$

Cette formulation est dite quasi-variationnelle car la dérivée temporelle n'a pas encore été discrétisée. Nous ne nous en soucierons pas pour l'instant et nous procéderons comme d'habitude.

Dans tous les schémas qui vont suivre, nous allons expliciter les systèmes élémentaires à assembler à chaque pas de temps. On applique donc à l'équation 9.8 la méthode de Ritz sur chaque élément  $K$  mais cette fois en séparant les variables de temps  $t$  et d'espace  $\mathbf{x}$  :

$$u_n = u(\mathbf{x}, t_n)|_K \simeq u^K(\mathbf{x}, t_n) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_j^K(t_n)\psi_j^K(\mathbf{x}) \quad (9.9)$$

Seuls les degrés de liberté dépendent du temps. Les fonctions d'interpolation  $\psi_j^K$  restent les mêmes que dans le cas stationnaire. Mentionnons toutefois l'existence de méthodes d'éléments finis, dites en espace-temps, où les fonctions d'interpolation dépendent explicitement du temps.

Remplaçant dans la formulation quasi-variationnelle 9.8, on trouve :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_d^K} \dot{u}_j^K(t_n) \int_K c(\mathbf{x}, t_n, u_n) \psi_j^K(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) dv + \\ & \sum_{j=1}^{n_d^K} u_j^K(t_n) \int_K \left( p(\mathbf{x}, t_n, u_n) \psi_j^K(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}, t_n, u_n) \nabla \psi_j^K(\mathbf{x}) \cdot \nabla w \right) dv \\ & = \int_K r(\mathbf{x}, t_n, u_n) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(\mathbf{x}, t_n, u_n) w(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

L'expression  $\dot{u}_j^K(t_n)$  désigne la dérivée temporelle du degré de liberté  $u_j^K$  au temps  $t_n$  c.-à-d.  $\frac{\partial u_j^K}{\partial t}(\mathbf{x}, t_n)$ . Pour obtenir le système élémentaire, on prend successivement  $w(\mathbf{x}) = \psi_i^K(\mathbf{x})$ , pour  $i$  allant de 1 jusqu'à  $n_d^K$ . En notant  $U_n^K$  le vecteur des degrés de liberté de l'élément  $K$  au temps  $t_n$  et  $\dot{U}_n^K$  sa dérivée temporelle, on obtient ainsi le système élémentaire (non linéaire) :

$$M^K(u_n) \dot{U}_n^K + A^K(u_n) U_n^K = F^K(u_n) + S^K(u_n)$$

qui sous cette forme est non linéaire et devra être linéarisées pas l'une ou l'autre des méthodes du chapitre 8. Pour notre problème type, qui présente des non-linéarités potentielles dans chaque terme, nous avons introduit les matrices élémentaires  $M^K(u^*)$ ,  $A^K(u^*)$  et les vecteurs élémentaires  $F^K(u^*)$  et  $S^K(u^*)$  dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} m_{ij}^K(u^*) &= \int_K c(\mathbf{x}, t_n, u^*) \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) dv \\ a_{ij}^K(u^*) &= \int_K \left( p(\mathbf{x}, t_n, u^*) \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}, t_n, u^*) \nabla \psi_j^K(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i^K(\mathbf{x}) \right) dv \\ f_i^K(u^*) &= \int_K r(\mathbf{x}, t_n, u^*) \psi_i^K(\mathbf{x}) dv \\ s_i^K(u^*) &= \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(\mathbf{x}, t_n, u^*) \psi_i^K(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

où  $u^*$  est une fonction supposée connue ( $u^* = u_n$  dans le cas actuel) qui sera fournie par l'algorithme de résolution du problème non linéaire. Une fois assemblés, ces matrices et vecteurs élémentaires formeront des matrices et vecteurs globaux notées respectivement  $M(u^*)$  et  $A(u^*)$ ,  $F(u^*)$  et  $S(u^*)$ . Cette notation exprime la dépendance de ces termes sur la fonction  $u^*$ . On pourrait aussi noter  $M(U^*)$  et  $A(U^*)$ ,  $F(U^*)$  et  $S(U^*)$  pour exprimer la dépendance sur le vecteur des valeurs nodales  $U^*$  de la fonction  $u^*$ . Au niveau élémentaire, il va de soi que les matrices et vecteurs élémentaires  $M^K(u^*)$ ,  $A^K(u^*)$ , ... dépendent des valeurs nodales élémentaires de la fonction  $u^*$  (noté  $U^{*K}$ ). Le passage du niveau élémentaire au niveau global se fait par l'assemblage habituel.

La matrice  $M(u^*)$  est souvent appelée matrice masse. Les termes de droite  $F(u^*)$  et  $S(u^*)$  prennent en compte respectivement un éventuel terme source et les conditions aux limites naturelles. On pourrait fusionner ces deux termes mais il est mieux avisé de voir explicitement comment sont traités ces conditions aux limites.

Mentionnons enfin que dans le cas où les fonctions  $c, p, \dots$  ne dépendent pas explicitement d'une fonction  $u^*$ , mais peuvent encore dépendre explicitement du temps et de la position  $\mathbf{x}$ , nous adopterons la notation  $F_n, S_n, M_n$  et  $A_n$  (l'indice  $n$  réfère toujours au temps  $t_n$ ). Enfin, dans le cas où les vecteurs et/ou les matrices ne dépendent aucunement du temps, les indices seront tout simplement enlevés ( $M, A, F$  et  $S$  respectivement) correspondant au cas où  $c = c(\mathbf{x}), p = p(\mathbf{x})$ , etc.

### 9.3 Les schémas BDF implicites

Dans cette section, nous introduisons une famille de schémas de différentiation arrière mieux connus sous le nom BDF («Backward Differentiation Formula»). Le plus connu est bien entendu le schéma d'Euler implicite déjà évoqué et que l'on nomme parfois schéma BDF1 car il est d'ordre 1. Dans ce qui suit, nous nous concentrerons sur le schéma BDF2 (aussi appelé schéma de Gear) pour lequel nous ferons tout le développement. Le schéma d'Euler ou tout autre schéma BDF d'ordre plus élevé se traiterait de manière similaire.

Nous noterons  $u_n$  la solution au temps  $t = t_n$ . Au pas de temps  $n + 1$ , l'équation 9.8 s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_K (c(u_{n+1})\dot{u}(t_{n+1})w(\mathbf{x}) + p(u_{n+1})u_{n+1}w(\mathbf{x}) + q(u_{n+1})\nabla u_{n+1} \cdot \nabla w) dv \\ = \int_K r(u_{n+1})w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u_{n+1})w(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

Nous avons simplifié la notation en écrivant  $c(\mathbf{x}, t_{n+1}, u(\mathbf{x}, t_{n+1})) = c(u_{n+1})$  (et de manière similaire pour les autres fonctions  $p, q, \dots$ ) car nous nous intéressons surtout ici au cas non linéaire. Il est de plus assez rare que ces coefficients dépendent explicitement du temps  $t$  autrement qu'à travers la solution elle-même. Le cas où ce sont uniquement des fonctions de la position  $\mathbf{x}$  ne pose aucune difficulté.

L'idée est alors de remplacer la dérivée temporelle par une différence finie. On montre en effet facilement (voir Fortin [25]) que :

$$\dot{u}(t_{n+1}) = \frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2$$

Notons que pour le schéma d'Euler implicite (aussi appelé BDF1) on poserait :

$$\dot{u}(t_{n+1}) = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

qui n'est toutefois que d'ordre 1. Le schéma d'ordre 2 est à 2 pas, ce qui pose une petite difficulté au démarrage puisque seule la condition initiale  $u_0$  est connue. Pour obtenir  $u_1$ , on peut faire un pas de la méthode d'Euler implicite ou mieux encore un pas du schéma de Crank-Nicholson (voir

la section 9.4) qui est également d'ordre 2 et passer ensuite au schéma de Gear pour les autres pas de temps. On a maintenant la formulation :

$$\begin{aligned} \int_K \left( c(u_{n+1}) \left( \frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2\Delta t} \right) w(\mathbf{x}) + p(u_{n+1}) u_{n+1} w(\mathbf{x}) + q(u_{n+1}) \nabla u_{n+1} \cdot \nabla w \right) dv \\ = \int_K r(u_{n+1}) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u_{n+1}) w(\mathbf{x}) ds \end{aligned} \quad (9.10)$$

qui est maintenant un problème non linéaire que l'on doit résoudre à chaque pas de temps ( $u_n$  et  $u_{n-1}$  étant supposés connus).

### 9.3.1 Variante de type points fixes

Soit donc  $u^0$  une approximation de  $u_{n+1}$ . Au début d'un nouveau pas de temps, on prend  $u^0 = u_n$  par exemple. Une résolution de type points fixes consiste à calculer une séquence d'approximations  $u^{k+1}$  chacune solution d'un problème linéaire obtenu en évaluant les propriétés physiques dans 9.10 (les fonctions  $c$ ,  $p$ ,  $q$  etc.) en  $u^k$ . L'indice supérieur réfère ici à l'itération de points fixes et non au pas de temps. Pour  $u^k$  connu (de l'itération de points fixes précédente) et  $u_n$  et  $u_{n-1}$  également connus (des pas de temps précédents), on détermine  $u^{k+1}$  solution du problème linéaire :

$$\begin{aligned} \int_K \left[ c(u^k) \left( \frac{3u^{k+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2\Delta t} \right) w(\mathbf{x}) + p(u^k) u^{k+1} w(\mathbf{x}) + q(u^k) \nabla u^{k+1} \cdot \nabla w \right] dv \\ = \int_K r(u^k) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u^k) w(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

ou encore, en envoyant à droite ce qui est déjà connu :

$$\begin{aligned} \int_K \left[ c(u^k) \left( \frac{3u^{k+1}}{2\Delta t} \right) w(\mathbf{x}) + p(u^k) u^{k+1} w(\mathbf{x}) + q(u^k) \nabla u^{k+1} \cdot \nabla w \right] dv \\ = \int_K \left[ c(u^k) \left( \frac{4u_n - u_{n-1}}{2\Delta t} \right) w(\mathbf{x}) + r(u^k) w(\mathbf{x}) \right] dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u^k) w(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

qui est déjà un problème linéaire permettant d'évaluer  $u^{k+1}$ . Puisque nous avons l'habitude de nous placer en formulation correction, on pose  $u^{k+1}(\mathbf{x}) = u^k(\mathbf{x}) + \delta_u(\mathbf{x})$  et on résout un problème équivalent en  $\delta_u$  de la forme :

$$a_{u^k}(\delta_u, w) = -R_{u^k}(w)$$

où :

$$a_{u^k}(\delta_u, w) = \int_K \left[ \frac{3}{2\Delta t} c(u^k) \delta_u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + p(u^k) \delta_u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + q(u^k) (\nabla \delta_u \cdot \nabla w) \right] dv$$

et :

$$\begin{aligned} R_{u^k}(w) &= \int_K \left[ c(u^k) \left( \frac{3u^k - 4u_n + u_{n-1}}{2\Delta t} \right) w(\mathbf{x}) + p(u^k) u^k w(\mathbf{x}) + q(u^k) \nabla u^k \cdot \nabla w \right] dv \\ &\quad - \int_K r(u^k) w(\mathbf{x}) dv - \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u^k) w(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

Si on note  $\mathcal{A}_{ij}^K$  et  $\mathcal{R}^K$  la matrice et le vecteur élémentaire de ce système linéaire, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij}^K &= \int_K \left[ \frac{3}{2\Delta t} c(u^k) \psi_j^K \psi_i^K + p(u^k)(\mathbf{x}) \psi_j^K \psi_i^K + q(u^k) (\nabla \psi_j^K \cdot \nabla \psi_i^K) \right] dv \\ &= \frac{3}{2\Delta t} m_{ij}^K(u^k) + a_{ij}^K(u^k) \\ \mathcal{R}_i^K &= \int_K \left[ c(u^k) \left( \frac{3u^k - 4u_n + u_{n-1}}{2\Delta t} \right) \psi_i^K(\mathbf{x}) + p(u^k) u^k \psi_i^K(\mathbf{x}) + q(u^k) \nabla u^k \cdot \nabla \psi_i^K \right] dv \\ &\quad - \int_K r(u^k) \psi_i^K(\mathbf{x}) dv - \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u^k) \psi_i^K(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^K &= \frac{3}{2\Delta t} M^K(u^k) + A^K(u^k) \\ \mathcal{R}^K &= \frac{1}{2\Delta t} M^K(u^k) \cdot (3(U^k)^K - 4U_n^K + U_{n-1}^K) + A^K(u^k) \cdot U^K - F^K(u^k) - S^K(u^k) \end{aligned}$$

en utilisant les matrices élémentaires introduites à la section 9.2. Dans l'expression du second membre, on a souligné par le symbole « $\cdot$ » le produit matrice vecteur. On a aussi noté  $(U^k)^K$  (faute d'une meilleure notation) le vecteur des valeurs nodales élémentaires de la fonction  $u^k$ .

Le système global résultant de l'assemblage serait de la forme :

$$\left[ \frac{3}{2\Delta t} M(u^k) + A(u^k) \right] \cdot \delta_U = \frac{1}{2\Delta t} M(u^k) \cdot (3U^k - 4U_n + U_{n-1}) + A(u^k) \cdot U^k - F(u^k) - S(u^k)$$

On itère ainsi jusqu'à ce que par exemple la norme de  $\delta_U$  soit plus petite qu'un niveau de tolérance prescrit. On pose alors  $u_{n+1} = u^{k+1}$  (ou nodalement  $U_{n+1} = U^{k+1}$ ) et on passe au pas de temps suivant.

On peut imaginer facilement ainsi bon nombre de variantes de points fixes où l'on linéarise les termes différemment. L'approche a le mérite de la simplicité mais la convergence peut parfois être capricieuse, suivant les choix qui ont été faits.

### 9.3.2 Linéarisation par la méthode de Newton

Comme précédemment, on part d'une approximation  $u^0$  de  $u_{n+1}$ . Au début d'un nouveau pas de temps, on prend  $u^0 = u_n$ . On pose ensuite  $u^{k+1}(\mathbf{x}) = u^k(\mathbf{x}) + \delta_u(\mathbf{x})$  et on linéarise tous les termes non linéaires. On utilisera bien entendu les développements de Taylor comme par exemple  $c(u^k + \delta_u) \simeq c(u^k) + c'(u^k)\delta_u$  et  $p(u^k + \delta_u) \simeq p(u^k) + p'(u^k)\delta_u$ . Il suffit alors de remplacer ces expressions dans la formulation 9.10 et d'éliminer les termes d'ordre 2 en  $\delta_u$ . Dans notre exemple, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_K \left[ (c(u^k) + c'(u^k)\delta_u) \left( \frac{3(u^k + \delta_u) - 4u_n + u_{n-1}}{2\Delta t} \right) w(\mathbf{x}) \right] dv \\ & + \int_K \left[ (p(u^k) + p'(u^k)\delta_u)(u^k + \delta_u)w(\mathbf{x}) \right] dv + \int_K \left[ (q(u^k) + q'(u^k)\delta_u)(\nabla(u^k + \delta_u)) \cdot \nabla w \right] dv \\ & = \int_K (r(u^k) + r'(u^k)\delta_u) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} (h(u^k) + h'(u^k)\delta_u) w(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

Il suffit alors de garder ou d'envoyer à gauche tout ce qui dépend de  $\delta_u$  et d'envoyer du côté droit tout le reste c.-à-d. le résidu. Bien entendu, on néglige tous les termes d'ordre 2 en  $\delta_u$ . On obtient ainsi un problème de la forme :

$$a_{u^k}(\delta_u, w) = -R_{u^k}(w)$$

où  $R_{u^k}(w)$  est défini exactement comme à la section précédente et :

$$\begin{aligned} a_{u^k}(\delta_u, w) &= \int_K \left[ \frac{3}{2\Delta t} c(u^k) \delta_u w(\mathbf{x}) + \frac{3}{2\Delta t} c'(u^k) u^k \delta_u w(\mathbf{x}) \right] dv + \\ & \int_K \left[ p(u^k) \delta_u w(\mathbf{x}) + p'(u^k) u^k \delta_u w(\mathbf{x}) + q(u^k)(\nabla \delta_u \cdot \nabla w) + q'(u^k) \delta_u (\nabla u^k \cdot \nabla w) \right] dv \\ & - \int_K r'(u^k) \delta_u w(\mathbf{x}) dv - \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h'(u^k) \delta_u w(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

Plus spécifiquement, la matrice élémentaire correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij}^K &= \int_K \left[ \frac{3}{2\Delta t} c(u^k) \psi_j^K \psi_i^K + \frac{3}{2\Delta t} u^k c'(u^k) u^k \psi_j^K \psi_i^K \right] dv \\ & + \int_K \left[ p(u^k) \psi_j^K \psi_i^K + q(u^k)(\nabla \psi_j^K \cdot \nabla \psi_i^K) + p'(u^k) u^k \psi_j^K \psi_i^K + q'(u^k) \psi_j^K (\nabla u^k \cdot \nabla \psi_i^K) \right] dv \\ & - \int_K r'(u^k) \psi_j^K \psi_i^K dv - \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h'(u^k) \psi_j^K \psi_i^K ds \\ & = \frac{3}{2\Delta t} \left( m_{ij}^K(u^k) + \tilde{m}_{ij}^K(u^k, u^k) \right) + a_{ij}^K(u^k) + \tilde{a}_{ij}^K(u^k) - \tilde{f}_{ij}^K(u^k) - \tilde{s}_{ij}^K(u^k) \end{aligned}$$

où on a introduit de nouvelles matrices élémentaires  $\tilde{M}(u^*, v^*)$ ,  $\tilde{A}(u^*)$ ,  $\tilde{F}(u^*)$  et  $\tilde{S}(u^*)$  provenant de la linéarisation et définies par :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{ij}^K(u^*, v^*) &= \int_K c'(u^*) v^* \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) dv \\ \tilde{a}_{ij}^K(u^*) &= \int_K \left( p'(u^*) u^* \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) + q'(u^*) \psi_j^K(\mathbf{x}) \nabla u^*(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i^K(\mathbf{x}) \right) dv \\ \tilde{f}_{ij}^K(u^*) &= \int_K r'(u^*) \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) dv \\ \tilde{s}_{ij}^K(u^*) &= \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h'(u^*) \psi_j^K(\mathbf{x}) \psi_i^K(\mathbf{x}) ds\end{aligned}$$

où  $u^*$  et  $v^*$  sont des fonctions supposées connues. Cette notation à deux arguments de la matrice  $\tilde{M}^K$  sera utile lors de ses différentes utilisations. Notons que  $\tilde{F}^K(u^*)$  et  $\tilde{S}^K(u^*)$  sont bien des matrices et non des vecteurs contrairement à  $F^K(u^*)$  et  $S^K(u^*)$ . Notons de plus que la matrice  $\tilde{A}^K(u^*)$  est non symétrique. Le résidu élémentaire, que l'on cherche à annuler, est bien entendu le même que pour la méthode des points fixes de la section précédente.

Une fois la résolution complétée, on met à jour  $u^{k+1} = u^k + \delta_u$  et on recommence le processus jusqu'à ce que la norme de  $\delta_u$  soit plus petite que la tolérance prescrite. À convergence, on pose  $u_{n+1} = u^{k+1}$  et on passe au pas de temps suivant.

On constate alors que la seule différence entre la méthode des points fixes et celle de Newton est l'expression de la forme bilinéaire  $a_{u^k}(\delta_u, w)$ . Le résidu est bien sûr le même. Par contre, la convergence de la méthode de Newton est généralement plus rapide (d'ordre 2) comme on l'a vu au chapitre 8.

Notons enfin que le schéma d'Euler explicite s'obtient de manière semblable. Il en serait de même pour les schémas BDF d'ordre plus élevé qui nécessitent les valeurs de  $u_n, u_{n-1}, u_{n-2}$ , etc.

## 9.4 Le theta-schéma

Comme nous allons le constater, le theta-schéma, dans toute sa généralité, est un peu plus complexe que les schémas BDF. Comme pour les schémas précédents, on suppose connue la solution  $u_n$  au temps  $t = t_n$ . Au départ, cette information provient de la condition initiale. Le theta schéma requiert une étape préliminaire avant de pouvoir passer au temps  $t_{n+1}$ .

La forme quasi-variationnelle 9.8 s'écrit :

$$\int_K c(u_n) \dot{u}_n w(\mathbf{x}) dv = \int_K [-p(u_n) u_n w(\mathbf{x}) - q(u_n) \nabla u_n \cdot \nabla w + r(u_n) w(\mathbf{x})] dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u_n) w(\mathbf{x}) ds \quad (9.11)$$

qui, pour  $u_n$  connu, est un problème linéaire permettant de calculer explicitement  $\dot{u}_n$ . Sous forme matricielle on peut écrire :

$$M^K(u_n) \cdot \dot{U}_n^K = -A^K(u_n) \cdot U_n^K + F^K(u_n) + S^K(u_n) \quad (9.12)$$

qui doit être assemblé :

$$M(u_n) \cdot \dot{U}_n = -A(u_n) \cdot U_n + F(u_n) + S(u_n) \quad (9.13)$$

et résolu. C'est en quelque sorte une projection  $L^2$  à l'aide d'une matrice masse dépendant de  $u_n$ . Aucune condition aux limites n'est imposée pour ce problème.

On peut donc dorénavant considérer  $u_n$  et  $\dot{u}_n$  connus (et leurs vecteurs de valeurs nodales  $U_n$  et  $\dot{U}_n$ ). Comme nous l'avons vu, le theta-schéma consiste à poser :

$$u_{n+1} - u_n = \Delta t_{n+1} [\theta \dot{u}_{n+1} + (1 - \theta) \dot{u}_n]$$

ou encore en multipliant par  $c(u_{n+1})$  et par une fonction test  $w(\mathbf{x})$  et en intégrant sur un élément  $K$  :

$$\int_K c(u_{n+1})(u_{n+1} - u_n) w(\mathbf{x}) dv = \Delta t_{n+1} \left\{ \theta \int_K [c(u_{n+1}) \dot{u}_{n+1} w(\mathbf{x}) dv + (1 - \theta) \int_K c(u_{n+1}) \dot{u}_n w(\mathbf{x}) dv] \right\}$$

De l'équation aux dérivées partielles, on peut expliciter  $\dot{u}_{n+1}$  et on a alors :

$$\begin{aligned} \int_K c(u_{n+1}) u_{n+1} w(\mathbf{x}) dv &= \int_K c(u_{n+1}) u_n w(\mathbf{x}) dv \\ &+ \Delta t_{n+1} \theta \left[ \int_K (-p(u_{n+1}) u_{n+1} w(\mathbf{x}) - q(u_{n+1}) \nabla u_{n+1} \cdot \nabla w + r(u_{n+1}) w(\mathbf{x})) dv \right] \\ &+ \Delta t_{n+1} \theta \left[ \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u_{n+1}) w(\mathbf{x}) ds \right] + \Delta t_{n+1} (1 - \theta) \int_K c(u_{n+1}) \dot{u}_n w(\mathbf{x}) dv \end{aligned} \quad (9.14)$$

que nous devons linéariser avant de pouvoir l'assembler.

### 9.4.1 Cas linéaire

Il s'agit du cas le plus simple et le plus classique. Dans le problème type 9.7, les fonctions  $c$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et  $h$  dépendent seulement des variables  $\mathbf{x}$  et  $t$  (mais pas de  $u$ ). Nous noterons maintenant  $c(t_n)$ ,  $c(t_n)$ , etc. pour bien souligner ce fait. On note également donc  $M_n$ ,  $A_n$ ,  $F_n$  et  $S_n$ , les vecteurs et matrices du système qui ne dépendent plus de la solution mais possiblement de la position et du temps.

On suppose encore une fois  $u_n$  connu et on souhaite calculer  $u_{n+1}$ . Au préalable, on doit calculer  $\dot{U}_n$  qui est solution de (voir (9.13)) :

$$M_n \cdot \dot{U}_n = -A_n \cdot U_n + F_n + S_n \quad (9.15)$$

Notons que ce problème est toujours linéaire et ne pose en principe jamais de problème. Ce calcul est normalement fait à la fin du pas de temps  $t_n$  au moment où toutes les matrices et vecteurs  $M_n$ ,  $A_n$ , etc. sont encore disponibles.

Pour le pas de temps suivant, le système élémentaire (9.14) devient dans ce cas :

$$\begin{aligned} \int_K c(t_{n+1}) u_{n+1} w(\mathbf{x}) dv &= \int_K c(t_{n+1}) u_n w(\mathbf{x}) dv \\ &+ \Delta t_{n+1} \theta \left[ \int_K (-p(t_{n+1}) u_{n+1} w(\mathbf{x}) - q(t_{n+1}) \nabla u_{n+1} \cdot \nabla w + r(t_{n+1}) w(\mathbf{x})) dv \right] \\ &+ \Delta t_{n+1} \theta \left[ \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(t_{n+1}) w(\mathbf{x}) ds \right] + \Delta t_{n+1} (1 - \theta) \int_K c(t_{n+1}) \dot{u}_n w(\mathbf{x}) dv \end{aligned}$$



ou encore en envoyant à gauche ce qui dépend de  $u_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} & \int_K c(t_{n+1})u_{n+1} w(\mathbf{x}) dv + \Delta t_{n+1}\theta \left[ \int_K (p(t_{n+1})u_{n+1}w(\mathbf{x}) + q(t_{n+1})\nabla u_{n+1} \cdot \nabla w) \right] dv \\ &= \int_K c(t_{n+1})u_n w(\mathbf{x}) dv + \Delta t_{n+1}\theta \left[ \int_K r(t_{n+1}) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(t_{n+1}) w(\mathbf{x}) ds \right] \\ &+ \Delta t_{n+1}(1 - \theta) \int_K c(t_{n+1})\dot{u}_n w(\mathbf{x}) dv \end{aligned} \quad (9.16)$$

qui est un système linéaire qui, sous forme matricielle, devient :

$$\left[ M_{n+1}^K + \theta \Delta t_{n+1} A_{n+1}^K \right] \cdot U_{n+1} = M_{n+1}^K \cdot U_n + \Delta t_{n+1} \left\{ \theta \left[ F_{n+1}^K + S_{n+1}^K \right] + (1 - \theta) M_{n+1}^K \cdot \dot{U}_n^K \right\}$$

On retrouve une expression similaire dans Reddy [52] quoique dans un cas particulier. Après assemblage et comme on a l'habitude de travailler en correction, on pose  $U_{n+1} = U_n + \delta_U$  et on résout à chaque pas de temps :

$$\left[ M_{n+1} + \theta \Delta t_{n+1} A_{n+1} \right] \cdot \delta_U = \Delta t_{n+1} \left\{ \theta \left[ F_{n+1} + S_{n+1} - A_{n+1} \cdot U_n \right] + (1 - \theta) M_{n+1} \cdot \dot{U}_n \right\} \quad (9.17)$$

Il en résulte l'algorithme suivant :

1. Pour chaque pas de temps  $n \geq 1$ ,  $U_n$ ,  $F_n$ ,  $S_n$ ,  $M_n$  et  $A_n$  étant connus :
  - a) Résoudre l'équation 9.15 pour  $\dot{U}_n$  (aucune condition aux limites n'est imposée pour ce problème) ;
  - b) Assembler  $A_{n+1}$ ,  $M_{n+1}$ ,  $F_{n+1}$  et  $S_{n+1}$  ;
  - c) Résoudre l'équation 9.17 pour  $\delta_U$  ;
  - d)  $U_{n+1} = U_n + \delta_U$  ;
2. Passer au pas de temps suivant ;

Les matrices du système doivent être assemblées à tous les pas de temps. Il suffit d'une seule résolution du système 9.17 car il est linéaire.

### 9.4.2 Cas linéaire où la matrice masse est constante

Dans le problème type 9.7, ce cas correspond à la situation où la fonction  $c$  ne dépend que de  $\mathbf{x}$  mais pas de  $t$  ni de  $u$ . Par contre, les autres fonctions  $p$ ,  $q$ , et  $r$  peuvent encore dépendre de  $\mathbf{x}$  et  $t$ . Les vecteurs et matrices sont notés respectivement  $M$  (constante),  $A_n$ ,  $F_n$  et  $S_n$ . Le dernier terme du système 9.17 se simplifie en utilisant l'équation 9.15. On a ainsi :

$$M_{n+1} \cdot \dot{U}_n = M \cdot \dot{U}_n = M \cdot M^{-1} \cdot (F_n + S_n - A_n \cdot U_n) = F_n + S_n - A_n \cdot U_n$$

et par conséquent, l'équation 9.17 devient :

$$\left[ M + \theta \Delta t_{n+1} A_{n+1} \right] \cdot \delta_U = \Delta t_{n+1} \left\{ \theta \left[ F_{n+1} + S_{n+1} - A_{n+1} \cdot U_n \right] + (1 - \theta) \left[ F_n + S_n - A_n \cdot U_n \right] \right\} \quad (9.18)$$

Il en résulte l'algorithme simplifié suivant :

1. Assembler la matrice  $M$  une fois pour toutes ;
2. Pour chaque pas de temps  $n \geq 1$ ,  $U_n$ ,  $F_n$ ,  $S_n$ ,  $M_n$  et  $A_n$  étant connus :
  - a) Assembler  $A_{n+1}$ ,  $F_{n+1}$  et  $S_{n+1}$  ;
  - b) Résoudre l'équation 9.18 pour  $\delta_U$  ;
  - c)  $U_{n+1} = U_n + \delta_U$  ;
3. Passer au pas de temps suivant.

**Remarque 9.2.**

- La matrice  $M$  n'est assemblée qu'une seule fois ;
- Dans le cas où les matrices et vecteurs sont tous constants c.-à-d. ne dépendent pas du temps et donc de l'indice  $n$ , de nouvelles simplifications sont possibles et on trouve :

$$[M + \theta \Delta t_{n+1} A] \cdot \delta_U = \Delta t_{n+1} [F + S - A \cdot U_n] \quad (9.19)$$

- Si le pas de temps est constant, on n'assemble la matrice de gauche qu'une fois pour toutes et elle demeure la même pour tous les pas de temps. Il en résulte une grande économie de temps de calcul.



### 9.4.3 Cas général non linéaire

C'est certainement le cas plus difficile et aussi le plus intéressant en pratique. Il faut dans ce cas linéariser le système élémentaire donné à l'équation (9.14) et il existe plusieurs possibilités. Notons en premier lieu qu'à un pas de temps donné,  $U_n$  est connu et que l'équation 9.12 est toujours linéaire et permet de déterminer  $\dot{U}_n$ .

Nous procéderons comme pour les schémas BDF en présentant une variante de type points fixes et une approche par la méthode de Newton. Pour la méthode des points fixes, une possibilité serait d'itérer, à partir de  $u^0 = u_n$  et d'assembler le système élémentaire suivant pour calculer l'itération  $u^{k+1}$  à partir de  $u^k$  et en évaluant les fonctions  $c$ ,  $p$ , ... en  $u^k$  qui est supposé connu. Ici encore les indices supérieurs réfèrent à l'itération de points fixes et non au temps. Le système élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_K c(u^k) u^{k+1} w(\mathbf{x}) + \Delta t_{n+1} \theta \left[ \int_K (p(u^k) u^{k+1} w(\mathbf{x}) + q(u^k) \nabla u^{k+1} \cdot \nabla w) \right] dv \\ & = \int_K c(u^k) u_n w(\mathbf{x}) dv + \Delta t_{n+1} \theta \left[ \int_K r(u^k) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u^k) w(\mathbf{x}) ds \right] \\ & + \Delta t_{n+1} (1 - \theta) \int_K c(u^k) \dot{u}_n w(\mathbf{x}) dv \end{aligned} \quad (9.20)$$

Une première étape consiste à poser ici encore  $u^{k+1} = u^k + \delta_u$  (nodalement  $U^{k+1} = U^k + \delta_U$ ) L'équation (9.20) devient :

$$\begin{aligned} [M(u^k) + \theta \Delta t_{n+1} A(u^k)] \cdot \delta_U & = M(u^k) \cdot (U_n - U^k + \Delta t_{n+1} (1 - \theta) \dot{U}_n) + \\ & \Delta t_{n+1} \theta \{ F(u^k) + S(u^k) - A(u^k) \cdot U^k \} \end{aligned} \quad (9.21)$$

On itère ainsi jusqu'à ce que la correction  $\delta_U$  soit plus petite que le seuil prescrit. On pose ensuite  $u^{k+1} = u_{n+1}$  (ou encore  $U^{k+1} = U_{n+1}$ ). On en arrive à l'algorithme qui suit.

1. On se donne un nombre maximum d'itérations  $N$  aussi qu'un critère d'arrêt  $\epsilon_a$  pour les systèmes non linéaires ;
2. Pour chaque pas de temps  $n \geq 1$ ,  $U_n$  étant connu :
  - a) Résoudre l'équation 9.12 pour  $\dot{U}_n$  (sauf pour le schéma d'Euler implicite c.-à-d. lorsque  $\theta = 1$ ) ;
  - b) On pose  $U^0 = U_n$  et on y impose les conditions aux limites essentielles au temps  $t = t_{n+1}$  ;
  - c) Début de la boucle pour la non-linéarité :
    - i. Résoudre le système linéaire (9.21) ;
    - ii. Mettre à jour :  $U^{k+1} = U^k + \delta_U$  ;
    - iii. Si  $\|\delta_U\| \geq \epsilon_a$  et le nombre maximal d'itérations n'est pas atteint, on retourne à 9.21.
  - d) La solution à ce pas de temps est maintenant connue :  $U_{n+1} = U^{k+1}$  ;
3. Passer au pas de temps suivant.

### Variante de type Newton

On peut aussi recourir à la méthode de Newton dans le cas de problèmes fortement non linéaires. On revient alors à l'équation 9.14 mais cette fois, on linéarise tous les termes. Au début d'un nouveau pas de temps, on prend  $u^0 = u_n$ . On pose ensuite  $u^{k+1}(\mathbf{x}) = u^k(\mathbf{x}) + \delta_u(\mathbf{x})$  et on linéarise tous les termes non linéaires. On utilisera encore ici les développements de Taylor comme par exemple  $c(u^k + \delta_u) \simeq c(u^k) + c'(u^k)\delta_u$  et  $p(u^k + \delta_u) \simeq p(u^k) + p'(u^k)\delta_u$ , etc.

$$\begin{aligned}
 \int_K (c(u^k) + c'(u^k)\delta_u)(u^k + \delta_u) w(\mathbf{x}) dv &= \int_K (c(u^k) + c'(u^k)\delta_u)u_n w(\mathbf{x}) dv \\
 &+ \Delta t_{n+1}\theta \left[ \int_K \left( -(p(u^k) + p'(u^k)\delta_u)(u^k + \delta_u)w(\mathbf{x}) - (q(u^k) + q'(u^k)\delta_u)\nabla(u^k + \delta_u) \cdot \nabla w \right) dv \right] \\
 &+ \Delta t_{n+1}\theta \left[ \int_K \left( (r(u^k) + r'(u^k)\delta_u) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} (h(u^k) + h'(u^k)\delta_u) w(\mathbf{x}) ds \right) \right] \\
 &+ \Delta t_{n+1}(1 - \theta) \int_K (c(u^k) + c'(u^k)\delta_u)\dot{u}_n w(\mathbf{x}) dv
 \end{aligned}
 \tag{9.22}$$

Il reste la tâche un peu fastidieuse de séparer les termes dépendant de  $\delta_u$  des autres et de négliger les termes d'ordre 2. On arrive, après un certain nombre de réarrangements et de simplifications,

au système élémentaire suivant :

$$\begin{aligned}
& \int_K (c(u^k) \delta_u w(\mathbf{x})) - c'(u^k)[u_n - u^k + \Delta t_{n+1}(1 - \theta)\dot{u}_n] \delta_u w(\mathbf{x}) dv \\
& + \Delta t_{n+1} \theta \int_K \left[ p(u^k) \delta_u w(\mathbf{x}) + q(u^k) (\nabla \delta_u \cdot \nabla w) + p'(u^k) u^k \delta_u w(\mathbf{x}) + q'(u^k) \delta_u (\nabla u^k \cdot \nabla w) \right] \\
& + \Delta t_{n+1} \theta \left[ - \int_K r'(u^k) \delta_u w(\mathbf{x}) dv - \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h'(u^k) \delta_u w(\mathbf{x}) ds \right] \\
& = \int_K c(u^k) (u_n - u^k) w(\mathbf{x}) dv + \Delta t_{n+1} \theta \left[ \int_K r(u^k) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(u^k) w(\mathbf{x}) ds \right] \\
& - \Delta t_{n+1} \theta \left[ \int_K p(u^k) u^k w(\mathbf{x}) + q(u^k) (\nabla u^k \cdot \nabla w) dv \right] \\
& + \Delta t_{n+1} (1 - \theta) \int_K c(u^k) \dot{u}_n w(\mathbf{x}) dv
\end{aligned} \tag{9.23}$$

qui, une fois assemblé, mène au système linéaire suivant à chaque itération :

$$\begin{aligned}
& \left[ M(u^k) - \tilde{M}(u^k, u_n - u^k + \Delta t_{n+1}(1 - \theta)\dot{u}_n) + \theta \Delta t_{n+1} \left\{ A(u^k) - \tilde{F}(u^k) - \tilde{S}(u^k) + \tilde{A}(u^k) \right\} \right] \cdot \delta_U \\
& = M(u^k) \cdot (U_n - U^k + \Delta t_{n+1}(1 - \theta)\dot{U}_n) + \Delta t_{n+1} \theta \left\{ F(u^k) + S(u^k) - A(u^k) \cdot U^k \right\}
\end{aligned} \tag{9.24}$$

où les différentes matrices sont définies en page 197.

L'algorithme résultant est le même que pour la méthode des points fixes mais avec une matrice différente qui tient compte de la linéarisation par développement de Taylor. Cette matrice, appelée matrice tangente, assure une convergence quadratique. Le prix à payer est cependant assez élevé, à tout le moins dans le cas général. L'expression de la matrice tangente peut paraître très complexe et dans certains cas elle l'est vraiment ! Dans beaucoup de cas simples cependant, la méthode de Newton s'avère tout de même un choix très judicieux.

## 9.5 Résultats numériques

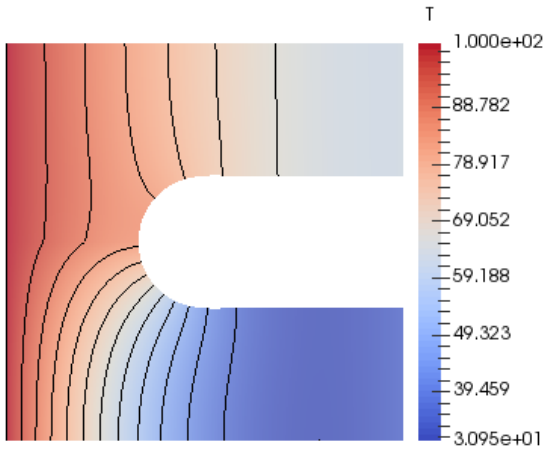
### 9.5.1 Problème thermique

Nous revenons sur un problème déjà rencontré dans le cas stationnaire au chapitre 6 (voir l'exemple 6.8) :

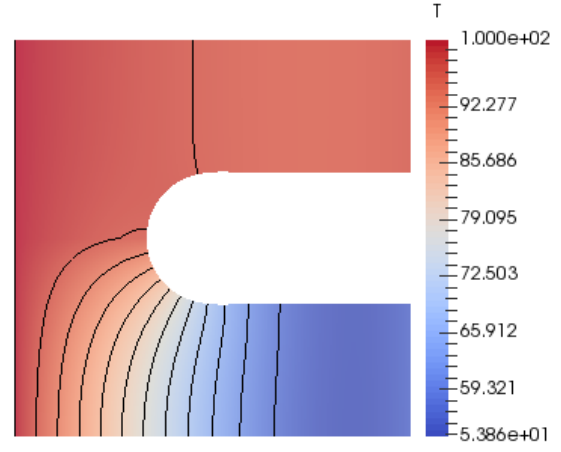
$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{x}) \nabla T) = 0$$

où  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  est le tenseur de conductivité thermique. Pour simplifier ce qui suit, on posera simplement que  $\rho = c_p = 1$ . Les conditions aux limites et les valeurs de la conductivité thermique sont celles de la figure 6.13 auxquelles on ajoute la condition initiale  $T(\mathbf{x}, 0) = 25^\circ\text{C}$ . On a utilisé un schéma de Gear implicite et un pas de temps adimensionnel  $\Delta t = 1$ .

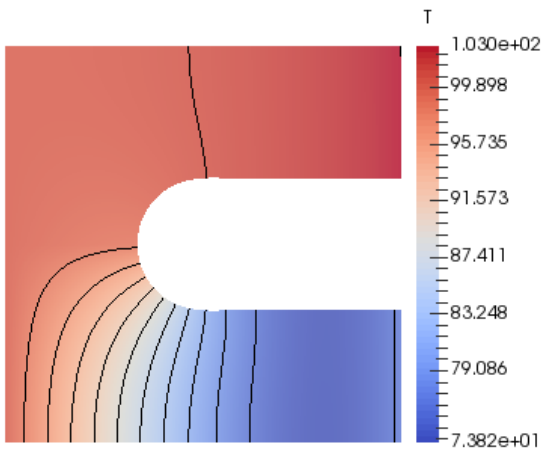
On peut voir à la figure 9.1 l'évolution de la température à partir de la condition initiale à  $25^\circ\text{C}$ . La condition aux limites de  $100^\circ\text{C}$  fait monter progressivement la température dans tout le domaine, mais nettement plus rapidement dans la moitié supérieure. On constate en effet qu'à



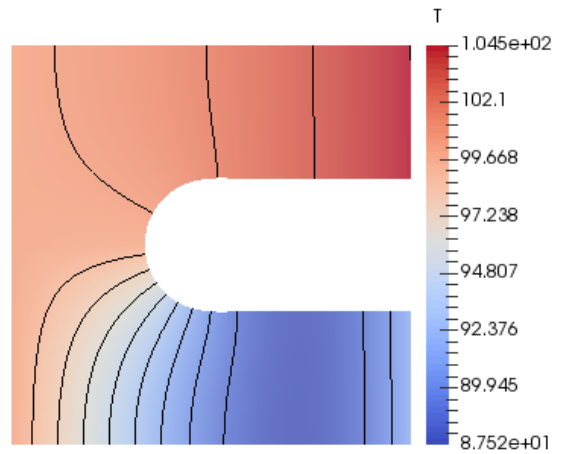
a)  $t = 10$



b)  $t = 30$



c)  $t = 50$



d)  $t = 70$

Figure 9.1 – Transfert thermique instationnaire

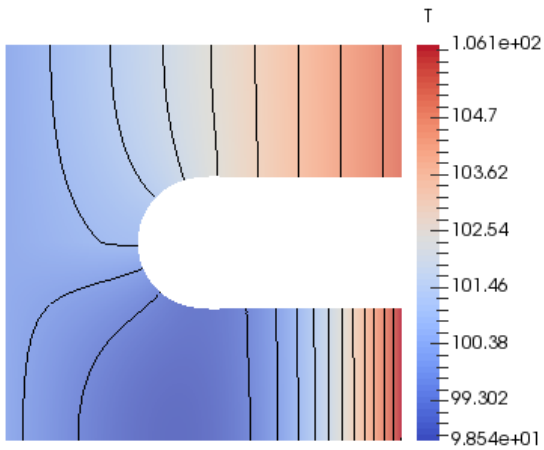
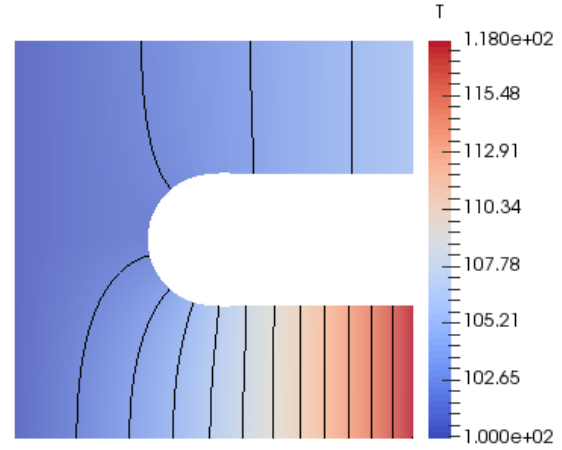
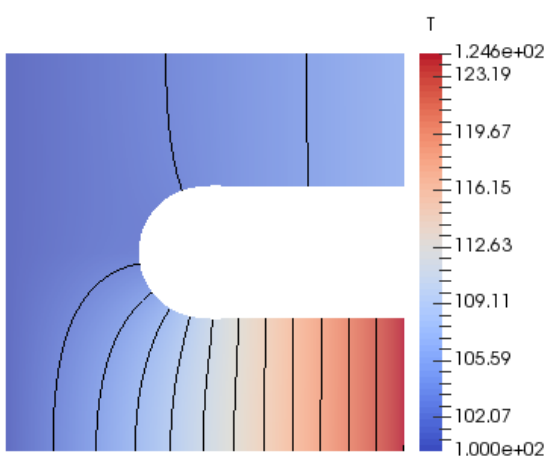
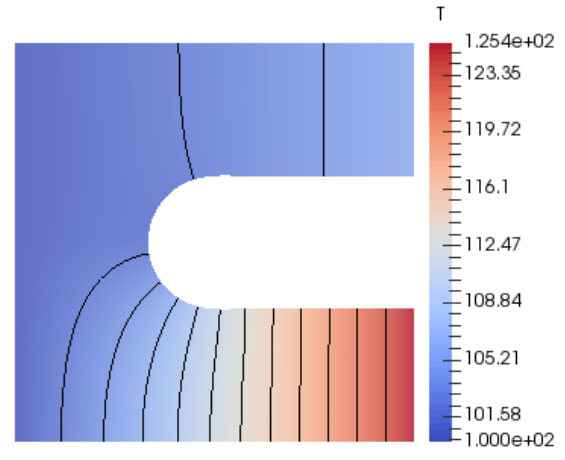
e)  $t = 100$ f)  $t = 150$ g)  $t = 250$ h)  $t = 300$ 

Figure 9.2 – Transfert thermique instationnaire (suite)

$t = 30$ , la température est d'environ  $80^\circ\text{C}$  dans la moitié supérieure. Par la suite ((Figure 9.2), la température se stabilise à un état stationnaire calculé précédemment (voir la figure 6.14).

### 9.5.2 Interactions prédateurs-proies

On s'intéressera ici à un modèle décrivant l'interaction entre des populations de zooplancton (de nature animale) et de phytoplancton (de nature végétale). Ce type de problème appartient à la vaste catégorie des interactions entre prédateurs et proies remontant aux travaux de pionniers tels Lotka [42] et Volterra [61]. Comme nous le verrons, l'interaction est très complexe et donne lieu à des comportements difficiles à prévoir sans une simulation très fine.

Le modèle a été introduit par Medvinsky, Petrovskii, Tikhonova, Malchow et Li en 2002 (voir [45]). C'est un exemple classique d'une équation ou plus précisément d'un système d'équations dites de réaction-diffusion. <sup>2</sup> En dimension 2, le système d'équations représentant l'évolution du plancton dans le temps et l'espace (avec des facteurs environnementaux stables et uniformes) est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla u) = u(1 - u) + \frac{u}{u + h}v \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla v) = k\frac{u}{u + h}v - mv \end{cases}$$

où  $u(\mathbf{x}, t)$  et  $v(\mathbf{x}, t)$  sont les fonctions représentant respectivement l'abondance du phytoplancton et l'abondance du zooplancton, selon le temps  $t$  et le vecteur position  $\mathbf{x}$ . Les constantes du modèle sont  $k = 2$ ,  $m = 0,6$  et  $h = 0,4$ . Les deux termes de droite (dits de réaction) sont non linéaires et sont d'une importance capitale pour la prédiction des interactions. Des conditions aux limites de type Neumann nulles sont prescrites au bord d'un domaine rectangulaire entre les sommets  $(0, 0)$  et  $(900, 300)$ .

La formulation quasi-variationnelle correspondante est donc, en notant  $w_u$  et  $w_v$  les fonctions tests respectives de  $u$  et  $v$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_t w_u dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_u dV = \int_{\Omega} w_u f_u(u, v) dV \\ \int_{\Omega} v_t w_v dV + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w_v dV = \int_{\Omega} w_v f_v(u, v) dV \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} f_u(u, v) = u(1 - u) - \frac{u}{u + h}v \\ f_v(u, v) = kv\frac{u}{u + h} - mv \end{cases} \tag{9.25}$$

On suppose connues les solutions aux deux pas de temps précédents soient  $(u_n, v_n) \simeq (u(x, t_n), v(x, t_n))$  et  $(u_{n-1}, v_{n-1}) \simeq (u(x, t_{n-1}), v(x, t_{n-1}))$ . On cherche maintenant la solution au pas de temps suivant

---

2. Nous n'avons pas encore vu comment traiter les systèmes d'équations mais cela n'empêche pas de comprendre la suite.

$(u_{n+1}, v_{n+1})$ . Il s'agit d'un problème non linéaire et on utilisera une méthode de Newton dont on notera  $(u_{n+1}^k, v_{n+1}^k)$  les itérations successives. Il faut donc fournir une approximation de départ de la solution et il semble assez naturel de prendre  $(u_{n+1}^0, v_{n+1}^0) = (u_n, v_n)$  qui est la solution au pas de temps précédent. En posant  $u_{n+1}^{k+1} = u_{n+1}^k + \delta_u$  et  $v_{n+1}^{k+1} = v_{n+1}^k + \delta_v$  pour linéariser le problème, l'équation à résoudre devient (par le schéma de Gear) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{3\delta_u w_u}{2\Delta t} dV + \int_{\Omega} \nabla \delta_u \cdot \nabla w_u dV - \int_{\Omega} w_u \left( \frac{\partial f_u}{\partial u} (u_{n+1}^k, v_{n+1}^k) \delta_u + \frac{\partial f_u}{\partial v} (u_{n+1}^k, v_{n+1}^k) \delta_v \right) dV \\ = - \left[ \int_{\Omega} \frac{3u_{n+1}^k - 4u_n + u_{n-1}}{2\Delta t} w_u dV + \int_{\Omega} \nabla u_{n+1}^k \cdot \nabla w_u dV - \int_{\Omega} w_u f_u (u_{n+1}^k, v_{n+1}^k) dV \right] \\ \int_{\Omega} \frac{3\delta_v w_v}{2\Delta t} dV + \int_{\Omega} \nabla \delta_v \cdot \nabla w_v dV - \int_{\Omega} w_v \left( \frac{\partial f_v}{\partial u} (u_{n+1}^k, v_{n+1}^k) \delta_u + \frac{\partial f_v}{\partial v} (u_{n+1}^k, v_{n+1}^k) \delta_v \right) dV \\ = - \left[ \int_{\Omega} \frac{3v_{n+1}^k - 4v_n + v_{n-1}}{2\Delta t} w_v dV + \int_{\Omega} \nabla v_{n+1}^k \cdot \nabla w_v dV - \int_{\Omega} w_v f_v (u_{n+1}^k, v_{n+1}^k) dV \right] \end{array} \right.$$

Un pas de temps  $\Delta t = 0,5$  a été utilisé. La solution initiale du système est une perturbation de l'état stationnaire :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, 0) &= u^* - \varepsilon_1 (x - y/10 - 225) (x - y/10 - 675) \\ v(\mathbf{x}, 0) &= v^* - \varepsilon_2 (x - 450) - \varepsilon_3 (y - 150) \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_1 = 2 \times 10^{-7}$ ,  $\varepsilon_2 = 3.0 \times 10^{-5}$  et  $\varepsilon_3 = 1,2 \times 10^{-4}$ . C'est la situation où tous les organismes sont concentrés en une bande verticale au centre du domaine. On note  $(u^*, v^*)$  le point d'équilibre où coexistent le phytoplancton et le zooplancton. Rappelons que l'état stationnaire est la solution obtenue en retirant les dérivées temporelles et en négligeant les deux termes de diffusion. On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} 0 &= u(1 - u) + \frac{u}{u + h}v \\ 0 &= k \frac{u}{u + h}v - mv \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} u^* &= \frac{rh}{1 - r} \\ v^* &= (1 - u^*) (h + u^*) \end{cases} \quad (9.26)$$

où  $r = \frac{m}{k}$ .

Les figures 9.3 et 9.4 illustrent l'évolution spatiotemporelle des deux concentrations. On y distingue une dynamique très complexe avec la présence de spirales qui sont observées dans la nature. On se référera encore à [45] pour une étude et une analyse beaucoup plus détaillées. Ce problème d'interactions prédateurs-proies est ce que l'on appelle un système dynamique dont l'étude fait l'objet de toute une littérature (voir par exemple Hirsch, Smale et Devaney [36]).



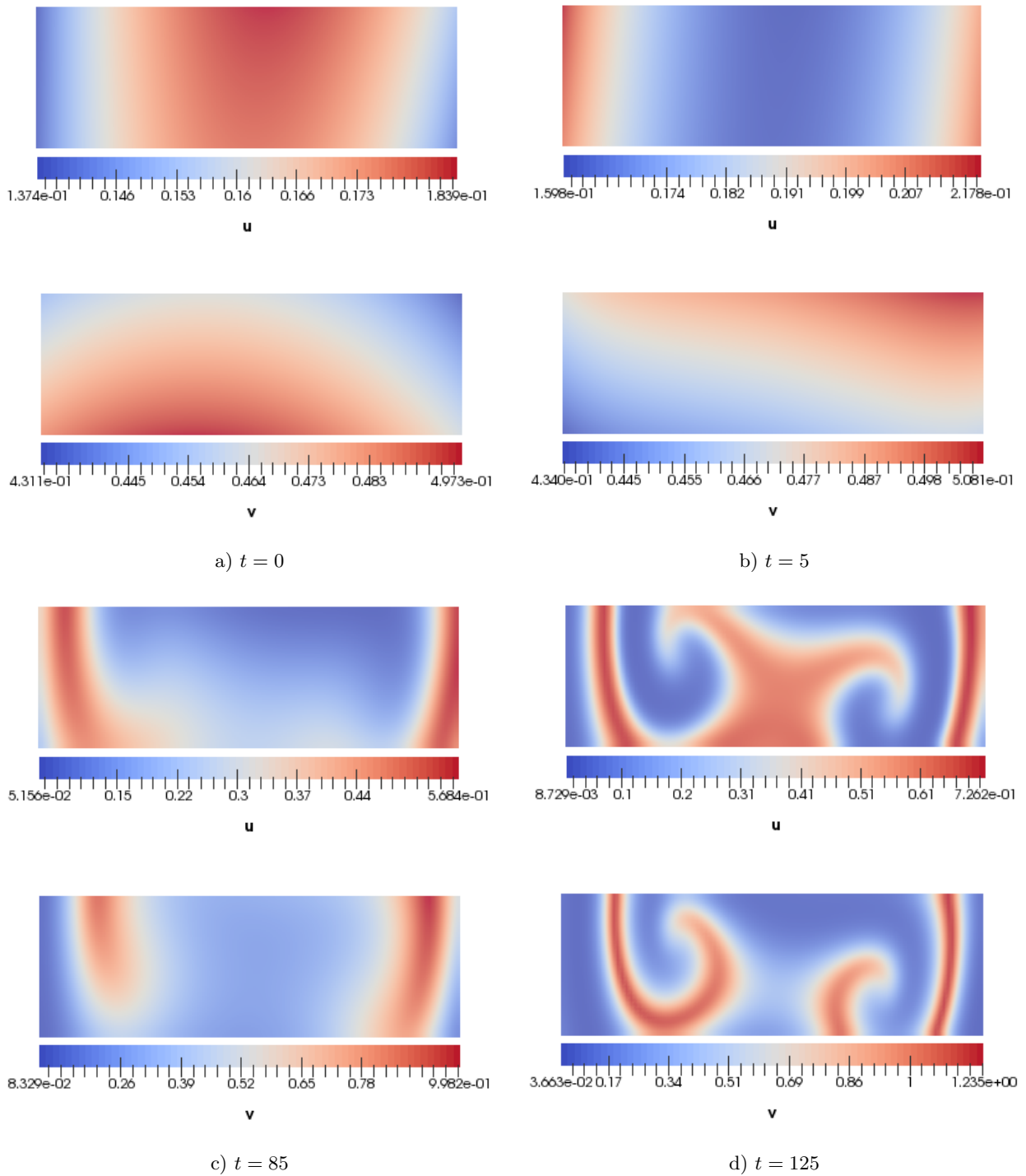


Figure 9.3 – Évolution des concentrations de phyto et de zooplancton

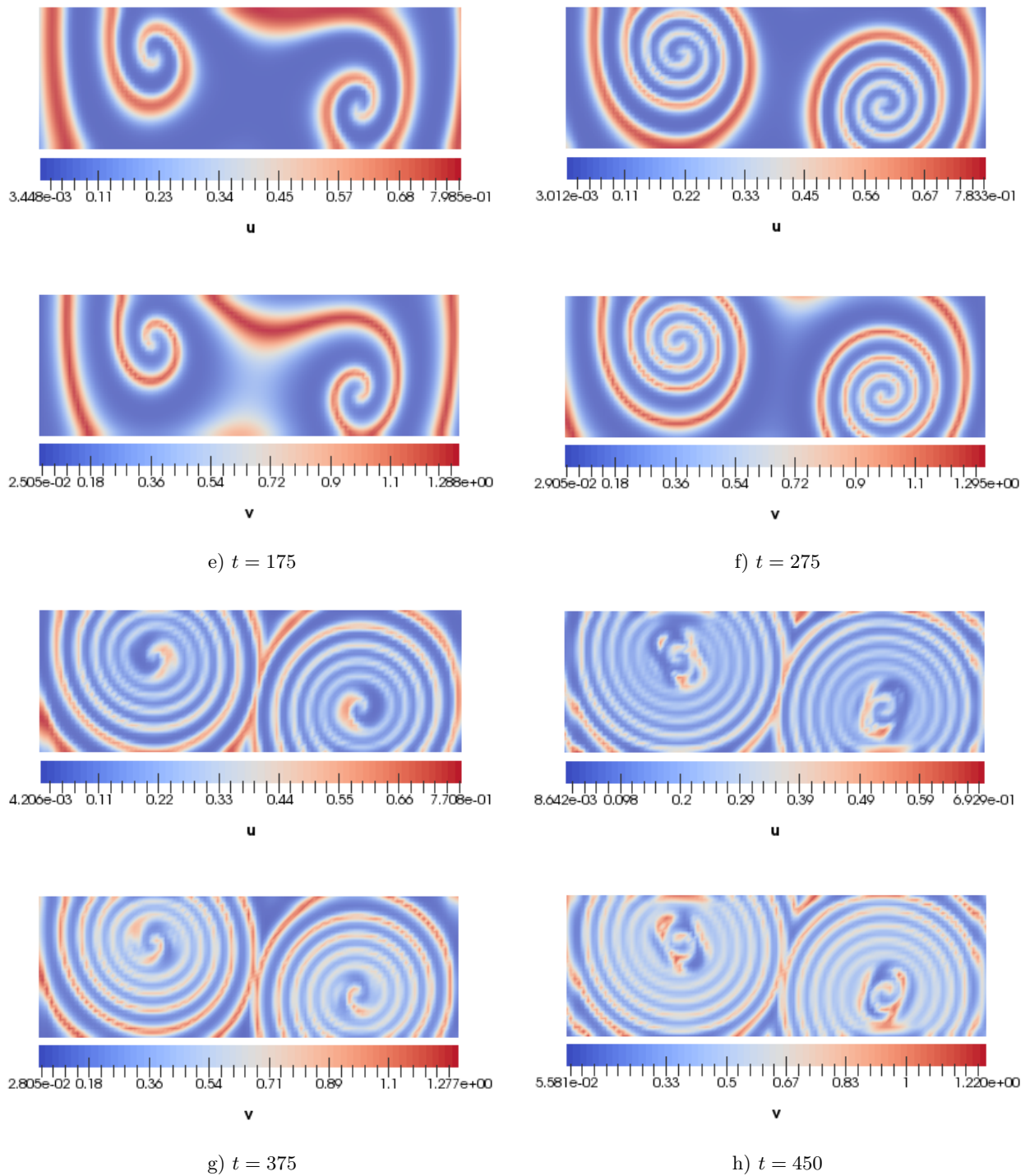


Figure 9.4 – Évolution des concentrations de phyto et de zooplancton (suite)

## 9.6 Dérivées temporelles d'ordre 2

La loi de Newton en est un exemple, présente dans nombre d'applications instationnaires requièrent des dérivées temporelles d'ordre 2. C'est le cas notamment en mécanique des solides où on fait apparaître un terme de la forme :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur déplacement.

Nous considérerons ici l'équation aux dérivées partielles suivantes qui, bien qu'elle ne soit pas la plus générale, est tout-à-fait suffisante pour expliquer le principe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{x}, t)\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + c(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + d(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t) + p(u) = r(\mathbf{x}, t) \\ u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_0 \\ q(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_1 \\ u(\mathbf{x}, t_0) = u_0(x) \\ \dot{u}(\mathbf{x}, t_0) = v_0(x) \end{array} \right. \quad (9.27)$$

Pour alléger la présentation, seul le terme  $p(u)$  est potentiellement non linéaire mais le cas plus général serait similaire. La semidiscretisation du problème est similaire à celle des dérivées temporelles d'ordre 1. En procédant comme à la section 9.2, on obtient une forme quasi-variationnelle :

$$\begin{aligned} \int_K (\rho(\mathbf{x}, t_n)\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)w(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}, t_n)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_n)w(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t_n)w(\mathbf{x}) + p(u)w(\mathbf{x})) dv \\ = \int_K r(\mathbf{x}, t_n) w(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} h(\mathbf{x}, t_n) w(\mathbf{x}) ds \end{aligned} \quad (9.28)$$

Sous forme matricielle, on a :

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + AU(t) + P(u) = F(t) + S(t) \quad (9.29)$$

où  $M$ ,  $C$ ,  $A$  sont des matrices pouvant dépendre du temps et de la solution (cas non linéaire). On aura reconnu un système classique de type masse ( $M$ ), ressort ( $A$ ) et amortisseur ( $C$ ). La fonction  $P$  est une fonction non linéaire quelconque. Les vecteurs  $F$  et  $S$  contiennent les contributions du second membre et des conditions naturelles. Dans ce qui suit, on notera  $U(t_n)$ ,  $V(t_n) = \dot{U}(t_n)$  et  $\ddot{U}(t)$  les solutions exactes alors que  $U_n$ ,  $V_n$  et  $\ddot{U}_n$  désigneront leurs approximation numériques correspondantes. Pour compléter le problème on ajoute des conditions initiales sur  $U$  et sa dérivée  $\dot{U}$  que nous noterons  $U_0$  et  $\dot{U}_0$  respectivement.

La discrétisation temporelle la plus utilisée dans ce cas est le schéma de Newmark que nous allons maintenant décrire. Il s'agit d'un schéma à deux paramètres basé sur les expressions :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}_n + \beta \ddot{U}_{n+1} \right) \\ \dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \ddot{U}_n + \gamma \ddot{U}_{n+1} \right) \end{cases} \quad (9.30)$$

### 9.6.1 Convergence

Pour étudier la convergence, on considère le cas linéaire ( $P = 0$ ) du système 9.29. On pose ensuite  $V = \dot{U}$  de sorte que l'on puisse écrire passer d'une équation d'ordre 2 à un système de deux équations d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{U} &= V \\ \dot{V} &= M^{-1}(F + S - CV - AU) \end{cases}$$

Le schéma de Newmark s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + \Delta t V_n + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}_n + \beta \ddot{U}_{n+1} \right) \\ V_{n+1} &= V_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \ddot{U}_n + \gamma \ddot{U}_{n+1} \right) \end{aligned}$$

où bien entendu :

$$M\ddot{U}_{n+1} + C\dot{U}_{n+1} + AU_{n+1} = F_{n+1} + S_{n+1}$$

L'erreur de troncature locale est donc :

$$\tau_n(\Delta t) = \begin{cases} \frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\Delta t} - \dot{U}(t_n) - \Delta t \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}(t_n) + \beta \ddot{U}(t_{n+1}) \right) \\ \frac{V(t_{n+1}) - V(t_n)}{\Delta t} - \left( (1 - \gamma) \ddot{U}(t_n) + \gamma \ddot{U}(t_{n+1}) \right) \end{cases}$$

En utilisant les développements de Taylor appropriés, on montre facilement que :

$$\tau_n(\Delta t) = \begin{cases} \ddot{V}(t_n)(\Delta t)^2 \left( \frac{1}{6} + \beta \right) + O(\Delta t)^3 \\ \ddot{V}(t_n)\Delta t \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) + O(\Delta t)^2 \end{cases}$$

et on ne peut atteindre l'ordre 2 que pour  $\gamma = 1/2$ .

### 9.6.2 Stabilité

Pour l'analyse de stabilité, on peut revenir à un cas encore plus simple soit le cas homogène ( $F = S = 0$ ). Puisque la solution du problème général contient la solution du problème homogène et une solution particulière du problème non homogène, toute oscillation dans la solution du problème homogène est indésirable.

On supposera, comme nous l'avons fait à la section 9.1.2, que les matrices  $M$  et  $A$  sont encore définies positives. On pourra encore décomposer la matrice la matrice  $M^{-1}A$  sous la forme

$$M^{-1}A = Q^T \Lambda Q$$

où  $Q$  est une matrice orthogonale et  $\Lambda$  une matrice diagonale contenant les valeurs propres  $\lambda_i$ . Une hypothèse de plus est nécessaire pour la matrice d'amortissement  $C$ . On supposera en effet (voir par exemple Bathe [5] et Hughes [40]) que l'on peut écrire :

$$M^{-1}C = Q^T \Lambda_2 Q$$

où  $\Lambda_2$  est aussi une matrice diagonale dont le  $i$ ème terme est  $2\xi_i\sqrt{\lambda_i}$ . Cette hypothèse traduit le fait que l'on suppose l'amortissement de chaque ressort proportionnel à la fréquence de vibration  $\sqrt{\lambda_i}$ . En fait, on peut supposer que la matrice  $C$  est de la forme :

$$C = aM + bA$$

qui est appelée amortissement de Rayleigh [40]. On montre alors facilement que :

$$\Lambda_2 = aI + b\Lambda$$

et donc pour chaque ligne on a :

$$2\xi_i\sqrt{\lambda_i} = a + b\lambda_i$$

et le facteur d'amortissement est donc :

$$\xi_i = \frac{\frac{a}{\sqrt{\lambda_i}} + b\sqrt{\lambda_i}}{2}$$

On notera que si l'on veut négliger l'amortissement dans ce qui suit, il suffira de poser  $\xi_i = 0$ .

On peut maintenant décomposer le système 9.29 suivant chacun de ses modes et on a :

$$\ddot{U} + M^{-1}C\dot{U} + M^{-1}AU = 0$$

et on pose encore  $Y = Q^T U$  de sorte que  $U = QY$ ,  $\dot{U} = Q\dot{Y}$  et  $\ddot{U} = Q\ddot{Y}$ . En multipliant à gauche par  $Q^T$ , on trouve :

$$\ddot{Y} + \Lambda_2\dot{Y} + \Lambda Y = 0$$

et encore ici un système d'équations totalement découplées. On notera  $y^i$  la  $i$ ème composante du vecteur  $Y$  correspondant et en posant  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ , on obtient le système :

$$\ddot{y}^i + 2\xi_i\omega_i\dot{y}^i + \omega_i^2 y^i = 0$$

En laissant tomber les indices supérieurs  $i$ , le schéma de Newmark au temps  $t_{n+1}$  s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t v_n + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{y}_n + \beta \ddot{y}_{n+1} \right) \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \ddot{y}_n + \gamma \ddot{y}_{n+1} \right) \\ \ddot{y}_{n+1} + 2\xi\omega v_{n+1} + \omega^2 y_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

La dernière équation évaluée aux temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  permet d'éliminer  $\ddot{y}_n$  et  $\ddot{y}_{n+1}$  des seconds membres des deux premières et on a ainsi :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t v_n + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (-2\xi\omega v_n - \omega^2 y_n) + \beta (-2\xi\omega v_{n+1} - \omega^2 y_{n+1}) \right) \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) (-2\xi\omega v_n - \omega^2 y_n) + \gamma (-2\xi\omega v_{n+1} - \omega^2 y_{n+1}) \right) \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 + (\Delta t)^2 \beta \omega^2 & 2(\Delta t)^2 \beta \xi \omega \\ \Delta t \gamma \omega^2 & 1 + 2\Delta t \gamma \xi \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (\Delta t)^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \omega^2 & \Delta t (1 - 2\Delta t \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \xi \omega) \\ -\Delta t (1 - \gamma) \omega^2 & 1 - 2\Delta t (1 - \gamma) \xi \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (\Delta t)^2 \beta \omega^2 & 2(\Delta t)^2 \beta \xi \omega \\ \Delta t \gamma \omega^2 & 1 + 2\Delta t \gamma \xi \omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - (\Delta t)^2 (\frac{1}{2} - \beta) \omega^2 & \Delta t (1 - 2\Delta t (\frac{1}{2} - \beta) \xi \omega) \\ -\Delta t (1 - \gamma) \omega^2 & 1 - 2\Delta t (1 - \gamma) \xi \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

ou de manière plus compacte :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \mathcal{B} \begin{bmatrix} y_n \\ v_n \end{bmatrix} \text{ qui devient } \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \mathcal{B}^{n+1} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

La possibilité qu'une croissance indue de l'une ou l'autre des deux variables dépendra donc des valeurs propres de la matrice de droite. Il faut en effet que la matrice  $\mathcal{B}$  soit convergente (voir [25]) et donc que ses valeurs propres soient plus petites ou égales à 1 en module. Le polynôme caractéristique associé s'écrit :

$$\lambda^2 - 2B_1\lambda + B_2 = 0$$

où  $B_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{22})$  est la demi-trace de  $B$  et  $B_2 = \mathcal{B}_{11}\mathcal{B}_{22} - \mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{21}$  est son déterminant. On souhaite que les solutions de l'équation caractéristique (les valeurs propres) soient à l'intérieur du disque unité c.-à-d.

$$\rho(\mathcal{B}) \leq 1$$

Il est assez difficile de déterminer si les valeurs propres vérifient ce critère. On peut y arriver par un changement de variable. On pose :

$$\lambda = \frac{1+z}{1-z} \text{ ou } z = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

qui envoie  $\lambda$  situé dans le disque unité en  $z$  dans le demi-plan à droite du plan complexe. Notons que le cercle unité est envoyé sur l'axe imaginaire. Le polynôme caractéristique devient :

$$z^2(1 + 2B_1 + B_2) + (2 - 2B_2)z + (1 - 2B_1 + B_2) = c_0z^2 + c_1z + c_0 = 0$$

et on doit maintenant s'assurer que les valeurs propres sont à partie réelle négative ou nulle. Il suffit maintenant de se rappeler du critère de Routh-Hurwitz (voir Zienkiewicz et Taylor [65]) qui dit que ce sera le cas si et seulement si tous les  $c_i$  sont positifs ou nuls.

À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique (Maple par exemple), on trouve que :

$$\begin{aligned} c_0 &= 2 \left( \frac{(2 + 4\xi(\gamma - \frac{1}{2}))\Omega + (2\beta - \gamma)\Omega^2}{1 + 2\gamma\xi\Omega + \beta\Omega^2} \right) \\ c_1 &= \frac{\Omega(2\Omega(\gamma - \frac{1}{2}) + 4\xi)}{1 + 2\gamma\xi\Omega + \beta\Omega^2} \\ c_2 &= \frac{\Omega^2}{1 + 2\gamma\xi\Omega + \beta\Omega^2} \end{aligned}$$

où on a posé  $\Omega = \omega\Delta t > 0$ . Ces expressions nous permettent de facilement distinguer deux cas très importants :

**Cas #1** :  $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$ .

On rappelle que tous les paramètres  $\Delta t, \omega, \beta, \gamma$  et  $\xi$  sont des quantités positives ou nulles. On constate alors que le dénominateur des expressions pour les  $c_i$  est strictement positif et que  $c_2 > 0$ . Sous ces hypothèses, on constate aisément que  $c_1 \geq 0$  et  $c_2 > 0$  et on a stabilité inconditionnelle en ce sens qu'il n'y a aucune contrainte sur le pas de temps. Ainsi, on choisira très souvent  $\beta = 0,25$  et  $\gamma = 0,5$ .

**Cas #2** :  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  et  $\beta < \frac{\gamma}{2}$ .

On a encore ici  $c_2 > 0$  et  $c_1 \geq 0$ . Pour avoir  $c_0 > 0$ , il faut que le polynôme de degré 2 en  $\Omega$  au numérateur soit supérieur ou égal à 0. Puisque par hypothèse, le coefficient dominant  $2\beta - \gamma$  est négatif, le polynôme sera positif pour les valeurs de  $\Omega$  comprises entre ses racines qui sont :

$$r_1 = \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) - \sqrt{\xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2} - \beta)}}{(\frac{\gamma}{2} - \beta)} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2} - \beta)}}{(\frac{\gamma}{2} - \beta)}$$

soit

$$r_1 \leq \Omega = \omega\Delta t \leq r_2$$

Puisque  $r_1 < 0$ , la première inéquation ne sert à rien et on limitera le pas de temps pour vérifier :

$$\omega\Delta t \leq \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2} - \beta)}}{(\frac{\gamma}{2} - \beta)}$$

On parle alors de schémas conditionnellement stables. Un choix fréquent est  $\beta = 0$  et  $\gamma = 0,5$ . Rappelons que  $\omega$  correspond aux racines carrées des valeurs propres de la matrice  $M^{-1}A$  et donc que le critère le plus serré sera :

$$\sqrt{\lambda_{max}}\Delta t \leq \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2} - \beta)}}{(\frac{\gamma}{2} - \beta)} \tag{9.31}$$

Notons qu'en absence d'amortissement, la condition devient :

$$\sqrt{\lambda_{max}}\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \tag{9.32}$$

### 9.6.3 Application du schéma de Newmark

$$M\ddot{U}_{n+1} + C\dot{U}_{n+1} + AU_{n+1} + P(U_{n+1}) = F_{n+1} + S_{n+1} \tag{9.33}$$

De la première équation 9.30, on tire immédiatement que :

$$\ddot{U}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(U_{n+1} - U_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{U}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{U}_n \tag{9.34}$$

On commence par remplacer dans 9.33 l'expression de  $\dot{U}_{n+1}$  obtenue de la deuxième équation de 9.30 et en regroupant on a :

$$(M + \Delta t \gamma C) \ddot{U}_{n+1} + AU_{n+1} + P(U_{n+1}) = F_{n+1} + S_{n+1} - C (\dot{U}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{U}_n)$$

Il suffit alors d'utiliser 9.34 dans la dernière expression pour obtenir le schéma :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} (M + \Delta t \gamma C) + A \right) U_{n+1} + P(U_{n+1}) &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (M + \Delta t \gamma C) (U_n + \Delta t \dot{U}_n) \\ &+ \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) (M + \Delta t \gamma C) \ddot{U}_n \\ &- \Delta t (1 - \gamma) C \ddot{U}_n - C \dot{U}_n + F_{n+1} + S_{n+1} \end{aligned}$$

Dans le cas non linéaire, il faut bien sûr linéariser le problème. Dans notre exemple, seul le terme  $P(U_{n+1})$  est supposé non linéaire et nous lui appliquerons une simple méthode de Newton, bien que l'on puisse aussi utiliser une méthode de points fixes. Soit  $U^*$  une approximation de  $U_{n+1}$ . À la première itération de la méthode de Newton, on prendra  $U^* = U_n$ . On cherche ensuite une correction  $\delta_u$  de sorte que  $U^* + \delta_u$  soit une meilleure approximation. En remplaçant, on trouve le système :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} (M + \Delta t \gamma C) + A + \frac{\partial P}{\partial u}(U^*) \right) \delta_u &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (M + \Delta t \gamma C) (U_n - U^* + \Delta t \dot{U}_n) \\ &- AU^* - P(U^*) + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) (M + \Delta t \gamma C) \ddot{U}_n \\ &- \Delta t (1 - \gamma) C \ddot{U}_n - C \dot{U}_n + F_{n+1} + S_{n+1} \end{aligned} \quad (9.35)$$

On itère ainsi jusqu'à ce que la norme de la correction  $\delta_u$  soit inférieure à une valeur préétablie. L'algorithme complet est le suivant :

- $U_0$  et  $\dot{U}_0$  étant donnés par les conditions initiales ;
- On calcule  $\ddot{U}_0$  en résolvant  $M\ddot{U}_0 = F_0 + S_0 - C\dot{U}_0 - AU_0 - P(U_0)$  ;
- Pour  $n \geq 1$ ,
  - On résout le système (non linéaire) 9.35 pour obtenir  $U_{n+1}$  ;
  - On utilise la relation 9.34 pour obtenir  $\ddot{U}_{n+1}$  ;
  - On utilise la deuxième équation de 9.30 pour obtenir  $\dot{U}_{n+1}$  ;

**Exemple 9.3.** On va considérer un exemple très simple qui n'utilise pas la méthode des éléments finis mais illustre quand même le schéma de Newmark. En s'inspirant de Xie [62], on considère d'abord le problème :

$$\ddot{u} + 100u + 1000u^3 = 0$$

avec les conditions initiales  $u_0 = 1,5$  et  $\dot{u}_0 = 0$ . Cette équation différentielle peut être comparée à un système classique de masse et ressort sans amortissement :

$$\ddot{u} + k(u)u = 0$$



où le coefficient de raideur du ressort varie avec le déplacement  $u$  ( $k(u) = 100 + 1000u^2$ ). Puisque  $k(u)$  est croissante, il y a donc augmentation de la raideur du ressort («stiffening spring») avec  $u$ . Dans ce cas très simple, les matrices sont des scalaires (des matrices 1 par 1) et on a  $M = 1$ ,  $C = 0$ ,  $A = 100$  et  $P(u) = 1000u^3$  de sorte que  $\frac{\partial P}{\partial u} = 3000u^2$ . Cette équation différentielle est un exemple de système conservatif. En effet, en multipliant par  $\dot{u}$  et en intégrant de chaque côté, on obtient :

$$E = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + 50u^2 + 250u^4$$

où  $E$  est une constante.

Tel que proposé dans [62], on pose  $T = 0,15$ ,  $\Delta t = T/20$  et on simule sur un temps de  $100T$  c.-à-d. 2000 pas de temps. Le schéma de Newmark avec  $\beta = 0,25$ ,  $\gamma = 0,5$  a donné les résultats de la Figure 9.5. La solution de ce problème est périodique et le plan de phase est une courbe fermée. On note une légère perte de précision qui se traduit par un épaississement de la courbe au fil du temps. Le comportement est similaire lorsque l'on prend  $\beta = 0$  et  $\gamma = 0,5$ . Par contre, pour  $\beta = 0,3025$ ,  $\gamma = 0,6$ , on note un amortissement numérique très important et une perte de précision très conséquente. C'est exactement comme si l'équation différentielle contenait un terme d'amortissement en  $c\dot{u}$ , ce qui n'est pas le cas. On parle donc d'amortissement numérique.

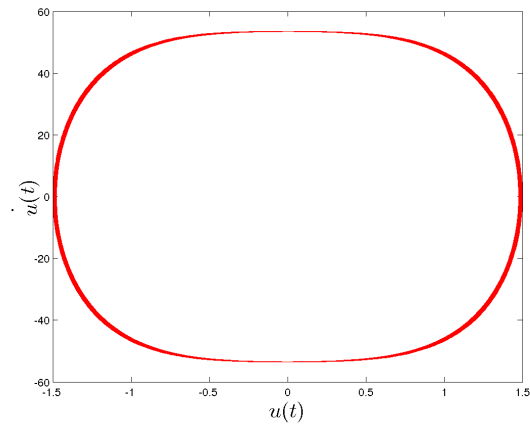
Dans le deuxième exemple, on considère l'équation différentielle :

$$\ddot{u} + 100 \tanh u = 0$$

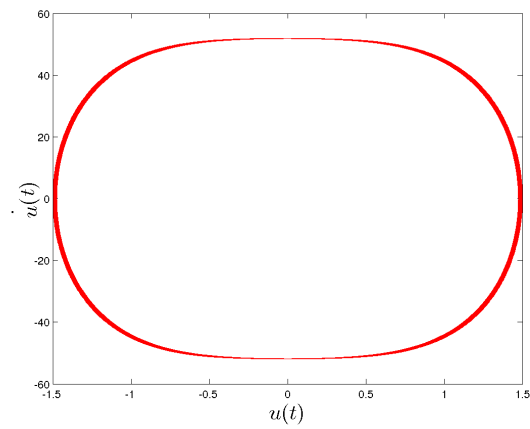
sous les conditions initiales  $u(0) = 4$  et  $\dot{u}(0) = 0$ . En faisant encore l'analogie avec un système masse-ressort, on a cette fois :

$$k(u) = \frac{100 \tanh(u)}{u}$$

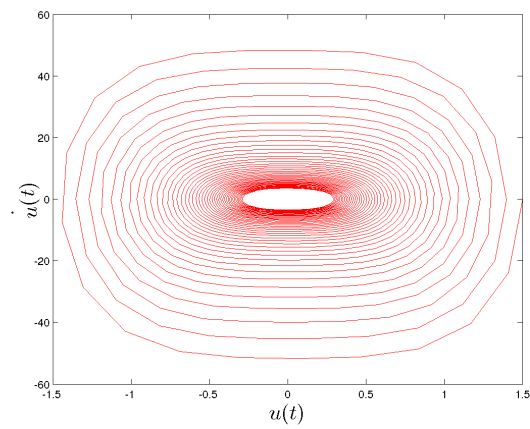
qui vaut 100 en  $u = 0$  et qui est une fonction décroissante. Le coefficient de raideur du ressort diminue donc avec le déplacement («softening spring»). On aura ainsi couvert les différents cas d'espèce. En utilisant le même pas de temps que pour l'exemple précédent, on trouve un comportement similaire du schéma de Newmark comme l'illustre la figure 9.6. ♦



$$\beta = 0,25, \gamma = 0,5$$

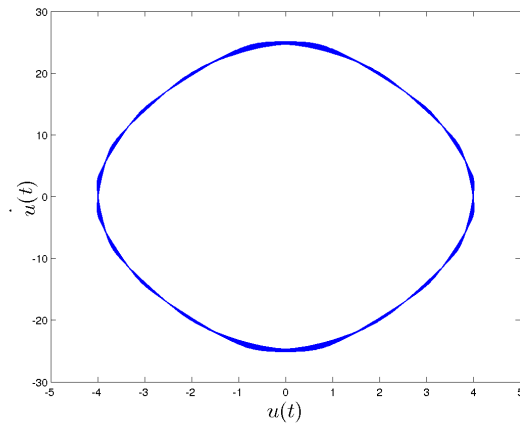


$$\beta = 0, \gamma = 0,5$$

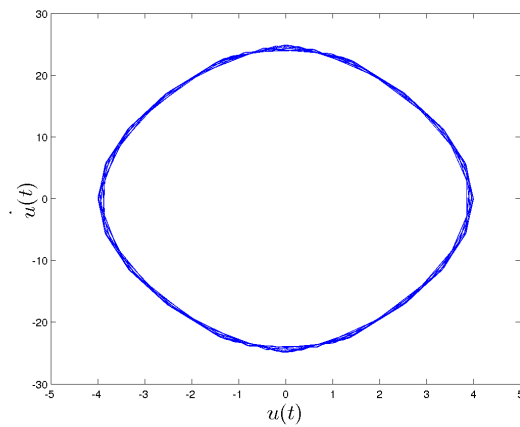


$$\beta = 0,3025, \gamma = 0,6$$

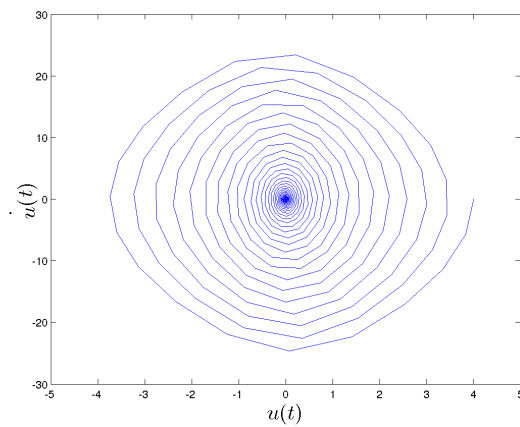
Figure 9.5 – Plan de phase



$\beta = 0,25, \gamma = 0,5$



$\beta = 0, \gamma = 0,5$



$\beta = 0,3025, \gamma = 0,6$

Figure 9.6 – Plan de phase

## 9.7 Exercices

1. Démontrer la relation 9.4.
2. Montrer que pour le schéma d'Euler explicite, la zone de stabilité absolue est le cercle du plan complexe de centre 1 et de rayon 1.
3. En partant de l'équation 9.4 dans le cas où  $\lambda$  est réel et positif, montrer que le schéma de Crank-Nicholson peut rendre la suite  $U_n$  décroissante mais non monotone.

**Suggestion** : Dans le cas réel, montrer que la condition de stabilité absolue devient :

$$-1 < \frac{2 - \lambda\Delta t}{2 + \lambda\Delta t} < 1$$

et considérer ce qui se passe lorsque :

$$-1 < \frac{2 - \lambda\Delta t}{2 + \lambda\Delta t} < 0$$

et montrer qu'il y aura des oscillations si :

$$\Delta t > \frac{2}{\lambda}$$

4. Démontrer la condition de stabilité générale du theta-schéma 9.6.

## Chapitre 10

# Problèmes de convection-diffusion et stabilisation SUPG

### 10.1 Introduction

La méthode de Galerkin que nous avons largement utilisée jusqu'à maintenant n'est pas sans faille comme nous allons le constater avec l'équation dite de convection diffusion. Pour combler cette lacune, nous allons introduire la méthode de Petrov-Galerkin qui, comme nous l'avons brièvement vu au chapitre 4, consiste à utiliser des fonctions de pondération différentes des fonctions d'interpolation. Plus précisément, nous allons introduire la méthode dite «Streamline Upwing Petrov Galerkin» (SUPG). Cette méthode est nécessaire pour combler les déficiences de maillages mal adaptés à des solutions présentant des variations très brusques, notamment près de parois solides (en présence de couches limites par exemple).

L'équation de conservation de l'énergie, en présence de convection, s'écrit (voir Duvaut [22]) :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T(\mathbf{x}) \nabla T) = 0 \quad (10.1)$$

où  $\rho$ ,  $c_p$  et  $\mathbf{K}_T$  sont respectivement la densité, la chaleur spécifique et le tenseur de conductivité thermique du matériau (tous supposés constants mais ce n'est nullement obligatoire) alors que  $\mathbf{u}$  est un vecteur vitesse qui transporte la chaleur. En pratique, le champ  $\mathbf{u}$  est aussi une inconnue du problème et sera, par exemple, obtenu en résolvant les équations de Navier-Stokes (voir le chapitre 12). Pour le moment, nous supposons que  $\mathbf{u}$  est un champ de vecteurs connu. Les applications de cette équation sont nombreuses et variées : problèmes de refroidissement de pièces mécaniques ou électroniques, échauffement du bord d'attaque d'une aile d'avion, etc.

La formulation variationnelle de type Galerkin s'écrit :

$$\int_{\Omega} \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} w + (\mathbf{u} \cdot \nabla T) w \right) + (\mathbf{K}_T(\mathbf{x}) \nabla T) \cdot \nabla w \, dv = 0$$

Cette formulation est bien connue pour pour poser des difficultés numériques lorsque la convection est importante par rapport à la conduction c.-à-d. lorsque  $\|\mathbf{u}\|$  est grand par rapport aux  $K_{T_{ij}}$  du

tenseur de conductivité thermique. Plus précisément, on pose :

$$Pe = \frac{\rho c_p U L}{K}$$

où  $U$ ,  $L$  et  $K$  sont respectivement une vitesse, une longueur et un coefficient de conductivité thermique caractéristiques du problème. Typiquement, on aura  $\mathbf{K}_T(\mathbf{x}) = K\mathbf{I}$  pour un matériau isotrope.  $Pe$  est un nombre adimensionnel appelé nombre de Péclet.<sup>1</sup> Il représente le rapport entre les transferts de chaleur par convection et par diffusion. Plus le nombre de Péclet est grand, plus la convection est dominante et, comme nous le constateront, plus la résolution de l'équation de conservation de l'énergie 10.1 est délicate à résoudre. C'est ce que nous allons maintenant illustrer dans un cas unidimensionnel et stationnaire (on retire la dérivée en temps et on divise par  $\rho c_p$  que l'on suppose constant) qui résulte en l'équation toute simple :

$$-\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + u \frac{dT}{dx} = 0 \text{ pour } x \in [0, 1] \quad (10.2)$$

où  $k$  désigne maintenant la diffusivité thermique ( $k = K/\rho c_p$ ) est maintenant un scalaire positif et  $u$  une constante que nous supposons également positive. On considère le domaine  $[0, 1]$  et des conditions aux limites  $T(0) = 0$  et  $T(1) = 1$  de sorte que l'on vérifie facilement que la solution exacte est :

$$T(x) = \frac{1 - e^{ux/k}}{1 - e^{u/k}}$$

Le nombre de Peclet se réduit alors à  $Pe = uL/k = u/k$  en fixant la longueur caractéristique du problème à la taille du domaine.

## 10.2 Résolution par différences finies

Nous allons faire une brève incursion en différences finies et considérer un maillage uniforme, chaque élément étant de longueur  $h$ . Dans un premier temps, on utilise les différences centrées d'ordre 2 ( $O(h^2)$ ) et un maillage comme celui de la figure 10.1 :

$$\frac{d^2T}{dx^2}(x_i) = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \text{ ainsi que } \frac{dT}{dx}(x_i) = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

de sorte qu'au noeud  $x_i$ , on obtient la récurrence :

$$-\left(\frac{k}{h} + \frac{u}{2}\right) T_{i-1} + \left(\frac{2k}{h}\right) T_i + \left(-\frac{k}{h} + \frac{u}{2}\right) T_{i+1} = 0 \quad (10.3)$$

dont les inconnues  $T_i$  sont les valeurs de la température aux noeuds.

Il s'agit d'un système tridiagonal qui peut être résolu très facilement. Les résultats sont illustrés à la figure 10.2. À bas nombre de Peclet, tout va bien et les résultats numériques sont acceptables.

1. Jean Claude Eugène Péclet était un physicien français, né le 10 février 1793 à Besançon, mort à Paris le 6 décembre 1857.

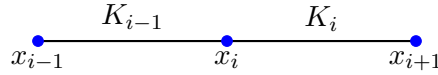


Figure 10.1 – Maillage de deux éléments

Par contre, on remarque rapidement que la situation se détériore au fur et à mesure que le nombre de Peclet augmente. Plus celui-ci est grand, plus la convection est dominante ( $u$  devient dominant par rapport à  $k$ ) et plus les résultats présentent des oscillations. Le cas extrême est celui du transport convectif pur où  $k = 0$ . Physiquement, cela signifie que l'information est transportée sans diffusion par le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ .

Par exemple, la fumée d'une cheminée suit le vent et il en est de même pour la chaleur qui est convectée par le champ de vitesse c.-à-d. si  $u > 0$ , la chaleur vient de la gauche et inversement si  $u < 0$ .

Devant ces résultats, les spécialistes des différences finies ont eu l'idée d'utiliser une différence arrière pour le terme convectif si  $u > 0$  (avant dans le cas contraire) :

$$\frac{dT}{dx}(x_i) = \frac{T_i - T_{i-1}}{h} + O(h)$$

pour tenir compte du fait que l'information vient principalement de l'amont si  $u$  est grand. On parle alors de différentiation amont («upwinding» en anglais). On obtient la récurrence :

$$-\left(\frac{k}{h} + u\right) T_{i-1} + \left(\frac{2k}{h} + u\right) T_i - \left(\frac{k}{h}\right) T_{i+1} = 0 \tag{10.4}$$

La différence arrière est cependant d'ordre 1 ( $O(h)$ ) seulement et il y donc une perte de précision. On obtient alors les résultats de la figure 10.3. Si les oscillations sont disparues à  $Pe = 100$ , on note tout de même une précision assez faible qui résulte de la perte d'un ordre de précision.

Pour expliquer, au moins partiellement ce qui se passe, on remarque que l'équation 10.4 peut aussi s'écrire, en réarrangeant les termes

$$-\left(k + \frac{uh}{2}\right) \left(\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2}\right) + u \left(\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h}\right) = 0 \tag{10.5}$$

et l'on constate que le schéma numérique tend à ajouter (artificiellement) un terme de diffusion supplémentaire par rapport à l'équation initiale. On parle alors de diffusion artificielle.

### 10.3 Résolution par éléments finis (cas unidimensionnel)

Dans cette section, nous montrerons comment obtenir des résultats similaires à ceux obtenus par différences finies mais cette fois, en passant par la méthode des éléments finis.

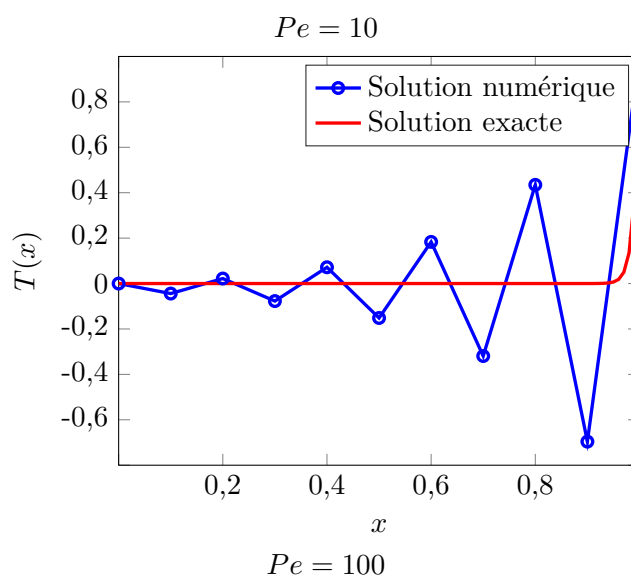
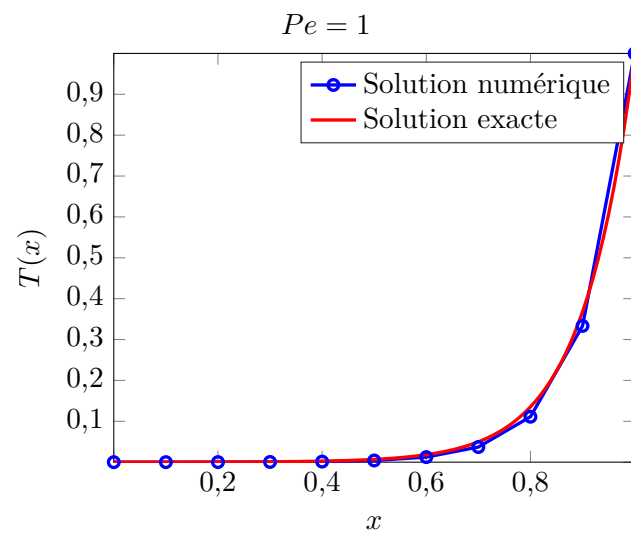
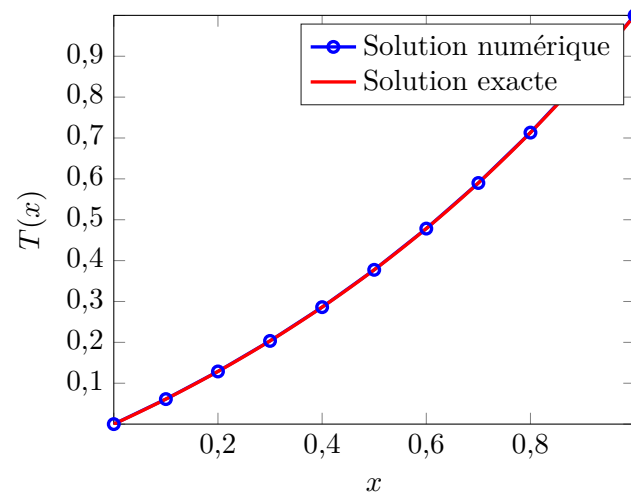
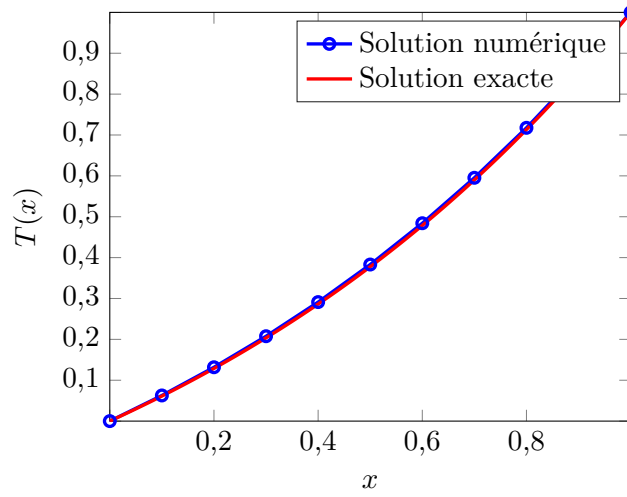
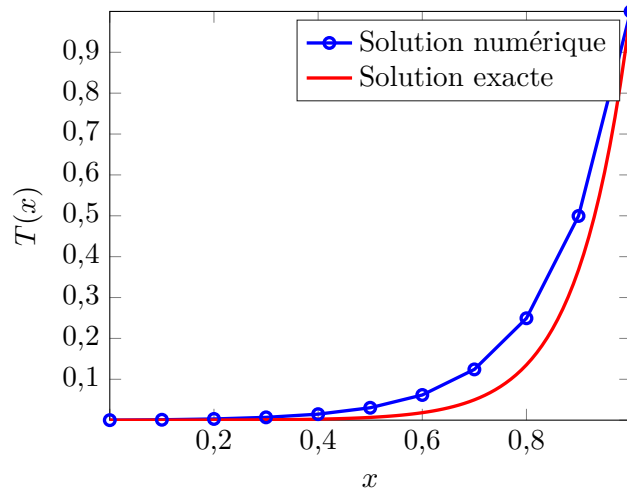


Figure 10.2 – Équation de convection-diffusion : différences centrées et éléments finis linéaires

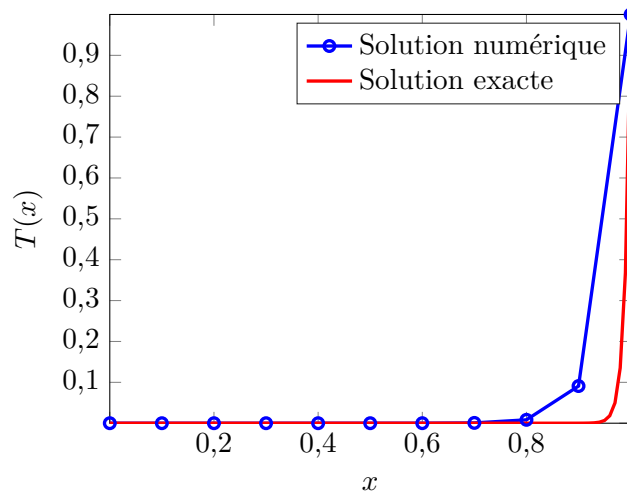




$Pe = 1$

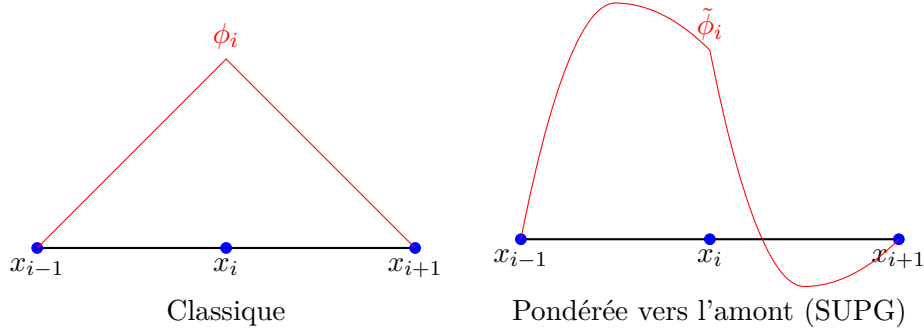


$Pe = 10$



$Pe = 100$

Figure 10.3 – Équation de convection-diffusion : différences arrières

Figure 10.4 – Fonctions de Ritz au noeud  $x_i$ 

### 10.3.1 Une première approche par éléments finis

La formulation variationnelle de notre problème unidimensionnel s'écrit typiquement pour  $w \in H_0^1([0, 1])$  :

$$\int_0^1 k \frac{dT_h}{dx} \frac{dw}{dx} + u \frac{dT_h}{dx} w \, dx = 0 \quad (10.6)$$

de sorte que le système élémentaire correspondant à la méthode de Galerkin est :

$$\int_{x_1^K}^{x_2^K} k \frac{d\psi_j^K}{dx} \frac{d\psi_i^K}{dx} \, dx + \int_{x_1^K}^{x_2^K} u \frac{d\psi_j^K}{dx} \psi_i^K \, dx = s_{11}^K \psi_i^K(x_1^K) + s_{12}^K \psi_i^K(x_2^K)$$

ou encore sur l'élément de référence :

$$\frac{2k}{h} \int_{-1}^1 \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi} \, d\xi + u \int_{-1}^1 \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \hat{\psi}_i \, d\xi = s_{11}^K \hat{\psi}_i(-1) + s_{12}^K \hat{\psi}_i(+1)$$

qui, pour des fonctions d'interpolation linéaires devient :

$$\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{u}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \end{bmatrix}$$

et on considère encore le maillage très simple de la figure 10.1. Une fois la matrice globale assemblée, la deuxième équation, correspondant au noeud  $x_i$ , est exactement l'équation 10.3. Notons que second membre de l'équation est  $s_{12}^{K_{i-1}} + s_{11}^{K_i}$  qui s'annule. La méthode des éléments finis ne fait pas mieux que celle des différences finies.

Pour obtenir l'effet de la différentiation amont, une solution consiste à modifier les fonctions de pondération dans la formulation éléments finis et de déplacer leur poids vers l'amont. La fonction de Ritz classique linéaire par élément associée au noeud  $x_i$  est illustrée à la figure 10.4. Considérons maintenant la fonction «bulle» sur l'élément de référence :

$$b(\xi) = \frac{3}{4}(1 - \xi^2)$$

et on modifie les fonctions de pondération en les remplaçant par :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1(\xi) &= \hat{\psi}_1(\xi) - \alpha b(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2} - \alpha b(\xi) \\ \tilde{\psi}_2(\xi) &= \hat{\psi}_2(\xi) + \alpha b(\xi) = \frac{(1+\xi)}{2} + \alpha b(\xi)\end{aligned}$$

soit les fonctions habituelles, augmentées de la fonction bulle et d'un paramètre  $\alpha$  à déterminer. La fonction de Ritz du noeud  $x_i$  est illustrée à la droite de la figure 10.4 et on constate le biais vers l'amont de la pondération.

Le système élémentaire de type Petrov-Galerkin s'écrit :

$$\frac{2k}{h} \int_{-1}^1 \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \frac{d\tilde{\psi}_i}{d\xi} d\xi + u \int_{-1}^1 \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi} \tilde{\psi}_i d\xi = s_{11}^K \tilde{\psi}_i(-1) + s_{12}^K \tilde{\psi}_i(+1)$$

et on vérifie facilement que le terme de diffusion reste inchangé. Le système élémentaire de type Petrov-Galerkin devient :

$$\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{u}{2} \begin{bmatrix} -(1-\alpha) & (1-\alpha) \\ -(1+\alpha) & (1+\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \end{bmatrix}$$

et en assemblant sur le maillage de la figure 10.1, on obtient (les variables secondaires s'annulant toujours) :

$$-\left(\frac{k}{h} + \frac{u}{2}(1+\alpha)\right) T_{i-1} + \left(\frac{2k}{h} + \alpha u\right) T_i + \left(-\frac{k}{h} + \frac{u}{2}(1-\alpha)\right) T_{i+1} = 0 \quad (10.7)$$

On remarque immédiatement qu'en posant  $\alpha = 0$ , on retombe sur le schéma de différences centrées. Si  $\alpha = 1$ , on a le schéma de différences arrières et donc nous avons réussi, en modifiant les fonctions de pondération, à obtenir le même effet. Finalement, en posant :

$$\alpha_{opt} = \coth(Pe^K) - \frac{1}{Pe^K} \text{ où } Pe^K = \frac{uh}{2k} \quad (10.8)$$

on peut montrer que la solution numérique est exacte aux noeuds du maillage tel qu'illustré à la figure 10.5. On peut voir le paramètre  $Pe^K$  comme un nombre de Peclet local à l'élément (la longueur de référence étant fixée à  $h/2$ ). La formule 10.8 ne donne cette performance que pour le problème simplifié unidimensionnel 10.2. On la retrouve cependant à peu près telle quel dans de nombreux articles en dimension supérieure et pour des équations aux dérivées partielles beaucoup plus générale. Il faut être conscient des limitations d'une telle généralisation et on ne doit surtout pas s'attendre à obtenir des solutions numériques exactes aux noeuds dans le cas général.

### 10.3.2 Une deuxième approche par éléments finis

La modification des fonctions de pondération semble avoir été la clé du succès de l'approche précédente. On peut arriver à un résultat similaire d'une façon plus générale qui consiste à modifier la

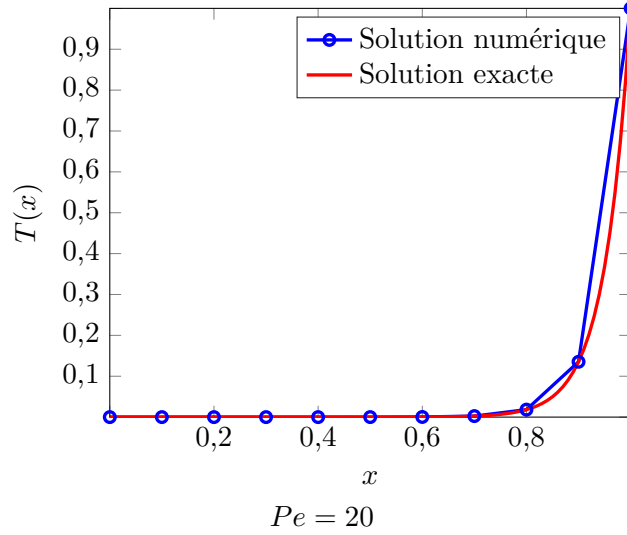


Figure 10.5 – Premier schéma de type SUPG avec  $\alpha$  défini par 10.8

formulation variationnelle 10.6 du problème en lui ajoutant un terme supplémentaire faisant intervenir le résidu (fort) de l'équation à résoudre. Cette idée a été introduite par Hughes et Brooks [38, 39] et toute une littérature s'en est suivie. Dans le cas de notre problème simplifié, on aurait :

$$\int_0^1 k \frac{dT_h}{dx} \frac{dw}{dx} + u \frac{dT_h}{dx} w \, dx + \sum_K \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( -\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT_h}{dx} \right) + u \frac{dT_h}{dx} \right) \tilde{w} \, dx = 0$$

La formulation est dite consistante car si  $T_h$  est la solution exacte de l'équation différentielle ( $T = T_h$ ), le terme supplémentaire s'annule et on peut dire que l'équation différentielle n'est pas modifiée. On remarque aussi que ce terme est pondérée par une fonction test (modifiée)  $\tilde{w}$  et que la stratégie de modifier les fonctions de base est encore présente. Notons de plus que l'écriture n'est pas arbitraire. Le terme supplémentaire **ne peut pas** s'écrire sous la forme :

$$\int_0^1 \left( -\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT_h}{dx} \right) + u \frac{dT_h}{dx} \right) \tilde{w} \, dx$$

car le terme  $\left( k \frac{dT_h}{dx} \right)$  n'est généralement pas continu à la frontière des éléments et on ne peut pas le dériver. Comme nous le verrons, les fonctions de pondération  $\tilde{w}$  ne sont pas non plus continues à la frontière des éléments. Au niveau élémentaire, on a :

$$\int_{x_1^K}^{x_2^K} k \frac{d\psi_j^K}{dx} \frac{d\psi_i^K}{dx} + u \frac{d\psi_j^K}{dx} \psi_j^K \, dx + \int_{x_1^K}^{x_2^K} \left( -\frac{d}{dx} \left( k \frac{d\psi_j^K}{dx} \right) + u \frac{d\psi_j^K}{dx} \right) \tilde{\psi}_i^K \, dx = s_{11}^K \psi_i^K(x_1^K) + s_{12}^K \psi_i^K(x_2^K)$$

Remarquons que le deuxième terme de diffusion n'a pas été intégré par parties. Il n'a donc aucune contribution au second membre faisant apparaître les variables secondaires. Dans le cas linéaire, ce

terme s'annule tout simplement (si  $k$  est constant). Ce ne sera pas le cas pour une discrétisation quadratique ou si  $k$  est variable et il fera donc intervenir des dérivées secondes.

Il reste à construire les fonctions tests modifiées  $\tilde{\psi}_i$ . L'une des formes possibles est :

$$\tilde{\psi}_i = \tau \left( u \frac{d\psi_i}{dx} \right) = \frac{h^K \alpha}{2|u|} \left( u \frac{d\psi_i}{dx} \right) \text{ et donc } \tau = \frac{h^K \alpha}{2|u|}$$

et on voit la dépendance des fonctions tests sur la taille de l'élément et sur un paramètre  $\alpha$  qui, comme nous le verrons, dépend du nombre de Peclet local.

Dans notre problème simplifié,  $\frac{u}{|u|}$  n'est rien d'autre que le signe de  $u$ . Si on prend des fonctions tests linéaires,  $\frac{d\psi^K}{dx}$  est constant par élément et on a alors :

$$\frac{d\psi_1^K}{dx} = -\frac{1}{h^K} \text{ et } \frac{d\psi_2^K}{dx} = \frac{1}{h^K}$$

de sorte qu'en supposant  $u$  positif :

$$\tilde{\psi}_1^K = \psi_1^K + \tau \left( u \frac{d\psi_1^K}{dx} \right) = \psi_1^K - \frac{\tau}{h^K} = \psi_1^K - \frac{\alpha}{2}$$

$$\tilde{\psi}_2^K = \psi_2^K + \tau \left( u \frac{d\psi_2^K}{dx} \right) = \psi_2^K + \frac{\tau}{h^K} = \psi_2^K + \frac{\alpha}{2}$$

et on retrouve la situation de la figure 10.6 pour la fonction de Ritz attachée au noeud  $x_i$ . Ces fonctions de Ritz sont nettement pondérées vers l'amont mais sont quant à elles discontinues (avec un saut de hauteur  $\alpha$ ), contrairement à la première approche que nous avons vue.

Un simple calcul permet de vérifier que l'on obtient exactement le même système élémentaire qu'à la section précédente et donc la récurrence (10.7) au noeud  $x_i$ . Par conséquent, si on choisit le  $\alpha$  optimal de l'équation (10.8), la solution numérique sera exacte aux noeuds. En fait, on montre dans Verdier [60] que l'on obtient essentiellement les mêmes résultats avec :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{(Pe^K)^2}}}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de tracer cette expression de  $\alpha$  et celle de l'équation (10.8) en fonction de  $Pe^K$  pour réaliser que les courbes sont très semblables. On a alors :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\frac{4|u|^2}{(h^K)^2} + \frac{144k^2}{(h^K)^4}}}$$

expression qui peut aussi être utilisée.

Par contre, tout le développement précédent n'a plus de base aussi solide lorsque l'on prend une discrétisation quadratique. On peut le constater à la figure 10.7 où les résultats des deux

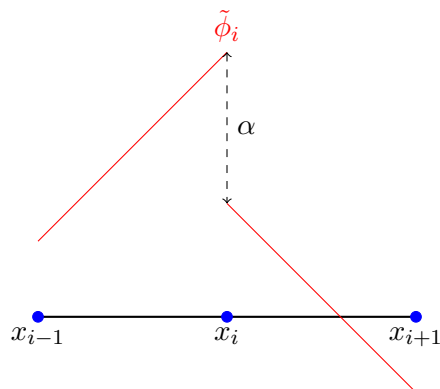


Figure 10.6 – Fonction de Ritz modifiée de type SUPG

discrétisations sont illustrés. Bien que la solution linéaire soit exacte aux noeuds et l'autre pas, la solution quadratique est quand même légèrement plus précise, que ce soit en norme  $L^2$  ou  $H_0^1$ . On peut également vérifier que les taux de convergence (en fonction de la taille du maillage) sont optimaux dans les deux normes et pour les deux discrétisations ( $O(h^{k+1})$  en norme  $L^2$  et  $O(h^k)$  en norme  $H_0^1$ ,  $k$  étant le degré de la discrétisation).

Terminons sur une remarque importante. Il ne faut pas croire que la méthode de Galerkin classique n'est pas convergente pour les problèmes de type convection-diffusion. La figure 10.8 montre bien qu'en raffinant le maillage, on finit par obtenir des solutions numériques très satisfaisantes même à  $Pe = 100$ . Ainsi, avec un maillage de 80 éléments, on a nul besoin d'utiliser la méthode SUPG. Cette figure illustre aussi le fait que l'approche SUPG ne fait que pallier aux lacunes d'un maillage trop grossier pour capturer adéquatement une solution. Mentionnons enfin que même ce dernier maillage à 80 éléments deviendrait à son tour inadéquat si on augmentait le nombre de Peclet à 1000 ou 10000. On verra au chapitre 15 comment on peut adapter automatiquement un maillage pour capturer ce type de solution.

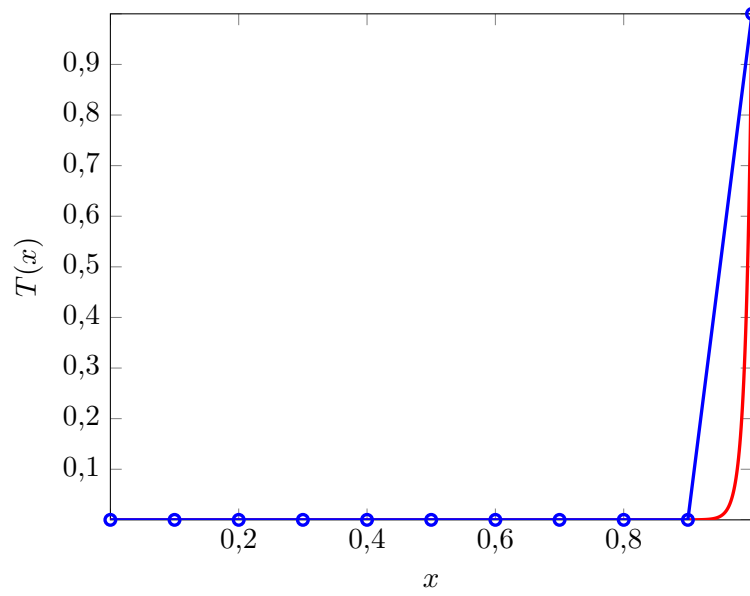
## 10.4 Méthode SUPG en dimension supérieure

La même stratégie fonctionne en dimensions 2 et 3, mais bien entendu avec quelques difficultés supplémentaires. La principale vient de la définition du Peclet local et en particulier la définition de  $h^K$ . En dimension 1, ce ne peut être que la longueur de l'élément. Mais qu'en est-il en dimension supérieure et en particulier lorsque les éléments sont étirés (anisotropes) comme nous le verrons au chapitre 15.

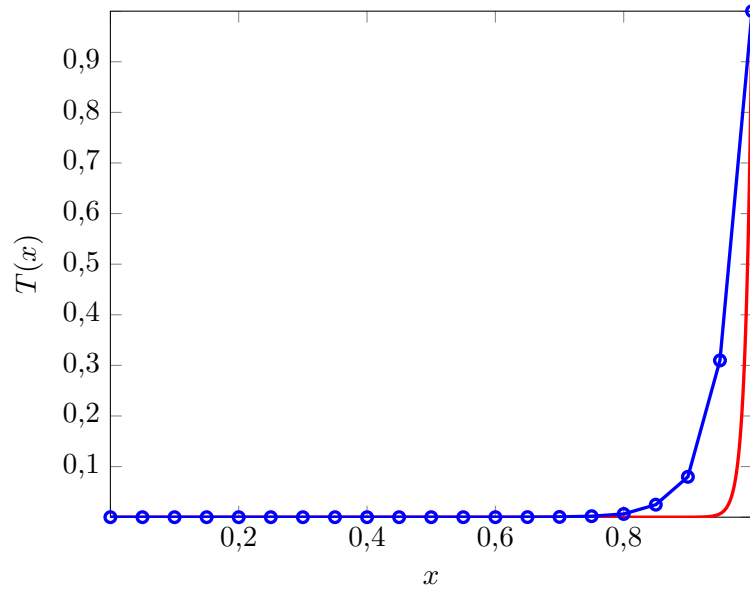
On étudie l'équation de réaction-convection-diffusion dans le cas stationnaire :

$$\underbrace{CT}_{\text{terme de réaction}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla T}_{\text{terme de convection}} - \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)}_{\text{terme de diffusion}} = \underbrace{f}_{\text{terme source}} \quad (10.9)$$

où  $\mathbf{u}$  est un champ de vitesse (supposé connu) et  $\mathbf{K}_T$  est le tenseur d'ordre 2 de diffusion (conductivité thermique pour l'équation de la chaleur), qui peut dépendre de  $T$  et  $C$  est un coefficient (qui

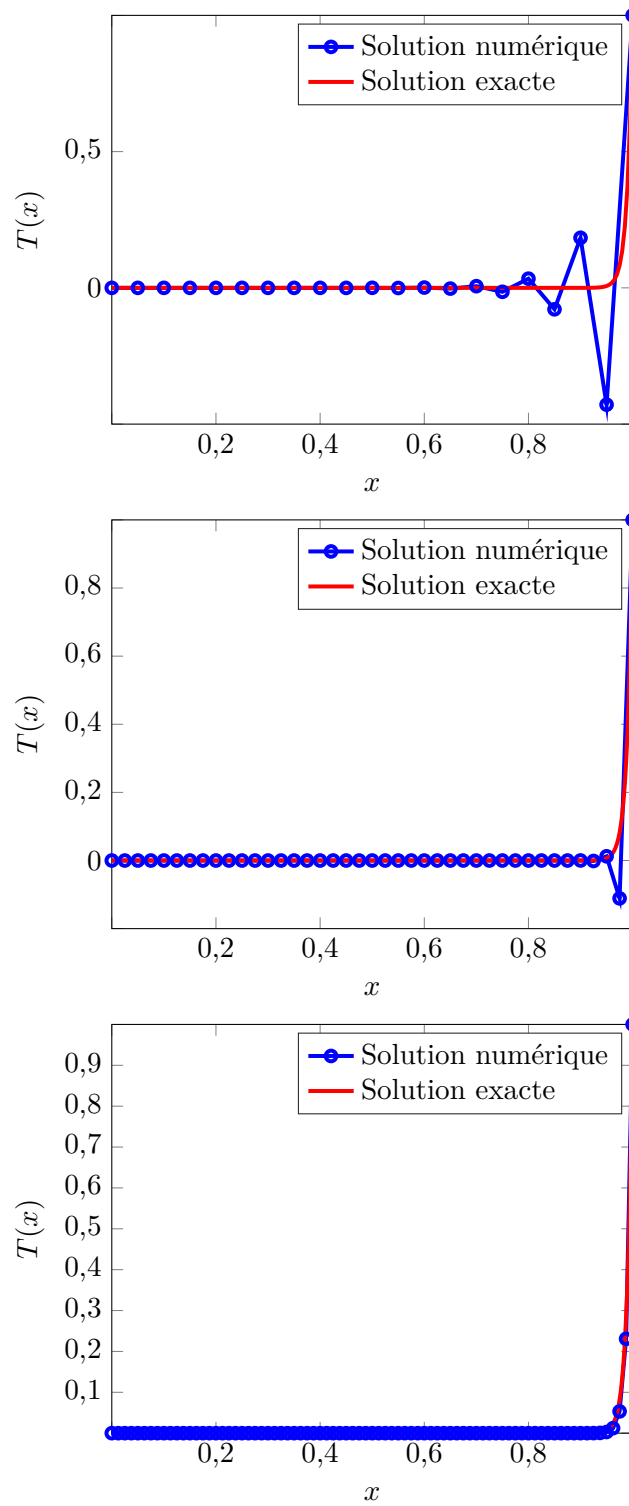


Approximation linéaire :  $Pe = 100$



Approximation quadratique :  $Pe = 100$

Figure 10.7 – Schéma général de type SUPG

Figure 10.8 – Méthode de Galerkin classique avec 20, 40 et 80 éléments ( $Pe = 100$ )



peut dépendre de la position et de  $T$ ). Dans le cas isotrope, ce tenseur est un multiple du tenseur identité ( $k\mathbf{I}$ ). À droite, le terme source  $f$  peut aussi dépendre de  $T$ .

On impose aux bords du domaine des conditions de Dirichlet et de Neumann :

$$\begin{aligned} T &= \bar{T} && \text{sur } \Gamma_D \\ (\mathbf{K}_T \nabla T) \cdot \mathbf{n} &= h_T && \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

Lorsque l'on multiplie l'équation (10.9), ou formulation forte, par des fonctions test  $w$  et que l'on intègre le résultat, on obtient la *formulation variationnelle* ou formulation faible du problème. On applique d'abord le théorème de la divergence au terme de diffusion. Enfin, puisque les fonctions test s'annulent où la condition de Dirichlet est imposée, on obtient dans le cas général :

$$\int_{\Omega} (CTw + \mathbf{u} \cdot \nabla T w + (\mathbf{K}_T \nabla T) \cdot \nabla w - f w) dv = \int_{\partial\Gamma_N} h_T w dv \tag{10.10}$$

Ces équations montrent de fortes oscillations dans la solution numérique lorsque le terme de convection est dominant par rapport au terme de diffusion. Plus précisément, on obtient ces oscillations lorsque le *nombre de Peclet* ( $Pe$ ), défini par le ratio du transfert par convection et du transfert par diffusion, est grand. Pour une longueur  $L$  à définir selon les dimensions du problème, on a :

$$Pe = \frac{uL}{k}$$

C'est pour contrer les oscillations indésirables que la méthode SUPG est utilisée. À l'origine, l'idée consistait à appliquer une stabilisation au terme de convection. Ainsi, on utilise plutôt des fonctions tests modifiées  $\tilde{w}$  de la forme :

$$\tilde{w} = \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w \tag{10.11}$$

On voit bien l'analogie avec le cas unidimensionnel. On est donc mené à la formulation variationnelle suivante pour le cas SUPG :

$$\int_{\Omega} (CTw + \mathbf{u} \cdot \nabla T w + (\mathbf{K}_T \nabla T) \cdot \nabla w - f w) dv + \sum_K \int_K (CT + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T) - f) \tilde{w} dv = \int_{\partial\Gamma_N} h_T w dv \tag{10.12}$$

On remarque qu'il s'agit de la même formulation variationnelle que pour Galerkin à laquelle on a ajouté un terme de stabilisation pondéré par des fonctions tests différentes. Ici encore la formulation est consistante dans le sens où la solution exacte du problème vérifie la formulation variationnelle.

Sur chaque élément, on définit un nombre de Peclet local par  $Pe^K = \|\mathbf{u}\| h^K / 2k$ , le comportement asymptotique de  $\tau$  doit respecter les conditions suivantes pour conserver les propriétés de stabilité et de convergence :

En dimensions supérieures, il n'existe pas de solution optimale connue pour  $\tau$  et plusieurs choix sont proposés dans la littérature. Nous continuerons d'employer la formule obtenue dans le cas unidimensionnel :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\|\mathbf{u}\|^2}{h_\tau^2} + \frac{144k^2}{h_\tau^4}}}$$

Il est à noter que ce choix dépend d'une longueur  $h_\tau$  liée à la taille d'un élément donné. Idéalement, cette longueur devrait aussi être liée à la direction du vecteur  $\mathbf{u}$ . Intuitivement, si  $\mathbf{u}$  est aligné avec un arête de l'élément, alors  $h_\tau$  devrait être la longueur de cette arête. Ce choix peut être fait de plusieurs façons pour chaque type d'élément (i.e. triangles, quadrilatères, tétraèdres, etc.). Suivant Verdier [60], on pose :

$$h_\tau = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_g} \left( \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \nabla N_i \right)^2}} \quad (10.13)$$

où  $n_g$  correspond au nombre de noeuds de calcul pour le température sur l'élément et les  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation. La définition dépend donc du degré d'interpolation de la discrétisation. Si  $\|\mathbf{u}\| = 0$  on définira  $h_\tau$  comme étant la longueur du côté d'un triangle équilatéral (tétraèdre régulier) ayant la même aire (le même volume) que l'élément.

On peut dans un premier temps se convaincre que la définition précédente donne bien une longueur. Reportons nous, une fois encore, au cas unidimensionnel pour une discrétisation linéaire ( $n_g = 2$ ). On suppose de plus que  $u$  est positif et on a :

$$h_\tau = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 \left( \frac{u}{\|u\|} N'_i \right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 (N'_i)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left( \left( -\frac{1}{h^K} \right)^2 + \left( \frac{1}{h^K} \right)^2 \right)}} = h^K$$

et on revient à la longueur de l'élément.

On peut montrer que dans le cas bidimensionnel, l'équation (10.13) donne une longueur proportionnelle à la taille de l'élément et alignée avec le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ . Ainsi, si  $\mathbf{u}$  est parallèle à l'un des côtés de l'élément, alors  $h_\tau$  sera simplement la longueur de ce côté.

**Remarque 10.1.** Pour des problèmes plus complexes présentant d'autres termes comme dans le cas instationnaire, il faut s'assurer que la formulation variationnelle soit consistante et donc que tous les termes soient présents dans le terme de stabilisation. En ce qui concerne  $\tau$ , on propose la forme :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{(\Delta t)^2} + \frac{4\|\mathbf{u}\|^2}{h_\tau^2} + \frac{144k^2}{h_\tau^4}}}$$

qui inclut la contribution du pas de temps. ◀

**Exemple 10.2.** Nous allons considérer un problème dit de perturbation singulière proposé dans [21] :

$$\begin{cases} CT + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\epsilon \nabla T) = f & \text{in a domain } \Omega \in \mathcal{R}^2 \\ T = 0 & \text{sur toute la frontière } \Gamma_D \end{cases} \quad (10.14)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre constant choisi très petit ( $\epsilon = 10^{-6}$ ). On parle de perturbation singulière précisément en raison de ce petit paramètre. L'équation obtenue peut en effet être perçue comme une perturbation d'un problème de transport pur (sans diffusion). Le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  et le paramètre  $C$  sont donnés par :

$$\mathbf{u} = (1 - 2\epsilon)(-1, -1), \quad C = 2(1 - \epsilon),$$

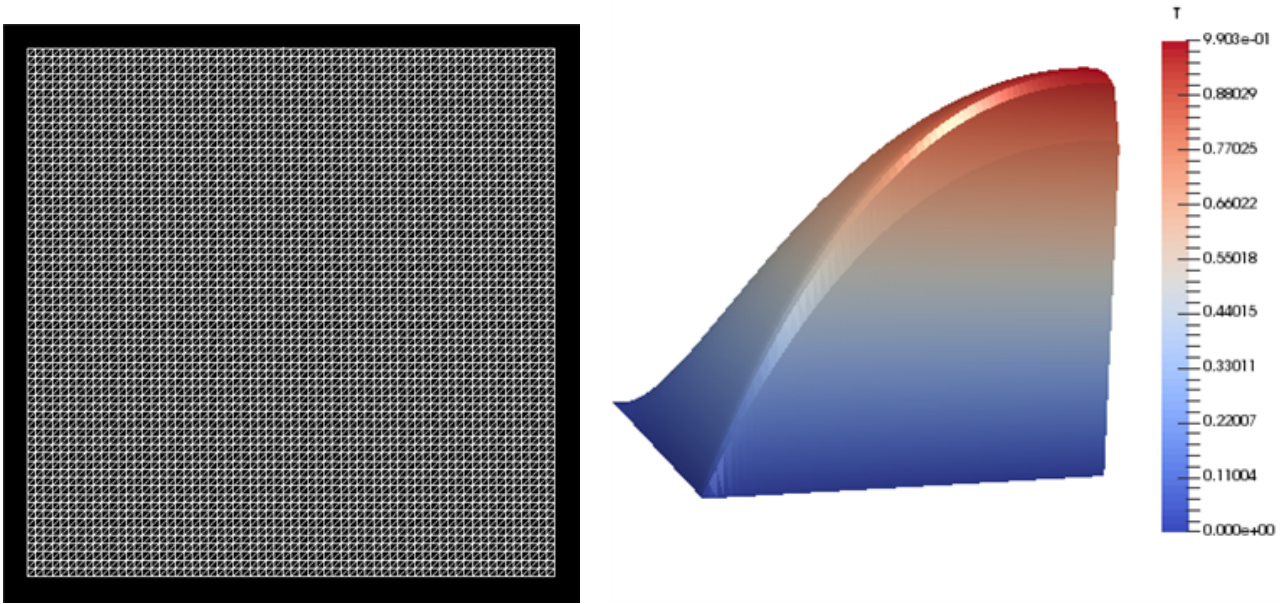


Figure 10.9 – Perturbation singulière : maillage et solution SUPG.

La géométrie du problème est le carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$  et on prendra :

$$f(x, y) = - \left[ x - \left( \frac{1 - e^{-x/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}} \right) + y - \left( \frac{1 - e^{-y/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}} \right) \right] e^{x+y}$$

On montre alors que la solution analytique du problème est :

$$T(x, y) = \left[ \left( x - \frac{1 - e^{-x/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}} \right) \left( y - \frac{1 - e^{-y/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}} \right) \right] e^{x+y}$$

qui s'annule bien sur la frontière. Cette fonction présente des variations très brusques sur les frontières  $x = 0$  et  $y = 0$  où elle passe subitement de 0 à presque 1. Il s'agit en fait de variations très similaires à celles que nous avons vues en dimension 1. Le maillage utilisé et la solution (quadratique) avec SUPG sont présentés à la figure 10.9.

Tout comme en dimension 1, la solution obtenue avec la méthode de Galerkin standard est tout simplement inutilisable. De violentes oscillations perturbent complètement les isovaleurs (voir la figure 10.10 à gauche) alors que la méthode SUPG donne des résultats acceptables. ♦

**Exemple 10.3.** On considère cette fois un problème de convection pure :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = 0$$

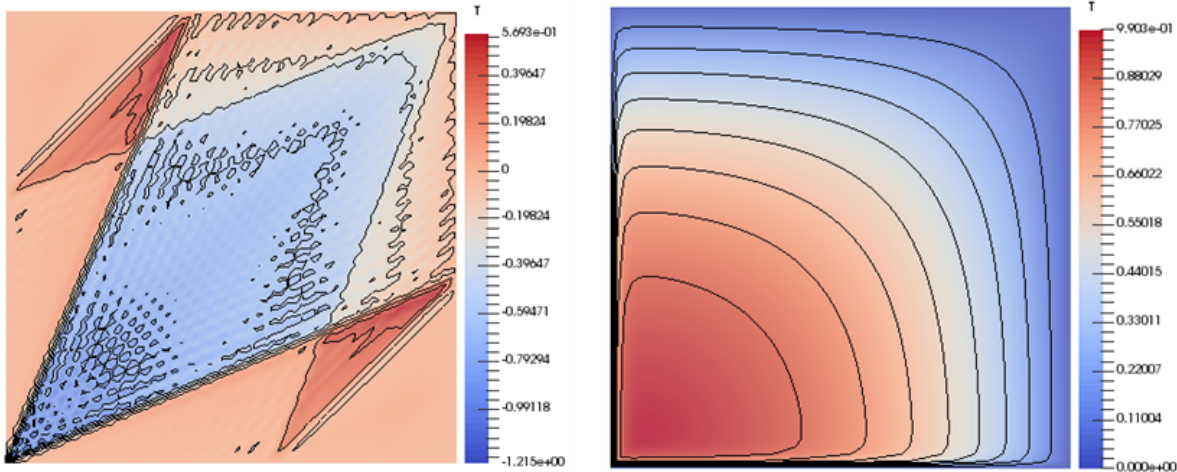


Figure 10.10 – Perturbation singulière : solution Galerkin et solution SUPG.

(aucune diffusion) dans la géométrie de la figure 10.11. Le champ de vitesse est donné par :

$$\mathbf{u} = (-y, x)$$

qui donne un mouvement de rotation dans le sens antihoraire. Pour un problème purement convectif, il suffit de donner une condition de Dirichlet uniquement sur la partie entrante de la frontière du domaine c.-à-d. où  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ . Dans cet exemple, on l'impose seulement sur la frontière inférieure ( $y = 0$ ,  $\mathbf{n} = (0, -1)$  et donc  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -x < 0$ ) ainsi que sur la paroi de droite ( $x = 1$ ,  $\mathbf{n} = (1, 0)$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -y < 0$ ). La solution analytique est tout simplement le transport, suivant le champ de vitesse, de la condition aux limites. Dans notre exemple, on impose  $T(x, 0) = 1$  pour  $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$  et 0 ailleurs alors que sur la paroi de droite, on impose  $T(1, y) = 0$ . La solution analytique est donc simplement 0 dans tous le domaine sauf dans la région en bleu sur la figure où  $T = 1$ . C'est un cas limite très difficile (nombre de Peclet infini), bien que la solution du problème soit relativement simple.

Les maillages utilisés sont présentés à la figure 10.12. La solution obtenue par la méthode de galerkin sur le maillage de base est tout simplement inutilisable. On a peine à reconnaître la solution sur la figure 10.13. La solution numérique oscillent entre  $-6,5$  et  $7,7$  alors qu'elle devrait rester entre 0 et 1. Seule la solution linéaire est illustrée, la quadratique étant encore pire. La méthode SUPG produit quant à elle les résultats de la figure 10.14. Bien que meilleures que celles obtenues par la méthode de Galerkin, ces solutions numériques laissent toutefois encore à désirer. De fortes oscillations sont encore présentes. On note que la solution linéaire est plus diffuse. La solution quadratique est encore plus oscillatoire et présente des pics indésirables. Enfin, un maillage plus fin permet d'améliorer les solutions (voir la figure 10.15), bien qu'il reste encore du chemin à faire. On

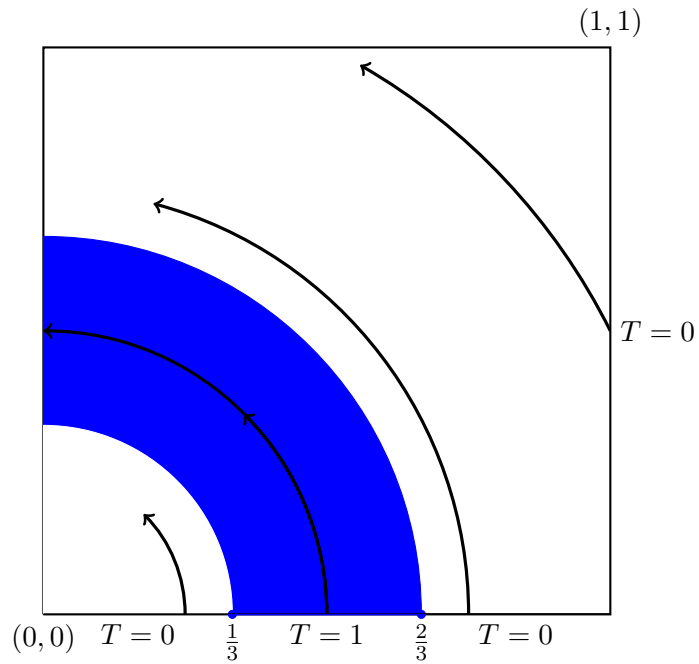


Figure 10.11 – Convection pure : géométrie et conditions aux limites

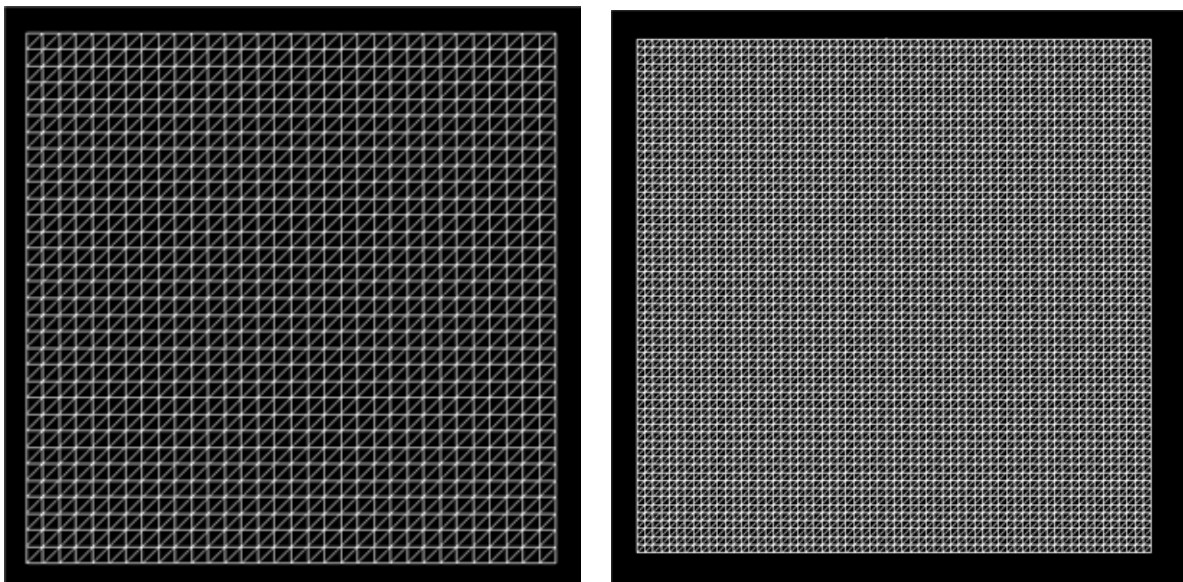


Figure 10.12 – Convection pure : maillage de base et maillage plus fin.

verra qu'ici encore, l'adaptation de maillage (voir le chapitre 15) permet de se sortir élégamment d'impasse. ♦

**Exemple 10.4.** On considère ici une forme un peu plus générale de l'équation de convection-diffusion s'écrivant :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla T) - \nabla \cdot (\mathbf{u} T) = f$$

On constate que le terme de convection est sous une forme légèrement plus générale. En ce qui concerne la formulation variationnelle, on peut distinguer ici deux approches essentiellement équivalentes mais qui donnent des conditions naturelles différentes.

**Première approche**

C'est celle à laquelle nous sommes habitués. Il suffit pour ce faire de développer le terme de convection :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} T) = T(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla T$$

Pour un champ de vitesse à divergence nulle, on revient à la formulation habituelle. Sinon, il y a un terme supplémentaire mais la formulation reste similaire :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \dot{T} w + T(\nabla \cdot \mathbf{u}) w + \mathbf{u} \cdot \nabla T w + (\mathbf{K}_T \nabla T) \cdot \nabla w - f w \right) dv \\ & \quad + \sum_K \int_K (\dot{T} + T(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T) - f) \tilde{w} dv \\ & = \int_{\partial \Gamma_N} \mathbf{K} \nabla \cdot \mathbf{n} w dv \end{aligned}$$

Notons que la condition naturelle est encore ici  $\mathbf{K} \nabla \cdot \mathbf{n}$ . Notons de plus que ce terme ne fait *a priori* pas intervenir la fonction test  $\tilde{w}$  puisque le deuxième terme de diffusion n'a pas été intégré par parties. ♦



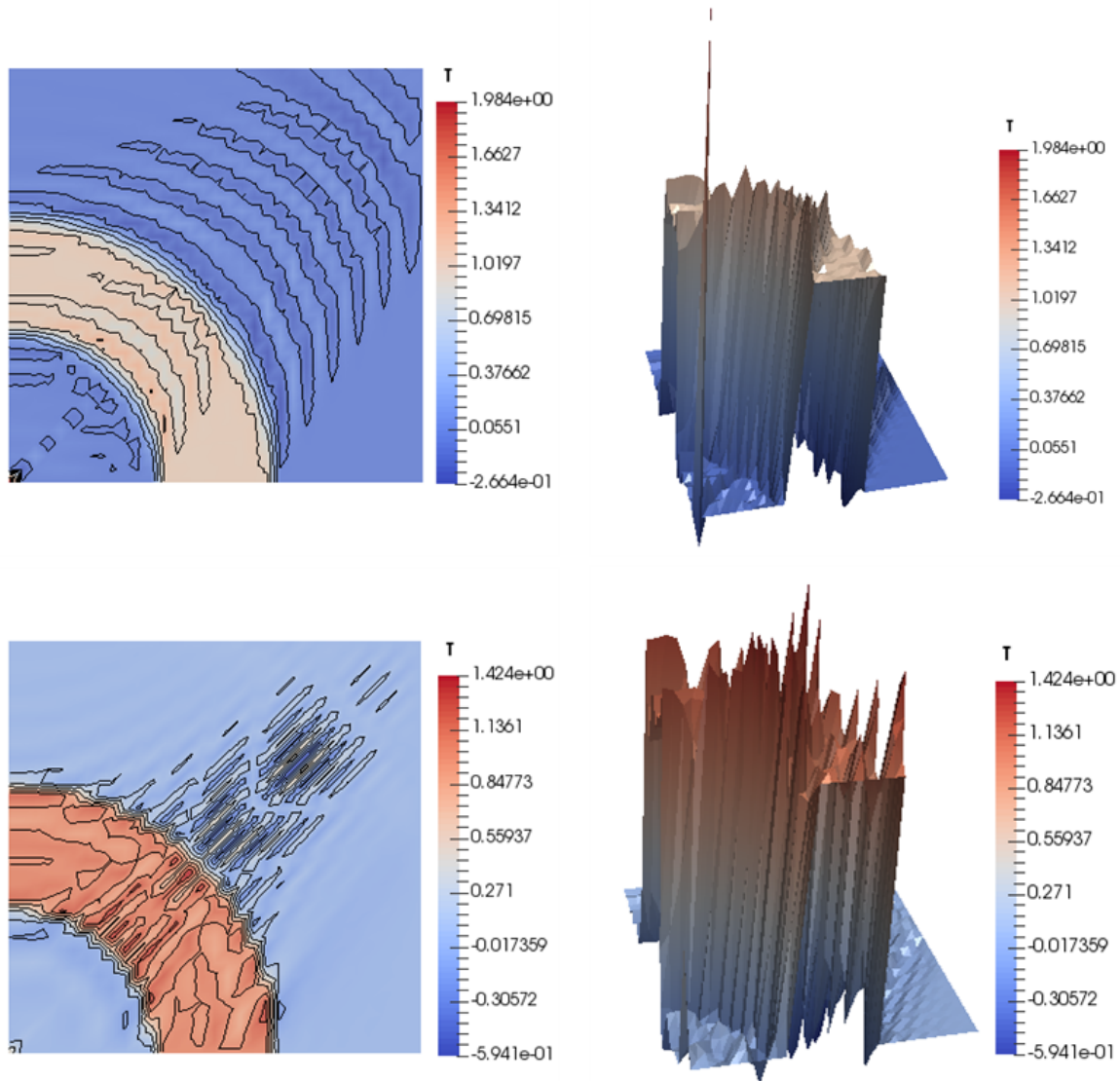


Figure 10.13 – Convection pure et méthode de Galerkin : solutions linéaire (haut) et quadratique (bas).

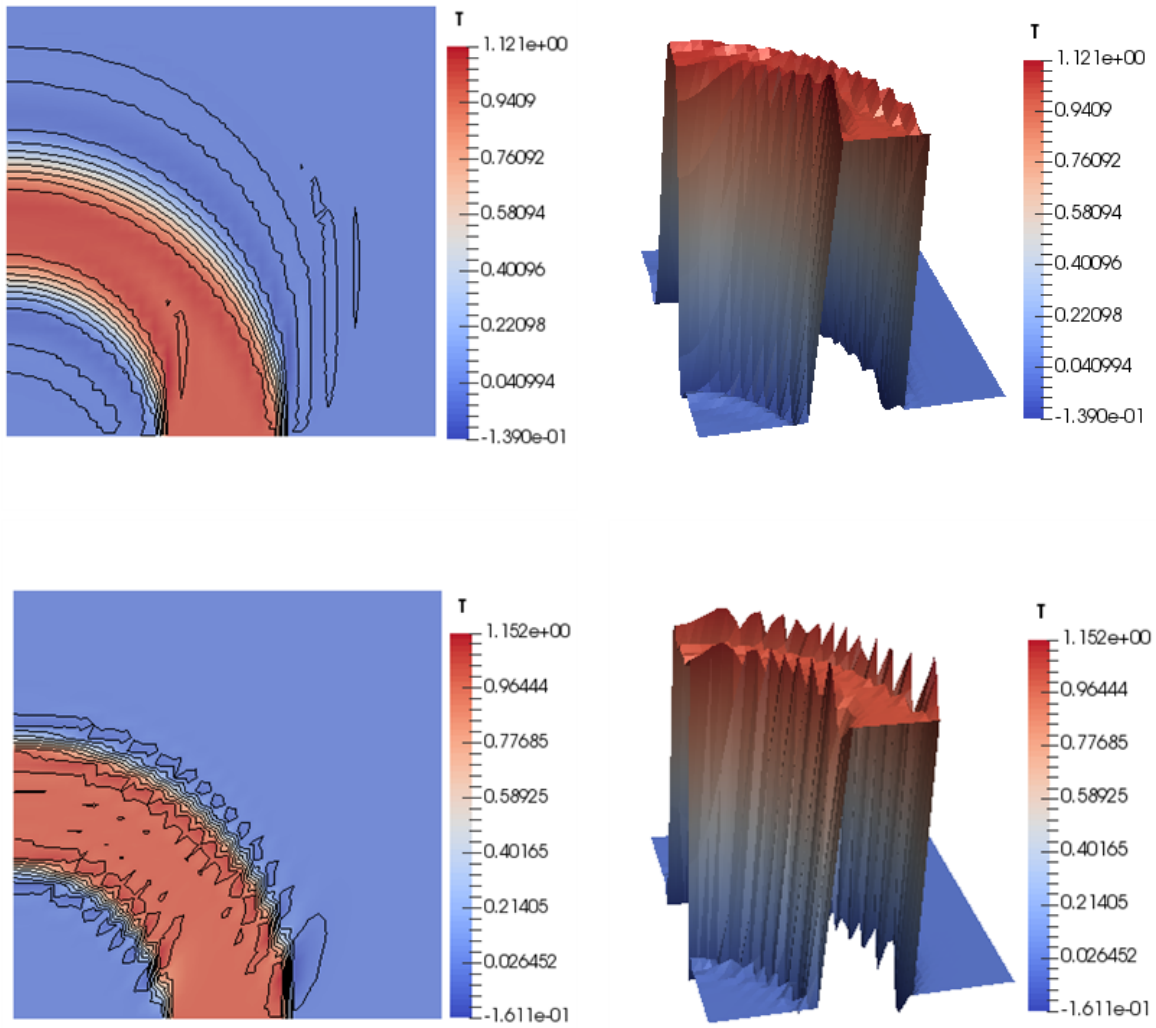


Figure 10.14 – Convection pure avec SUPG : solutions linéaire (haut) et quadratique (bas).



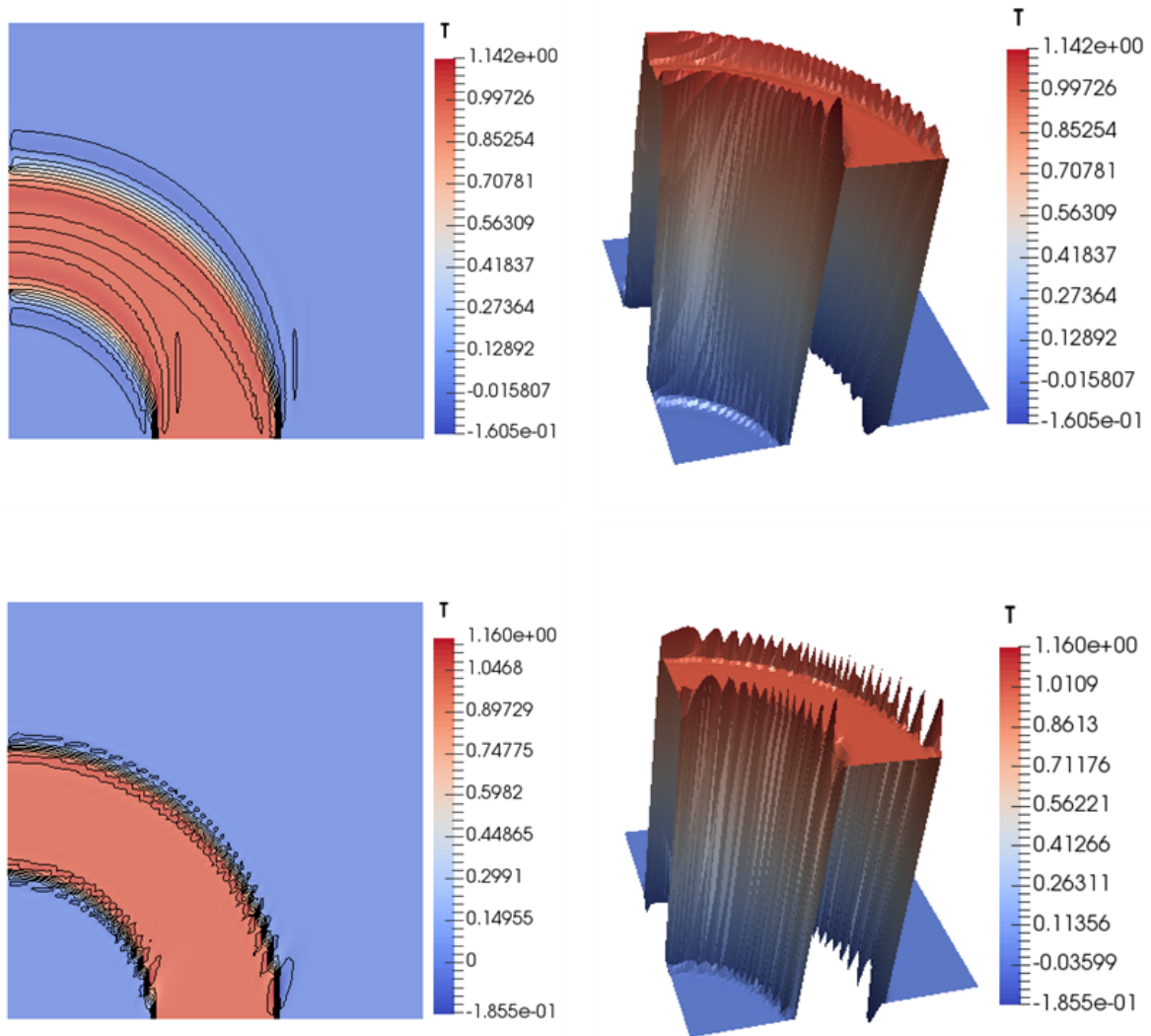


Figure 10.15 – Transport pur avec SUPG : solutions linéaire (haut) et quadratique (bas) sur maillage plus fin.

## 10.5 Exercices

1. On considère l'équation de convection-diffusion suivante :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{x})\nabla T) + \mathbf{u} \cdot \nabla T + c(\mathbf{x})T &= f(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ a(\mathbf{x})T + (\mathbf{K}(\mathbf{x})\nabla T) \cdot \mathbf{n} &= g(\mathbf{x}) \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

où on supposera que :

- $f(\mathbf{x})$  est dans  $L^2(\Omega)$  et  $g(\mathbf{x})$  est dans  $L^2(\Gamma)$  ;
- $c(\mathbf{x})$  est dans  $L^\infty(\Omega)$  et  $a(\mathbf{x})$  est dans  $L^\infty(\Gamma)$  ;
- $\mathbf{u}$  est un champ de vecteurs donné à composantes dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$  ;
- $\mathbf{K}$  est un tenseur symétrique dont les composantes sont  $C^1(\bar{\Omega})$  et pour laquelle il existe une constante  $\alpha$  telle que :

$$(\mathbf{K}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|_2^2 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

- Il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

$$c(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{u} \geq C_1 \geq 0 \text{ presque partout dans } \Omega$$

$$a(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq C_2 \geq 0 \text{ presque partout sur } \Gamma$$

et l'une au moins des constantes  $C_1$  et  $C_2$  est strictement positive.

Proposer une formulation variationnelle dans un espace fonctionnel approprié et démontrer l'existence et l'unicité de ce problème. Est-ce que l'on peut ramener ce problème à un problème d'optimisation ?

**Suggestion** : Pour la coercivité, on intégrera par parties le terme en  $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ . L'identité suivante pourrait aussi être utile :

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}w) = (\nabla \cdot \mathbf{v})w + \mathbf{v} \cdot \nabla w$$

2. La discrétisation de problèmes unidimensionnels par éléments finis ou par différences finies mène, dans des cas simples, à des récurrences de la forme :

$$aT_{i+1} + bT_i + cT_{i-1} = 0$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , auquel on ajoute des conditions aux limites  $T_0 = \alpha_0$  et  $T_n = \alpha_n$ . Si  $b^2 - 4ac > 0$ , montrer que la solution générale de cette récurrence est :

$$T_i = \left( \frac{\alpha_n - \alpha_0 X_2^n}{X_1^n - X_2^n} \right) X_1^i + \left( \frac{\alpha_0 X_1^n - \alpha_n}{X_1^n - X_2^n} \right) X_2^i$$

pour  $X_1$  et  $X_2$  judicieusement choisis.

**Suggestion** : Trouver  $X$  tel que  $T_i = X^i$  soit une solution.

3. En vous servant du résultat du numéro précédent, résoudre les récurrences 10.3, 10.4 et 10.7 et comparer graphiquement avec la solution analytique.

## Chapitre 11

# Application aux problèmes d'élasticité

Tous les problèmes considérés jusqu'à maintenant ne comportaient qu'une seule équation différentielle ou aux dérivées partielles. Il existe cependant plusieurs applications dans lesquelles on doit résoudre un système d'équations. En fait, les systèmes sont de plus en plus la règle plutôt que l'exception.

Nous introduirons ce sujet en discutant des problèmes d'élasticité linéaire, qui ont encore une grande importance pratique. Le problème consiste à calculer les trois composantes du déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}))$  que subit un corps élastique soumis à diverses sollicitations. On obtient des équations couplées qui ne peuvent être résolues séparément. Il en est de même en mécanique des fluides visqueux incompressibles, où les inconnues sont le champ de vitesse  $(u_1, u_2, u_3)$  et la pression  $p$ . Dans ce dernier cas, on a un système de 4 équations pour ces 4 inconnues que nous étudierons au chapitre suivant.

### 11.1 Problèmes d'élasticité linéaire

On considère un corps fait d'un matériau élastique en dimension 3 (le cas bidimensionnel ne présentant aucune difficulté particulière) et soumis à des forces externes (forces par unité de volume  $\text{N/m}^3$ ) :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = (r_1(x_1, x_2, x_3), r_2(x_1, x_2, x_3), r_3(x_1, x_2, x_3))$$

On souhaite alors déterminer le déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  d'un point matériel  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  occasionné par l'application de ces sollicitations. Pour ce type de problèmes, la notation tensorielle est utile, sinon nécessaire. On retrouvera à l'annexe A quelques rappels sur cette notation et en particulier sur le théorème de la divergence. Introduisant le tenseur (symétrique) des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , les équations d'équilibre s'écrivent :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}$$

Cette dernière équation est en fait un système de 3 équations :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\right) &= r_1(x_1, x_2, x_3) \\ -\left(\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}\right) &= r_2(x_1, x_2, x_3) \\ -\left(\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}\right) &= r_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

On voit immédiatement l'intérêt d'introduire la notation tensorielle qui est beaucoup plus compacte. Introduisons maintenant deux tenseurs qui seront fort utiles par la suite. Pour un champ de déplacement  $\mathbf{u}$  donné, on définit le *tenseur gradient de déformation* par :

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

On définit ensuite le *tenseur de déformation* comme étant la partie symétrique du tenseur gradient de déformation :

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

Nous noterons  $\gamma_{ij}$  les différentes composantes du tenseur  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ . Notons de plus que le tenseur de déformation n'a pas d'unités.

On multiplie maintenant l'équation d'équilibre par une fonction test vectorielle  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  et on intègre par parties sur le domaine  $\Omega$ . On trouve alors, en utilisant le théorème A.7 :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, dv - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv$$

Puisque le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  est symétrique, il est facile de montrer que  $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w})$ , de sorte que la formulation précédente devient :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv$$

Il reste à introduire une loi dite *de comportement* reliant le déplacement  $\mathbf{u}$  (ou plus précisément le tenseur  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ ) au tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ . Pour un matériau dit linéaire élastique, cette relation prend la forme générale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \quad \text{ou en termes des composantes} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}))_{kl} = C_{ijkl} \gamma_{kl} \quad (11.3)$$

où on a utilisé la convention de somme sur les indices répétés. La relation 11.3 n'est qu'une généralisation de la loi de Hooke et  $\mathbf{C}$  est le *tenseur d'élasticité* (du quatrième ordre). On a ainsi une relation linéaire entre les contraintes et les déformations, ce qui justifie l'appellation matériau linéaire élastique. Le tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  n'est pas tout-à-fait quelconque. On montre en effet qu'il dérive généralement d'un potentiel  $\Phi$  suivant une expression de la forme :

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}$$

Puisque  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  et que l'on peut permuter l'ordre de dérivation, on en tire immédiatement les propriétés de symétrie de ce tenseur :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (11.4)$$

Le tenseur  $\mathbf{C}$  possède donc au plus 21 composantes différentes et éventuellement non nulles (au lieu des 81 composantes d'un tenseur du quatrième ordre quelconque). Il est courant (et parfois utile) d'exprimer sous forme matricielle l'expression 11.3. Cette relation matricielle est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{33} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{36} \\ \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{56} \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{36} & \tilde{C}_{46} & \tilde{C}_{56} & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Dans cette relation matricielle, il y a au plus 21 coefficients différents, tout comme pour le tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  compte tenu de ses symétries. Pour passer de la formulation matricielle 11.5 à la formulation tensorielle 11.3, il suffit de faire les correspondances suivantes. Par exemple, si  $i = j = 1$  dans la relation 11.3, on a :

$$\sigma_{11} = C_{11kl} \gamma_{kl} = C_{1111} \gamma_{11} + C_{1122} \gamma_{22} + C_{1133} \gamma_{33} + 2C_{1112} \gamma_{12} + 2C_{1123} \gamma_{23} + 2C_{1113} \gamma_{13}$$

tandis que la première équation du système matriciel 11.5 s'écrit :

$$\sigma_{11} = \tilde{C}_{11} \gamma_{11} + \tilde{C}_{12} \gamma_{22} + \tilde{C}_{13} \gamma_{33} + 2\tilde{C}_{14} \gamma_{12} + 2\tilde{C}_{15} \gamma_{23} + 2\tilde{C}_{16} \gamma_{13}$$

de sorte que :

$$C_{1111} = \tilde{C}_{11}, \quad C_{1122} = \tilde{C}_{12}, \quad C_{1133} = \tilde{C}_{13}, \quad C_{1112} = \tilde{C}_{14}, \quad C_{1123} = \tilde{C}_{15}, \quad C_{1113} = \tilde{C}_{16}$$

De même, en prenant  $i = j = 2$  dans 11.3 et la deuxième ligne de 11.5, on conclut que :

$$C_{2211} = C_{1122} = \tilde{C}_{12}, \quad C_{2222} = \tilde{C}_{22}, \quad C_{2233} = \tilde{C}_{23}, \quad C_{2212} = \tilde{C}_{24}, \quad C_{2223} = \tilde{C}_{25}, \quad C_{2213} = \tilde{C}_{26}$$

En parcourant chaque ligne du système matriciel et l'équation correspondante 11.3, on trouve la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{1112} & \mathcal{C}_{1123} & \mathcal{C}_{1113} \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{2212} & \mathcal{C}_{2223} & \mathcal{C}_{2213} \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{3333} & \mathcal{C}_{3312} & \mathcal{C}_{3323} & \mathcal{C}_{3313} \\ \mathcal{C}_{1112} & \mathcal{C}_{2212} & \mathcal{C}_{3312} & \mathcal{C}_{1212} & \mathcal{C}_{1223} & \mathcal{C}_{1213} \\ \mathcal{C}_{1123} & \mathcal{C}_{2223} & \mathcal{C}_{3323} & \mathcal{C}_{1223} & \mathcal{C}_{2323} & \mathcal{C}_{2313} \\ \mathcal{C}_{1113} & \mathcal{C}_{2213} & \mathcal{C}_{3313} & \mathcal{C}_{1213} & \mathcal{C}_{2313} & \mathcal{C}_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

Tous les autres coefficients du tenseur  $\mathcal{C}$  sont obtenus par symétrie.

Que ce soit en utilisant la notation matricielle ou tensorielle, la formulation variationnelle devient alors :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv \quad (11.7)$$

Le problème étant d'ordre 2, l'espace de base sera  $H^1(\Omega)$  ou plus précisément  $(H^1(\Omega))^3$  puisque le problème est tridimensionnel. Ce système comporte donc 3 conditions aux limites essentielles à savoir l'imposition des déplacements  $u_i$  sur la frontière ou une partie de celle-ci. Les trois conditions aux limites naturelles correspondantes portent sur le vecteur  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  dit de *contraintes normales*. En un point donné de la frontière, on doit imposer 3 conditions aux limites. Dépendant du problème, on impose soit la composante  $u_i$  du déplacement, soit la composante  $t_i$  du vecteur des contraintes normales, mais jamais les deux en même temps.

**Remarque 11.1.** Le problème variationnel 11.7 est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{w} \in V} J(\mathbf{w}) = \inf_{\mathbf{w} \in V} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w})) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, ds \quad (11.8)$$

où  $V$  est le sous-espace de  $(H^1(\Omega))^3$  des fonctions  $\mathbf{w}$  s'annulant là où on impose des conditions essentielles sur le déplacement  $\mathbf{u}$  ou l'une de ses composantes. Le premier terme correspond à l'énergie élastique de déformation et les deux autres termes correspondent au travail effectué par la charge imposée. ◀

## 11.2 Matériau linéaire élastique isotrope

Un matériau linéaire est dit isotrope s'il ne possède aucune direction privilégiée ou encore s'il est macroscopiquement homogène. En un point donné, ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions. C'est le cas de la plupart des métaux par exemple.

Dans le cas isotrope, le tenseur d'élasticité  $\mathcal{C}$  est défini par :

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \lambda I_{ij} I_{kl} + \mu (I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk}) \quad (11.9)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité ( $I_{ij} = 1$  si  $i = j$ , 0 autrement)<sup>1</sup>. Les paramètres constants  $\lambda$  et  $\mu$  sont

1. On retrouve parfois le deuxième terme sous la forme  $2\mu I_{ik} I_{jl}$  qui est incorrecte car alors le tenseur  $\mathcal{C}$  n'a plus les propriétés de symétrie de la relation 11.4.

les coefficients de Lamé définis par :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (11.10)$$

où  $E$  est le module d'élasticité (ou module d'Young) et  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau. Les unités du module de Young sont des pascals (Pa) tandis que le coefficient de Poisson est adimensionnel de sorte que les unités de  $\mu$  et  $\lambda$  sont aussi des pascals. On trouvera dans le tableau suivant quelques valeurs de ces coefficients pour différents matériaux, incluant des valeurs du module de compressibilité  $k$  dont nous nous servirons plus tard.

Valeurs des coefficients pour des matériaux usuels					
Matériau	$\lambda$ (GPa)	$\mu$ (GPa)	$E$ (GPa)	$\nu$	$k$ (GPa)
Aluminium	60,49	25,93	70	0.35	79
Acier	96,95	76,17	195	0.28	168
Caoutchouc	0,0018			0.5	2.3
Cuivre	130			0.34	139

La relation contraintes-déformations 11.3 prend alors la forme :

$$\sigma_{ij} = (\lambda I_{ij} I_{kl} + \mu(I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk})) \gamma_{kl} = \lambda I_{ij} I_{kl} \gamma_{kl} + \mu I_{ik} I_{jl} \gamma_{kl} + \mu I_{il} I_{jk} \gamma_{kl}$$

Puisque  $I_{kl} \gamma_{kl} = \gamma_{ll} = \text{tr}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) = \nabla \cdot \mathbf{u}$ , on a :

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) I_{ij} + \mu(I_{ik} \gamma_{kj} + I_{il} \gamma_{jl}) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) I_{ij} + \mu(\gamma_{ij} + \gamma_{ji})$$

de sorte que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \left( \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \left( \frac{E}{1 + \nu} \right) \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \quad (11.11)$$

On peut exprimer la relation 11.11 sous forme matricielle. Il est facile de vérifier que pour un matériau isotrope, l'expression 11.5 devient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

où on constate qu'il n'y a que 2 coefficients différents ( $E$  et  $\nu$ ). Pour un matériau donné, on peut déterminer expérimentalement ces coefficients. On vérifie alors facilement que les expressions 11.11 et 11.12 sont équivalentes. Nous utiliserons préférentiellement la notation tensorielle, bien que la formulation matricielle présente aussi certains avantages.

Remplaçant maintenant dans la formulation variationnelle 11.7, on trouve :

$$\int_{\Omega} (\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_{\Gamma} ((\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv$$

ou encore :

$$\int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{w}) + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, ds \quad (11.13)$$

qui est la formulation variationnelle du problème d'élasticité dans le cas d'un matériau isotrope. Dans cette dernière expression, nous avons introduit la condition naturelle sur la contrainte normale aussi appelée traction ou vecteur de traction :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \quad (11.14)$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème 11.13, nous avons besoin d'un résultat préliminaire connu sous le nom d'*inégalité de Korn*.

#### Lemme 11.2: Inégalité de Korn

Si  $\mathbf{w} \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3$ , alors il existe une constante  $C(\Omega)$  telle que :

$$\sum_{i,j=1}^3 \|\gamma_{ij}(\mathbf{w})\|_{0,\Omega}^2 \geq C(\Omega)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^2 = C(\Omega) \left( \|w_1\|_{1,\Omega}^2 + \|w_2\|_{1,\Omega}^2 + \|w_3\|_{1,\Omega}^2 \right) \quad (11.15)$$

**Démonstration** : voir Duvaut-Lions [23].

#### Théorème 11.3: Existence et unicité de la solution

Le problème variationnel 11.13 possède une solution unique dans  $V = (H^1(\Omega))^3$ .

*Démonstration.* Le théorème de Lax-Milgram nous assure de l'existence et de l'unicité de la solution si la forme bilinéaire :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{w}) + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv$$

est coercive sur  $V$ . Or, en utilisant l'inégalité de Korn, on obtient :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{w})^2 + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv \geq \int_{\Omega} 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \geq 2\mu C(\Omega)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^2$$

ce qui termine la démonstration. ■



**Remarque 11.4.** Le problème variationnel 11.13 est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{w} \in V} J(\mathbf{w}) = \inf_{\mathbf{w} \in V} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda (\nabla \cdot \mathbf{w})^2 + 2\mu \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, ds \quad (11.16)$$

où  $V$  est le sous-espace de  $(H^1(\Omega))^3$  des fonction  $\mathbf{w}$  s'annulant là où on impose des conditions essentielles sur le déplacement  $\mathbf{u}$  ou l'une de ses composantes. Le premier terme correspond à l'énergie élastique de déformation et les deux autres termes correspondent au travail effectué par la charge imposée. ◀

### 11.3 Matériau linéaire élastique orthotrope

Un matériau est dit orthotrope s'il possède 2 plans de symétrie de comportement. Beaucoup de matériaux composites sont orthotropes. Le bois en est aussi un exemple. En raison de ces plans de symétrie, on peut montrer que la relation contraintes-déformations est de la forme (matricielle) suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 S} & \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 S} & \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 S} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 S} & \frac{1-\nu_{31}\nu_{13}}{E_1 E_3 S} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 S} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 S} & \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 S} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

où :

$$S = \frac{(1 - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 E_2 E_3}$$

À cela s'ajoutent les conditions suivantes, découlant de la symétrie du tenseur :

$$\frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 S} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 S}, \quad \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 S} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 S}, \quad \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 S} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 S} \quad (11.18)$$

Il y a donc 9 coefficients indépendants à déterminer (expérimentalement) pour ce type de matériau. Les coefficients  $E_i$  sont les modules d'Young dans chaque direction, les  $\nu_{ij}$  sont les coefficients de Poisson alors que les  $G_{ij}$  sont les modules de cisaillement.

**Remarque 11.5.** Les questions d'existence et d'unicité de la solution sont plus délicates pour un matériau anisotrope. Il faut en effet que la matrice symétrique 11.17 soit de plus définie positive. Il est cependant plus facile de travailler avec la relation inverse de l'équation 11.17 qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

L'inverse d'une matrice symétrique étant symétrique, on a :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

relations qui sont équivalentes (et beaucoup plus simples) à celles de l'équation 11.18. Dans un premier temps, une matrice définie positive doit avoir des coefficients diagonaux positifs c.à-d.  $E_i > 0$  et  $G_{ij} > 0$ . De plus, l'un des critères pour que cette matrice soit définie positive est que le déterminant de toutes les sous-matrices principales soit positif. On doit alors imposer que :

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0, \quad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0, \quad 1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0 \quad (11.20)$$

et enfin que le déterminant de la sous-matrice principale 3 par 3 soit positif c.-à-d. que  $S > 0$ . ◀

## 11.4 État plan de contraintes et état plan de déformation

Nous avons présenté le cas général (tridimensionnel) du problème d'élasticité linéaire pour un matériau anisotrope. L'avantage est qu'ainsi, on peut aborder tous les cas. Il existe cependant des situations pour lesquelles, on peut simplifier le problème à deux dimensions. Il faut pour ce faire, déterminer une relation contraintes-déformations qui sera éventuellement différente de l'expression 11.11. Cette nouvelle relation sera ensuite remplacée dans la formulation variationnelle 11.7. Nous nous limiterons de plus au cas orthotrope (comprenant le cas isotrope).

### 11.4.1 État plan de déformation

On considère une section (dans le plan  $x_1x_2$ ) d'un corps élastique (isotrope ou orthotrope) et on suppose que la longueur du corps dans la direction  $x_3$  est grande par rapport aux dimensions de la section. Un exemple typique de cette situation serait un corps cylindrique (de section quelconque) et de grande longueur. On supposera de plus que ce cylindre s'appuie à ses 2 extrémités sur des plans qui préviennent tout déplacement dans la direction  $x_3$ .

Nous pouvons donc supposer que  $u_1 = u_1(x_1, x_2)$  et que  $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ . Nous supposons de plus que les déformations ne se produisent que dans le plan  $x_1x_2$  c.-à-d. que  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = \gamma_{33} = 0$  ou encore :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

ce qui entraîne que  $u_3 = cte$  et donc que  $u_3 = 0$  puisque le corps est fixé aux deux extrémités.

De l'équation 11.17, on tire que  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  mais, par contre,  $\sigma_{33}$  n'est pas nul :

$$\sigma_{33} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2S}\gamma_{11} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2S}\gamma_{22} \quad (11.21)$$

On se retrouve donc avec un problème purement bidimensionnel à résoudre pour les inconnues en déplacement  $u_1$  et  $u_2$ . La relation contraintes-déformations prend la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 S} & \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 S} & 0 \\ \frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 S} & \frac{1-\nu_{31}\nu_{13}}{E_1 E_3 S} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ 2\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

qui, une fois remplacée dans la forme variationnelle 11.7, permet de calculer les déplacements  $u_1$  et  $u_2$ . La contrainte  $\sigma_{33}$  peut ensuite être récupérée par la relation 11.21.

### 11.4.2 État plan de contraintes

Dans ce cas, on considère une plaque mince (d'épaisseur  $h$ ) et on suppose que le plan moyen de cette plaque est dans le plan  $x_1x_2$ . On suppose que les forces volumiques (si elles existent) sont symétriques par rapport au plan moyen et que les éventuelles forces de traction (contrainte normale) au bord de la plaque n'agissent que dans le plan  $x_1x_2$ . Sous ces hypothèses, on peut affirmer que les contraintes agissent uniquement dans le plan  $x_1x_2$  c.-à-d. :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

et que le déplacement  $u_3$  est nul en moyenne sur l'épaisseur de la plaque. On en conclut immédiatement de la relation 11.11 que  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ . De plus, la troisième équation de la relation 11.17 nous donne :

$$0 = \sigma_{33} = \tilde{C}_{31}\gamma_{11} + \tilde{C}_{32}\gamma_{22} + \tilde{C}_{33}\gamma_{33}$$

d'où l'on tire que :

$$\gamma_{33} = \frac{-1}{\tilde{C}_{33}} \left( \tilde{C}_{31}\gamma_{11} + \tilde{C}_{32}\gamma_{22} \right)$$

De la relation 11.17 on tire successivement :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left( \tilde{C}_{11} - \frac{\tilde{C}_{13}\tilde{C}_{31}}{\tilde{C}_{33}} \right) \gamma_{11} + \left( \tilde{C}_{12} - \frac{\tilde{C}_{13}\tilde{C}_{32}}{\tilde{C}_{33}} \right) \gamma_{22} \\ \sigma_{22} &= \left( \tilde{C}_{21} - \frac{\tilde{C}_{23}\tilde{C}_{31}}{\tilde{C}_{33}} \right) \gamma_{11} + \left( \tilde{C}_{22} - \frac{\tilde{C}_{23}\tilde{C}_{32}}{\tilde{C}_{33}} \right) \gamma_{22} \\ \sigma_{12} &= \tilde{C}_{44}\gamma_{12} \end{aligned}$$

Les relations précédentes peuvent être simplifiées à l'aide des conditions de symétrie 11.20. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left( \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \right) \gamma_{11} + \left( \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \right) \gamma_{22} \\ \sigma_{22} &= \left( \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \right) \gamma_{11} + \left( \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \right) \gamma_{22} \\ \sigma_{12} &= 2G_{12}\gamma_{12} \end{aligned}$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ 2\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

qui, dans le cas isotrope devient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ 2\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

## 11.5 Le maillage

Le maillage pour ce type de problèmes n'a rien de particulier. Chaque élément comprendra des noeuds géométriques et des noeuds de calcul. En chaque noeud de calcul, on associe  $d = 3$  degrés de liberté (2 en dimension 2). Les tables de connectivité des noeuds de calcul *connec*, de numérotation des degrés de liberté *numer* et d'adressage *adres* sont construites de la manière habituelle. Par exemple, pour le problème bidimensionnel ( $d = 2$ ) illustré à la figure 11.1, on a construit un maillage très simple de 8 éléments. Ce maillage n'est présenté que pour illustrer une fois de plus les différents tableaux requis. Le problème sera par la suite résolu sur un maillage beaucoup plus fin et même tridimensionnel.

On étudie donc une plaque de longueur  $L = 2$  et de hauteur 1 dont l'extrémité gauche est encadrée. On choisit une interpolation quadratique et une transformation linéaire vers l'élément de référence telle qu'illustrée à la figure 6.7. On a ainsi  $n_g^K = 3$ ,  $n_c^K = 6$ ,  $n_d^K = 12$  (car nous sommes en dimension 2),  $nel = 8$ ,  $nnoeuds = 25$  et  $nddl = 50$ . Seuls les numéros des éléments et des noeuds sont indiqués sur la figure 11.1. La table de coordonnées des noeuds est de dimension  $nnoeuds \times d$ .

Coordonnées des noeuds					
Table <i>coor</i>					
Noeud	Composante $x_1$	Composante $x_2$	Noeud	Composante $x_1$	Composante $x_2$
1	0,00	0,00	16	1,50	0,00
2	0,00	0,25	17	1,50	0,25
3	0,00	0,50	18	1,50	0,50
4	0,00	0,75	19	1,50	0,75
5	0,00	1,00	20	1,50	1,00
6	0,50	0,00	21	2,00	0,00
7	0,50	0,25	22	2,00	0,25
8	0,50	0,50	23	2,00	0,50
9	0,50	0,75	24	2,00	0,75
10	0,50	1,00	25	2,00	1,00
11	1,00	0,00			
12	1,00	0,25			
13	1,00	0,50			
14	1,00	0,75			
15	1,00	1,00			

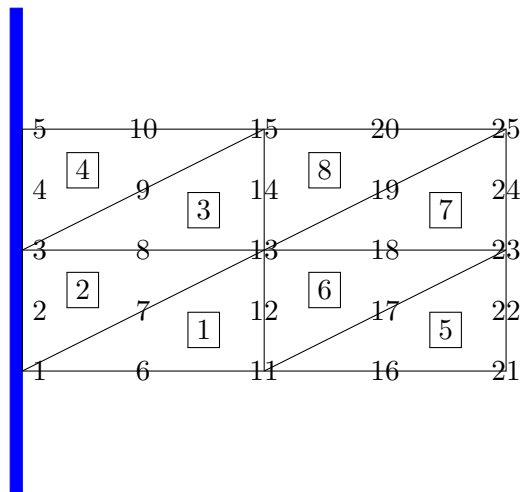


Figure 11.1 – Maillage, numéros d'éléments et numéros noeuds de calcul

La table de connectivité des noeuds est de dimension  $nel \times n_c^K$  et s'écrit :

Noeuds géométriques et de calcul						
Table <i>connec</i>						
Élément	Noeuds géométriques			Autres noeuds		
	Noeud #1	Noeud #2	Noeud #3	Noeud #4	Noeud #5	Noeud #6
1	1	11	13	6	12	7
2	13	3	1	8	2	7
3	3	13	15	8	14	9
4	15	5	3	10	4	9
5	11	21	23	16	22	17
6	23	13	11	18	12	17
7	13	23	25	18	24	19
8	25	15	13	20	14	19

La table de numérotation est de dimension  $nnoeuds \times d$ . Les déplacements des 5 premiers noeuds étant fixés à 0, on omet de les numérotter dans un premier temps, de sorte qu'ils le seront en dernier. Les 2 passages donnent :

Numérotation Table <i>numer</i>					
Noeud	$u_1$	$u_2$	Noeud	$u_1$	$u_2$
1	?	?	16	21	22
2	?	?	17	23	24
3	?	?	18	25	26
4	?	?	19	27	28
5	?	?	20	29	30
6	1	2	21	31	32
7	3	4	22	33	34
8	5	6	23	35	36
9	7	8	24	37	38
10	9	10	25	39	40
11	11	12			
12	13	14			
13	15	16			
14	17	18			
15	19	20			

→

Numérotation Table <i>numer</i>					
Noeud	$u_1$	$u_2$	Noeud	$u_1$	$u_2$
1	41	42	16	21	22
2	43	44	17	23	24
3	45	46	18	25	26
4	47	48	19	27	28
5	49	50	20	29	30
6	1	2	21	31	32
7	3	4	22	33	34
8	5	6	23	35	36
9	7	8	24	37	38
10	9	10	25	39	40
11	11	12			
12	13	14			
13	15	16			
14	17	18			
15	19	20			

Enfin, la table *adres* est de dimension  $nel \times n_d^K$  et devient :

Adressage Table <i>adres</i>												
Élément	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
1	41	11	15	1	13	3	42	12	16	2	14	4
2	15	45	41	5	43	3	16	46	42	6	44	4
3	45	15	19	5	17	7	46	16	20	6	18	8
4	19	49	45	9	47	7	20	50	46	10	48	8
5	11	31	35	21	33	23	12	32	36	22	34	24
6	35	15	11	25	13	23	36	16	12	26	14	24
7	15	35	39	25	37	27	16	36	40	26	38	28
8	39	19	15	29	17	27	40	20	16	30	18	28

Remarquons que pour un élément donné, nous avons numéroté d'abord les degrés de liberté associés à la première composante du déplacement et ensuite ceux associés à la deuxième composante. Cette numérotation est parfaitement arbitraire mais une fois ce choix fait, on doit en tenir compte par la suite et particulièrement au moment du calcul du système élémentaire.

## 11.6 Formulation variationnelle élémentaire

Nous nous concentrerons maintenant sur le cas d'un matériau isotrope, plus facile à présenter. Le cas général anisotrope ne pose aucune difficulté conceptuelle supplémentaire.

La formulation variationnelle élémentaire s'obtient en intégrant non plus sur le domaine  $\Omega$  au complet mais sur l'élément  $K$ . On obtient ainsi :

$$\int_K (\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{w}) + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w})) \, dv = \int_K \mathbf{r}^K \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \mathbf{w} \, ds \quad (11.25)$$

où cette fois  $\mathbf{n}^K$  est le vecteur normal à la frontière de l'élément,  $\mathbf{r}^K$  est tout simplement la restriction à l'élément  $K$  de la fonction  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{t}^K$  est la traction définie par l'équation 11.14 exercée à la frontière de l'élément.

**Remarque 11.6.** Dans le cas d'un matériau anisotrope, la formulation variationnelle élémentaire s'écrit tout simplement :

$$\int_K (\mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv = \int_K \mathbf{r}^K \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \mathbf{w} \, ds$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 associé au matériau considéré ( $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ ). ◀

## 11.7 Construction des fonctions d'interpolation

La construction des fonctions d'interpolation ne pose aucune difficulté supplémentaire dans le cas des systèmes d'équations. Il existe toutefois la possibilité que les différentes variables du système soient discrétisées par des fonctions d'interpolation de degré différent. Ce n'est pas le cas en élasticité linéaire mais ce le sera au prochain chapitre pour le problème de Stokes.

Pour obtenir le système élémentaire, on pose :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_K \simeq \mathbf{u}^K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_d^K} \alpha_j^K \boldsymbol{\Psi}_j^K(\mathbf{x})$$

On remarque la notation quelque peu particulière. En premier lieu, les fonctions tests  $\boldsymbol{\Psi}_j^K(\mathbf{x})$  sont vectorielles. Si on suppose que l'on a  $n_c^K$  noeuds de calcul et donc  $n_d^K = d n_c^K$  degrés de liberté, le vecteur des inconnues élémentaires devient :

$$\alpha^K = \begin{bmatrix} \alpha_1^K \\ \alpha_2^K \\ \vdots \\ \alpha_{n_c^K}^K \\ \hline \alpha_{n_c^K+1}^K \\ \alpha_{n_c^K+2}^K \\ \vdots \\ \alpha_{2n_c^K}^K \\ \hline \alpha_{2n_c^K+1}^K \\ \alpha_{2n_c^K+2}^K \\ \vdots \\ \alpha_{3n_c^K}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1}^K \\ u_{1,2}^K \\ \vdots \\ u_{1,n_c^K}^K \\ \hline u_{2,1}^K \\ u_{2,2}^K \\ \vdots \\ u_{2,n_c^K}^K \\ \hline u_{3,1}^K \\ u_{3,2}^K \\ \vdots \\ u_{3,n_c^K}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^K \\ U_2^K \\ U_3^K \end{bmatrix} \quad (11.26)$$

et contient alors tous les degrés de liberté de l'élément. Tout comme dans la table d'adressage, nous avons numéroté en premier tous les degrés de liberté associés à la première composante du déplacement, ensuite ceux associés à la deuxième composante et ainsi de suite. D'autres numérotations sont bien entendu envisageables.

Si on note  $\psi_j^K$  les  $n_c^K$  fonctions d'interpolation attachées aux  $n_c^K$  noeuds de calcul, on exprime alors les  $3n_c^K$  fonctions tests  $\Psi_j^K$  sous la forme :

$$\Psi^K = \begin{bmatrix} \Psi_1^K \\ \Psi_2^K \\ \vdots \\ \Psi_{n_c^K}^K \\ \hline \Psi_{n_c^K+1}^K \\ \Psi_{n_c^K+2}^K \\ \vdots \\ \Psi_{2n_c^K}^K \\ \hline \Psi_{2n_c^K+1}^K \\ \Psi_{2n_c^K+2}^K \\ \vdots \\ \Psi_{3n_c^K}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\psi_1^K, & 0, & 0) \\ (\psi_2^K, & 0, & 0) \\ \vdots & & \\ (\psi_{n_c^K}^K, & 0, & 0) \\ \hline (0, & \psi_1^K, & 0) \\ (0, & \psi_2^K, & 0) \\ \vdots & & \\ (0, & \psi_{n_c^K}^K, & 0) \\ \hline (0, & 0, & \psi_1^K) \\ (0, & 0, & \psi_2^K) \\ \vdots & & \\ (0, & 0, & \psi_{n_c^K}^K) \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

de sorte que :

$$\sum_{j=1}^{n_d^K} \alpha_j^K \Psi_j^K(\mathbf{x}) = \left( \sum_{j=1}^{n_c^K} u_{1,j}^K \psi_j^K(\mathbf{x}), \sum_{j=1}^{n_c^K} u_{2,j}^K \psi_j^K(\mathbf{x}), \sum_{j=1}^{n_c^K} u_{3,j}^K \psi_j^K(\mathbf{x}) \right) = (u_1^K(\mathbf{x}), u_2^K(\mathbf{x}), u_3^K(\mathbf{x}))$$

On obtient alors le *système élémentaire* de dimension  $n_d^K$  suivant :

$$A^K \alpha^K = F^K + S^K \quad (11.28)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_K (\lambda(\nabla \cdot \Psi_j^K)(\nabla \cdot \Psi_i^K) + 2\mu \boldsymbol{\gamma}(\Psi_j^K) : \boldsymbol{\gamma}(\Psi_i^K)) \, dv \\ f_i^K &= \int_K \mathbf{r}^K \cdot \Psi_i^K \, dv \\ s_i^K &= \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \Psi_i^K \, ds \end{aligned}$$

Le calcul du système élémentaire se divise naturellement en plusieurs blocs (de dimension  $n_c$ ), selon la forme particulière des fonctions tests  $\Psi_i^K$  et  $\Psi_j^K$ . On peut en effet décomposer le système sous



la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{11}^K & A_{12}^K & A_{13}^K \\ A_{21}^K & A_{22}^K & A_{23}^K \\ A_{31}^K & A_{32}^K & A_{33}^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^K \\ U_2^K \\ U_3^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^K \\ F_2^K \\ F_3^K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1^K \\ S_2^K \\ S_3^K \end{bmatrix}$$

Les matrices  $A_{ij}^K$  sont de dimension  $n_c^K$  par  $n_c^K$ . Par exemple, la matrice  $A_{11}^K$  fait intervenir les fonctions  $(\psi_j^K, 0, 0)$  et  $(\psi_i^K, 0, 0)$  de sorte que :

$$(A_{11}^K)_{ij} = \int_K \left( \lambda \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_1} + 2\mu \left( \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_3} \right) \right) dv$$

De même :

$$(A_{12}^K)_{ij} = \int_K \left( \lambda \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_1} + \mu \left( \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_2} \right) \right) dv = (A_{21}^K)_{ji}$$

$$(A_{13}^K)_{ij} = \int_K \left( \lambda \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_1} + \mu \left( \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_3} \right) \right) dv = (A_{31}^K)_{ji}$$

$$(A_{22}^K)_{ij} = \int_K \left( \lambda \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_2} + 2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_3} \right) \right) dv$$

$$(A_{23}^K)_{ij} = \int_K \left( \lambda \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_3} \right) \right) dv = (A_{32}^K)_{ji}$$

$$(A_{33}^K)_{ij} = \int_K \left( \lambda \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_3} + 2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_i^K}{\partial x_3} \right) \right) dv$$

et enfin :

$$(F_1^K)_i = \int_K r_1^K \psi_i^K dv, \quad (S_1^K)_i = \int_{\partial K} t_1^K \psi_i^K ds$$

$$(F_2^K)_i = \int_K r_2^K \psi_i^K dv, \quad (S_2^K)_i = \int_{\partial K} t_2^K \psi_i^K ds$$

$$(F_3^K)_i = \int_K r_3^K \psi_i^K dv, \quad (S_3^K)_i = \int_{\partial K} t_3^K \psi_i^K ds$$

## 11.8 Passage à l'élément de référence

Le calcul de tous ces termes est une fois de plus effectué après le passage à l'élément de référence. Cela suppose *a priori* le choix d'un type d'éléments : triangles, quadrilatères, tétraèdres, etc. Le choix du type d'éléments détermine, comme au chapitre 6 une transformation  $T^K$  vérifiant :

$$T^K(\xi_i) = \mathbf{x}_i^K \quad \text{ou inversement} \quad (T^K)^{-1}(\mathbf{x}_i^K) = \xi_i$$

pour chacun des  $n_g^K$  noeuds géométriques de l'élément. On transforme les dérivées partielles de la manière habituelle à l'aide de la relation 6.6. On obtient ainsi par exemple :

$$\frac{\partial \psi_j^K}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} B_{11}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} B_{12}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} B_{13}^K$$

Rappelons que la matrice  $B^K$  et la matrice jacobienne  $DT^K$  sont reliées par l'équation  $B^K = (DT^K)^{-t}$ . Le système élémentaire devient alors :

$$\begin{aligned} (A_{11}^K)_{ij} &= \int_{\hat{K}} \left[ (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} B_{11}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} B_{12}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} B_{13}^K \right) \left( \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} B_{11}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} B_{12}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \zeta} B_{13}^K \right) \right. \\ &+ \mu \left( \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} B_{21}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} B_{22}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} B_{23}^K \right) \left( \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} B_{21}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} B_{22}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \zeta} B_{23}^K \right) \\ &\left. + \mu \left( \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} B_{31}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} B_{32}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} B_{33}^K \right) \left( \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} B_{31}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} B_{32}^K + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \zeta} B_{33}^K \right) \right] J^K d\hat{v} \end{aligned} \quad (11.29)$$

et des expressions similaires pour les autres coefficients. Malgré l'aspect rébarbatif de ces expressions, il faut se rappeler que toutes les dérivées partielles ne sont évaluées qu'une seule fois (aux points d'intégration). C'est l'avantage de la technique du passage à l'élément de référence. Les coefficients  $B_{ij}^K$  dépendent de l'élément mais ne représentent pas un effort de calcul considérable.

## 11.9 Évaluation du système élémentaire

Ici encore, l'intégration numérique sera le plus souvent utilisée. La diversité des expressions à intégrer de même que leur complexité rendent très important le choix de la formule de quadrature. Dans la mesure du possible on choisira le nombre de points d'intégrations de sorte que le système élémentaire soit intégré exactement. Malheureusement ce n'est pas toujours possible. Il faut aussi s'attendre à ce que cette étape soit plus coûteuse qu'auparavant en raison du nombre plus élevé d'intégrales à évaluer et du plus grand nombre de points d'intégration nécessaires pour les évaluer convenablement.

Supposons par exemple que l'on choisisse une interpolation quadratique sur des tétraèdres et une transformation géométrique linéaire (illustrée à la figure 6.6) vers l'élément de référence. Les fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}_i(\xi)$  sont quadratiques et le jacobien  $J^K$  est constant par élément. Si on regarde l'expression 11.29, on constate que puisque les coefficients  $B_{ij}^K$  sont également constants par élément et que les dérivées partielles des fonctions d'interpolation sont linéaires, l'intégrand est de degré maximum 2. La table C.3 nous indique alors qu'une formule de Hammer à 4 points serait suffisante pour évaluer la matrice élémentaire.

Une nouvelle analyse est nécessaire pour choisir la formule de quadrature pour le terme de droite qui dépend d'une fonction  $\mathbf{r}$ .

## 11.10 Assemblage et imposition des conditions aux limites

On assemble le système global exactement comme dans les chapitres précédents. Les systèmes élémentaires sont de taille plus imposantes mais la technique reste la même. Le système linéaire global résultant pourra, surtout dans le cas tridimensionnel, devenir impressionnant et même dans certains cas, prohibitif en raison de l'espace-mémoire nécessaire.

Pour imposer les conditions aux limites, on applique la technique déjà connue en se rapportant aux équations 5.20 et 5.21.

## 11.11 Résolution du système global

On se retrouve encore avec un système de la forme 5.19. Ici encore, la seule différence réside dans la taille des systèmes linéaires obtenus. Si pour la majorité des problèmes bidimensionnels, on peut utiliser une décomposition  $LU$  avec un stockage bien avisé de la matrice, ce n'est plus le cas en dimension 3. On doit alors avoir recours aux méthodes itératives de résolution qui favorisent un stockage plus efficace de la matrice. Les méthodes itératives sont cependant encore peu utilisées en pratique malgré des avantages indéniables.

Une analyse similaire à celle menant à l'équation 6.17 nous permettrait de montrer qu'en chaque noeud  $i$  de la frontière où une condition de Dirichlet est imposée sur le vecteur  $\mathbf{u}$ , il y a un vecteur de réaction nodale qui vaut :

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{t} \phi_i ds$$

où  $\phi_i$  est la fonction de Ritz au noeud  $i$ . C'est le vecteur de réaction nodale à ce noeud. Ces quantités sont inconnues et se retrouvent dans le vecteur  $S^I$ . C'est d'ailleurs des problèmes d'élasticité que la terminologie *réaction nodale* tire son origine.

## 11.12 Visualisation des résultats

La visualisation d'une solution numérique n'est pas du tout une mince tâche, particulièrement dans le cas tridimensionnel. On a recours à des logiciels spécialisés comme  $VU$  [47].

## 11.13 Applications

### 11.13.1 Essai en cisaillement

Nous considérerons le problème d'une poutre fixée à son extrémité gauche. On impose un cisaillement sur la face droite de la tige c'est-à-dire  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (0, -\sigma_0, 0)$ . On a construit le maillage tridimensionnel de la figure 11.2 consistant en 1332 éléments tétraédriques quadratiques pour un total de 3663 degrés de liberté. On remarque immédiatement que pour un problème tridimensionnel, le nombre de degrés de liberté augmente très rapidement.

La figure 11.2 montre également clairement la déformation due au cisaillement imposé ( $E = 1000$ ,  $\mu = 0,3$  et  $\sigma_0 = 1$ ). On y a déformé la géométrie d'une quantité proportionnelle au déplacement calculé  $(u_1, u_2, u_3)$ .

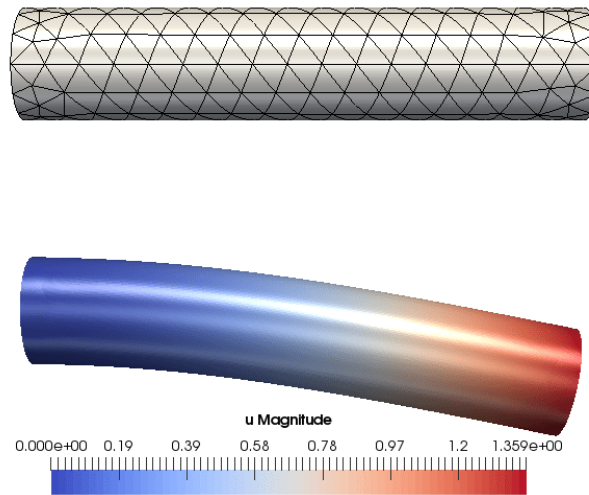


Figure 11.2 – Maillage et déformation en cisaillement

### 11.13.2 Plaque trouée en élongation

On considère la plaque trouée illustrée à la figure 11.3 que l'on va étirer dans chaque direction. Les dimensions de la plaque sont les suivantes :  $-5 \leq x \leq 5$  et  $-2 \leq y \leq 2$  et le trou est de rayon 1 et centré en  $(0, 0)$ . On fait l'hypothèse de déformation plane. Sur le côté gauche de la plaque ( $x = -5$ ), on impose un déplacement de la forme  $\mathbf{u} = (-1, 0)$  tandis que de l'autre côté ( $x = 5$ ), on impose  $\mathbf{u} = (1, 0)$ . Ce déplacement est sans doute excessif pour un problème en petites déformations mais il nous permettra quand même d'illustrer ce qui peut se produire. Aucune traction ( $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) n'est imposée sur les parois supérieures et inférieures, de même que sur la paroi du trou (le cercle).

Pour effectuer les simulations nous avons utilisé un élément triangulaire quadratique illustré à la figure 6.3. Pour fixer les idées, on a posé  $E = 1$ . De manière à bien illustrer la faiblesse de la formulation en déplacement seulement (par rapport à la formulation mixte que nous verrons au chapitre 13), nous présentons à la figure 11.4 et les déplacements correspondants pour trois valeurs de  $\nu$  soit 0,3, 0,4 et 0,499. Sur la figure, nous avons simplement ajouté le déplacement calculé à chaque noeud du maillage. On peut ainsi bien visualiser la déformation. Le dernier cas est donc près de la limite incompressible ( $\nu = 0,5$ ). On ne voit rien de particulier même pour  $\nu = 0,4999$ .

Par contre, si on regarde la contrainte  $\sigma_{11}$  à la figure 11.5, on constate que les résultats présentent des oscillations de plus en plus fortes lorsque l'on s'approche de  $\nu = 0,5$ . On voit en fait une évolution brusque des valeurs maximales de  $\sigma_{11}$  pour  $\nu = 0,4999$ . Le cas ultime ( $\nu = 0,4999999$ ) est à son tour présenté à la figure 11.6. Les valeurs maximales des contraintes sont passées à l'ordre de la centaine alors que l'on s'attend à ce qu'elles soient de l'ordre de l'unité. Nous avons justement illustré les mêmes contraintes en limitant l'échelle maximale à l'unité, ce qui fait ressortir les oscillations qui ne sont pas physiques mais de nature purement numériques. On verra au chapitre 13 qu'une méthode mixte appropriée, similaire à celles vus pour le problème de Stokes, permet de contourner

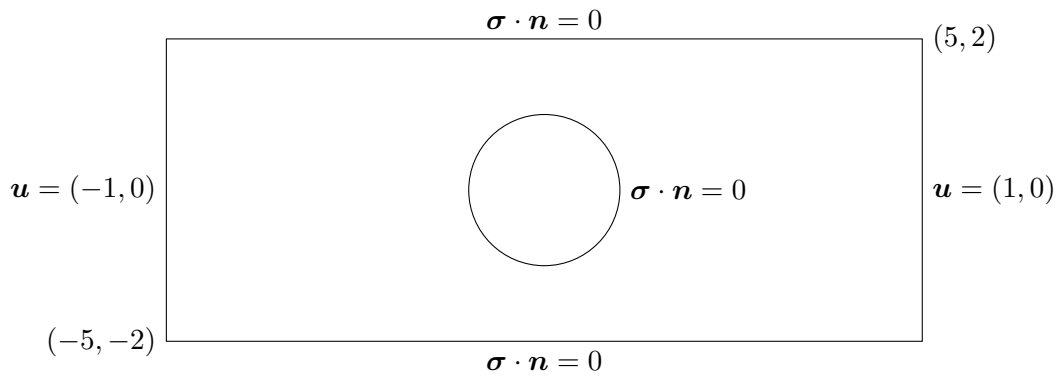


Figure 11.3 – Plaque trouée : géométrie et conditions aux limites

avantageusement cette difficulté et d'éliminer complètement ces oscillations parasites.

Notons enfin que la déformation calculée est certainement non physique. Pour un problème en élasticité linéaire, la déformation du domaine de calcul devrait être minime, ce qui est loin d'être le cas ici. Rappelons que nous avons négligé cette déformation dans notre formulation du problème puisque la formulation variationnelle est définie sur le domaine non déformé  $\Omega$ . Ce ne sera plus le cas au chapitre 14 où les déformations seront plus importantes et ne pourront pas être négligées.

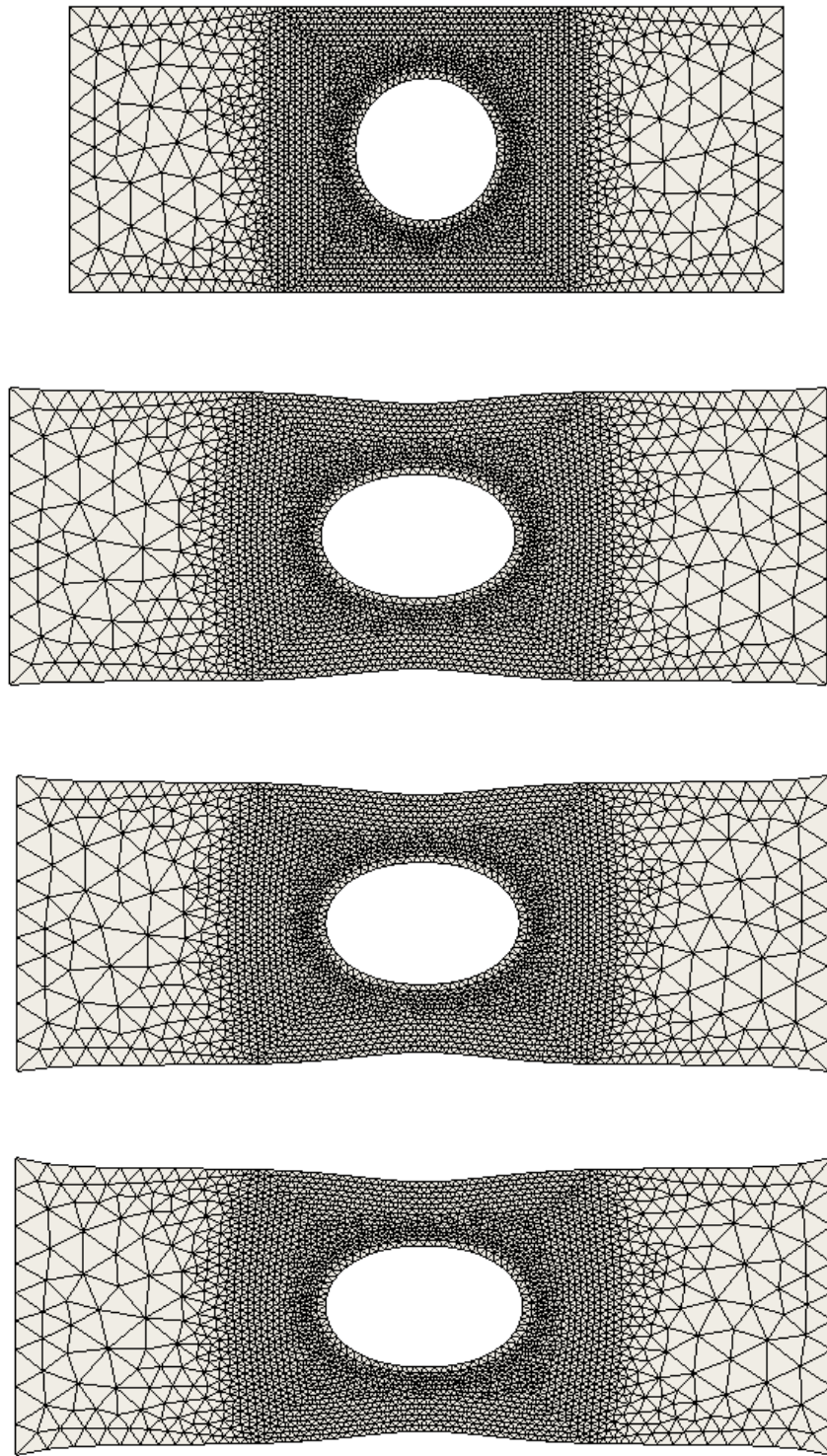


Figure 11.4 – Maillages initial et déformés pour  $\nu = 0,3$ ,  $\nu = 0,4$  et  $\nu = 0,4999$

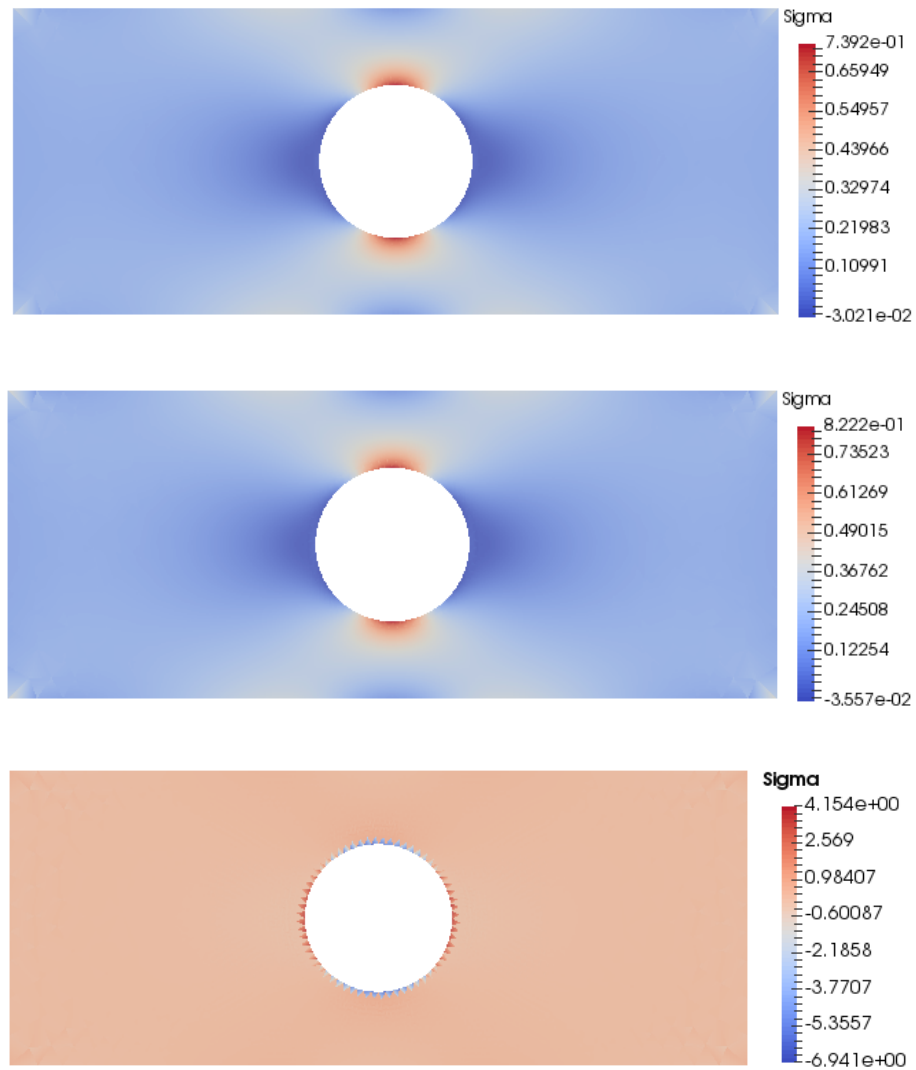


Figure 11.5 – Contraintes  $\sigma_{11}$  pour  $\nu = 0,3$ ,  $\nu = 0,4$  et  $\nu = 0,4999$

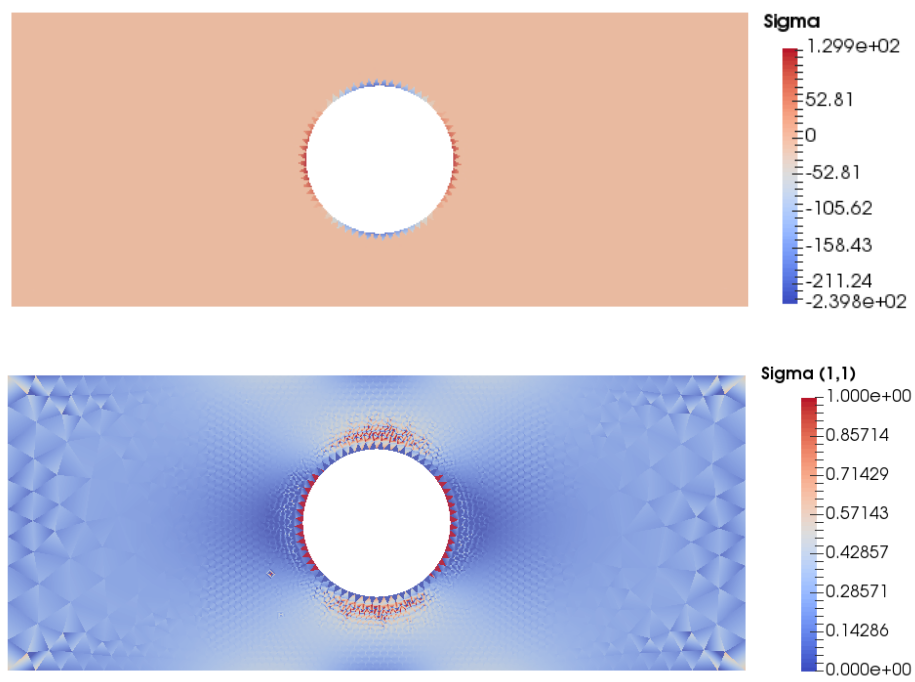


Figure 11.6 – Contrainte  $\sigma_{11}$  pour  $\nu = 0,499\,999\,99$



### 11.14 Exercices

1. Montrer que  $\text{tr}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) = \nabla \cdot \mathbf{u}$ .
2. Montrer que si  $C_{ijkl} = \lambda I_{ij} I_{kl} + \mu(I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk})$ , alors

$$\mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$$

3. Pour un problème d'élasticité linéaire en formulation mixte, la condition naturelle est  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  où :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - p\mathbf{I}$$

Si on suppose maintenant que nous avons une paroi verticale pour un problème bidimensionnel, donner l'expression de la condition naturelle  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  sur cette paroi.



## Chapitre 12

# Problème de Stokes

### 12.1 Introduction

Le problème de « Stokes » est au coeur de la simulation numérique en mécanique des fluides. Une bonne compréhension des difficultés liées à sa discrétisation par la méthode des éléments finis ouvre la voie à toute une panoplie d'applications. Cela va des écoulements de fluides fortement visqueux avec des applications notamment à la mise en forme des polymères, aux fluides peu visqueux que nous modéliserons à l'aide des équations de Navier-Stokes pour étudier des applications en hydraulique par exemple.

Introduisons en premier lieu un peu de notation. On note  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur de contraintes de Cauchy que l'on peut par la suite écrire comme une somme de différentes contributions :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

où  $p$  est la pression et  $\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur des extra-contraintes. L'équation d'équilibre s'écrit encore ici :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}$$

où  $\mathbf{r}$  est un vecteur de forces volumiques supposé connu. En tout point du domaine de calcul, nous chercherons à déterminer le champ de vitesse  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  de même que la pression  $p$ . Nous nous intéressons en particulier au cas des fluides incompressibles pour lesquels la conservation de la masse impose que :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Pour fermer le système, il reste à établir une relation entre le tenseur des extra-contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  et le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  ou plus précisément le tenseur de taux de déformation  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$ . Cette relation, dite *loi de comportement*, dépend de la nature du fluide considéré. Le premier cas (et aussi le plus simple) concerne les fluides dits *newtoniens* pour lesquels la loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) \tag{12.1}$$

où  $\eta$  est la viscosité du fluide que l'on suppose constante. On note  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$  le tenseur de taux de

déformation défini par :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Notons la différence entre le tenseur de taux de déformation  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$  (portant sur un champ de vitesses) et le tenseur de déformation  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$  du chapitre précédent qui portait sur un champ de déplacement. Le tenseur de déformation n'a pas d'unités tandis que celles du tenseur de taux de déformation sont des  $s^{-1}$ . L'écriture des 2 tenseurs est cependant identique.

Les fluides newtoniens sont donc caractérisés par une viscosité constante, ce qui convient dans certaines applications mais pas du tout dans d'autres. On vérifie en effet facilement que la viscosité de bon nombre de fluides n'est pas constante mais varie avec le cisaillement (et la température). Plus précisément, plus un fluide est cisailé (par exemple entre 2 plaques en mouvement l'une par rapport à l'autre), plus la viscosité diminue. On doit également ajouter une forte dépendance de la viscosité en fonction de la température. Les automobilistes savent bien que l'huile à moteur est beaucoup plus visqueuse lorsque le moteur est froid que lorsqu'il est chaud. Dans un premier temps, nous ne nous intéresserons qu'au cas où la viscosité est constante. Nous reviendrons sur un cas plus général à la section 12.8.

## 12.2 Le problème continu

La simulation numérique des procédés de mise en forme des matériaux nous amène à étudier de manière approfondie les méthodes d'éléments finis pour le problème de Stokes qui régit l'écoulement des fluides à forte viscosité. C'est bien sûr le cas des polymères. Rappelons la forme générale des équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \mathbf{r} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (12.2)$$

De la relation 12.1, on a :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (2\eta\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) = \mathbf{r} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (12.3)$$

auquelles il faut ajouter des conditions aux limites appropriées. La résolution par la méthode des éléments finis nécessite l'obtention d'une formulation variationnelle du problème. On multiplie ces deux équations respectivement par des fonctions test  $\mathbf{w} \in V$  et  $q \in Q$  où  $V$  et  $Q$  sont des espaces

fonctionnels appropriés qu'il n'est pas nécessaire de spécifier pour le moment. On intègre ensuite par parties sur le domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  et on obtient ainsi  $\forall \mathbf{w} \in V$  et  $\forall q \in Q$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (2\eta\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) - p\nabla \cdot \mathbf{w}) \, dv &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\Gamma} ((-p\mathbf{I} + 2\eta\dot{\gamma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \\ \int_{\Omega} q\nabla \cdot \mathbf{u} \, dv &= 0 \end{aligned} \tag{12.4}$$

Un coup d'oeil au terme de bord fait ressortir deux types de conditions aux limites. De façon naturelle, c'est-à-dire par intégration par parties, on a fait apparaître sur la frontière  $\Gamma$  l'expression  $(-p\mathbf{I} + 2\eta\dot{\gamma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$  qui devient ainsi la *condition naturelle* du problème. On reconnaît le vecteur de traction déjà rencontré, bien que son interprétation et ses unités soient différentes. Le terme  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  représente en fait le *vecteur de traction* ou plus simplement la traction (force par unité de surface). L'imposition de la traction est en dualité avec la *condition essentielle* qui porte sur les composantes de  $\mathbf{u}$ . Les conditions aux limites que l'on peut imposer sont donc :

- toutes les composantes de vitesse :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  pour  $\mathbf{u}_0$  donné ;
- toutes les composantes de la contrainte normale :  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$  pour  $\mathbf{t}$  donné ;
- des conditions mixtes comme par exemple :  $u_1 = u_1^0$  de même que les deuxième et troisième composantes de la contrainte normale  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_2 = t_2$  et  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_3 = t_3$  ;
- toute autre combinaison des composantes de vitesse  $u_i$  et des composantes de la contrainte normale  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_j$ , pourvu que  $i$  soit différent de  $j$ .

Comme toujours, on n'impose jamais une condition essentielle ( $u_j$ ) et une condition naturelle ( $t_j$ ) sur une même partie de la frontière. Notons enfin qu'il n'y a pas de condition essentielle sur la pression  $p$ . On ne peut imposer une pression (ou un gradient de pression) que par le biais de la condition naturelle.

Sur la partie  $\Gamma_0$  de la frontière  $\Gamma$  où le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  (ou l'une de ses composantes  $u_i$ ) est connu, on a une condition essentielle et la fonction test  $\mathbf{w}$  (ou sa composante  $w_i$ ) s'annule sur cette partie de la frontière. Par contre, sur le complément  $\Gamma_1$  de  $\Gamma_0$ , on doit connaître la condition naturelle  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$  et les fonctions test  $\mathbf{w}$  ne doivent pas toutes s'y annuler. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (2\eta\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) - p\nabla \cdot \mathbf{w}) \, dv &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in V \\ \int_{\Omega} q\nabla \cdot \mathbf{u} \, dv &= 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned} \tag{12.5}$$

Nous supposerons par la suite des conditions essentielles homogènes ( $\mathbf{u} = \mathbf{w} = 0$ ) partout sur la frontière  $\Gamma$ , le cas inhomogène ne posant aucune difficulté supplémentaire puisqu'il est possible d'effectuer un relèvement de la condition essentielle. Il en résulte un problème plus simple mais dont la généralité nous permettra d'aborder facilement les cas plus complexes. Par exemple, le cas des fluides viscoplastiques se traite de manière similaire, bien que dans ce cas, le problème soit non linéaire. Le problème consiste donc à trouver  $\mathbf{u} \in V$  et  $p \in Q$  ( $V$  et  $Q$  seront précisés plus loin) tels

que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_{\Omega} p\nabla \cdot \mathbf{w} \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv & \forall \mathbf{w} \in V \\ \int_{\Omega} q\nabla \cdot \mathbf{u} \, dv = 0 & \forall q \in Q \end{cases} \quad (12.6)$$

On a introduit un signe négatif dans la deuxième équation pour des raisons de symétrie. On introduit maintenant les formes bilinéaires  $a$  et  $b$  définies respectivement sur  $V \times V$  et  $V \times Q$  de sorte qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) = (\mathbf{r}, \mathbf{w}) & \forall \mathbf{w} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in Q \end{cases} \quad (12.7)$$

### 12.2.1 Cadre fonctionnel

L'analyse numérique du système 12.6 (ou 12.7) est relativement complexe. Tout d'abord, les espaces fonctionnels sont  $V = (H_0^1(\Omega))^d$  ( $d$  étant la dimension d'espace) et  $Q = L^2(\Omega)$ , l'ensemble des fonctions de carré sommable. La forme bilinéaire  $b$  définit implicitement deux applications linéaires. La première, que nous noterons  $B$ , est définie sur  $V$  à valeur dans  $Q'$ , le dual de  $Q$  :

$$\begin{aligned} B : V &\longrightarrow Q' \\ \mathbf{w} &\longrightarrow B\mathbf{w} \end{aligned}$$

En effet, il suffit de poser :

$$\langle B\mathbf{w}, q \rangle = b(\mathbf{w}, q) = - \int_{\Omega} q\nabla \cdot \mathbf{w} \, dv \quad \forall q \in Q$$

et on vérifie facilement (voir les exercices de fin de chapitre) qu'il s'agit bien d'une forme linéaire continue sur  $Q$ . On peut aussi définir le noyau de  $B$  (noté  $\ker B$ ) par :

$$\begin{aligned} \ker B &= \{ \mathbf{w} \in V \mid B\mathbf{w} = 0 \} \\ &= \{ \mathbf{w} \in V \mid \langle B\mathbf{w}, q \rangle = b(\mathbf{w}, q) = 0 \quad \forall q \in Q \} \\ &= \left\{ \mathbf{w} \in (H_0^1(\Omega))^d \mid - \int_{\Omega} q\nabla \cdot \mathbf{w} \, dv = 0 \quad \forall q \in Q \right\} \\ &= \{ \mathbf{w} \in (H_0^1(\Omega))^d \mid \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \} \end{aligned}$$

**Remarque 12.1.** Si  $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^d$ , on remarque que  $\nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$  et que la deuxième équation du système 12.6 est parfaitement équivalente à imposer  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . ◀

On peut définir une deuxième application linéaire, cette fois de  $Q$  à valeur dans  $V'$ , dual de  $V$ , que nous noterons  $B^T$  et qui est définie par :

$$\begin{aligned} B^T : Q &\longrightarrow V' \\ q &\longrightarrow B^T q \end{aligned}$$

Comme précédemment, on pose :

$$\langle \mathbf{w}, B^T q \rangle = b(\mathbf{w}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv \quad \forall \mathbf{w} \in V$$

Il est alors évident que :

$$\langle B\mathbf{w}, q \rangle = \langle \mathbf{w}, B^T q \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in V, \forall q \in Q$$

De même, on pose :

$$\begin{aligned} \ker B^T &= \{q \in Q \mid B^T q = 0\} \\ &= \{q \in Q \mid \langle \mathbf{w}, B^T q \rangle = b(\mathbf{w}, q) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V\} \\ &= \left\{q \in Q \mid - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in (H_0^1(\Omega))^d\right\} \end{aligned}$$

En intégrant par parties (puisque les fonctions de  $(H_0^1(\Omega))^d$  s'annulent au bord), on a :

$$\ker B^T = \{q \in Q \mid \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{w} \, dv = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in (H_0^1(\Omega))^d\}$$

ce qui entraîne que  $\nabla q = 0$  et donc que  $\ker B^T$  est constitué des fonctions constantes sur  $\Omega$ .

### 12.2.2 Existence et unicité

Les théorèmes qui suivent, et que nous ne démontrerons pas, sont d'une grande importance théorique.

#### Théorème 12.2: Existence et unicité du problème continu

Sous les conditions suivantes :

- Les formes bilinéaires  $a$  et  $b$  sont continues respectivement sur  $V \times V$  et  $V \times Q$ ;
- La forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $\ker B$  c.-à-d. :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \alpha \|\mathbf{w}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{w} \in \ker B \tag{12.8}$$

- Il existe une constante positive  $\beta$  telle que la forme bilinéaire  $b$  vérifie :

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{w} \in V} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|q\|_Q \|\mathbf{w}\|_V} \geq \beta \tag{12.9}$$

alors la solution  $(\mathbf{u}, p)$  du problème de Stokes 12.6 (ou 12.7) est unique dans  $V \times Q / \ker B^T$ .

*Démonstration.* Voir Brezzi-Fortin [11]. ■

La condition de coercivité 12.8 découle encore une fois de l'inégalité de Korn 11.15. La forme bilinéaire  $a$  est même coercive sur tout l'espace  $V$  et pas seulement sur le noyau. On peut aussi montrer que l'inégalité 12.9 est bien vérifiée. On remarque cependant que la pression n'est déterminée qu'à une fonction de  $\ker B^T$  près c'est-à-dire à une constante près, d'où la notation  $Q/\ker B^T$ . Pour s'en convaincre, il suffit de revenir au problème initial 12.2 et de remarquer qu'on peut remplacer  $p$  par  $p + c$  sans rien changer. Ceci n'est par contre vrai que dans le cas de conditions essentielles (sur  $\mathbf{u}$ ) imposées partout sur la frontière. En effet, si on impose une condition naturelle, la pression  $p$  apparaissant explicitement dans  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ , elle n'est plus déterminée à une constante près.

### 12.3 Le problème discret

La discrétisation par éléments finis du problème de Stokes suit les étapes habituelles. On approxime  $(\mathbf{u}, p)$  par des fonctions  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ . Les sous-espaces  $V_h$  de  $V$  et  $Q_h$  de  $Q$  sont de dimension finie et seront déterminés plus précisément plus loin. Le problème discrétisé s'écrit alors :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{w}_h, p_h) &= (\mathbf{r}, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned} \tag{12.10}$$

La condition d'incompressibilité discrétisée s'écrit maintenant :

$$-\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h \, dv = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

et n'est pas équivalente à  $\nabla \cdot \mathbf{w}_h = 0$ . Pour que l'on puisse conclure que  $\nabla \cdot \mathbf{w}_h = 0$ , il faudrait que  $q_h$  parcourt tout l'espace  $Q$  et pas seulement un sous-espace  $Q_h$ . Comme dans le cas continu, on peut définir :

$$\ker B_h = \left\{ \mathbf{w}_h \in V_h \mid -\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h \, dv = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \right\}$$

De même, si on pose :

$$\ker B_h^T = \left\{ q_h \in Q_h \mid -\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h \, dv = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h \right\}$$

on peut construire, pour certains choix d'espaces  $V_h$  et  $Q_h$  des fonctions de  $\ker B_h^T$  qui ne sont pas constantes sur  $\Omega$  et qui peuvent altérer la solution numérique (voir les exercices de fin de chapitre). C'est le cas par exemple des pressions dites en damier (« checkerboard pressure » en anglais) que l'on retrouve dans certains cas. Il en résulte que le choix des espaces  $V_h$  et  $Q_h$  est assez délicat.

Les résultats qui suivent, que nous ne démontrerons pas, ont une grande importance théorique et pratique. Nous nous efforcerons d'illustrer ces résultats et d'en approfondir la compréhension au moyen de quelques exemples simples.

#### Théorème 12.3: Existence et unicité du problème discret

Sous les conditions suivantes :



— la forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $\ker B_h$  :

$$a(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h) \geq \alpha \|\mathbf{w}_h\|_V^2 \quad \forall \mathbf{w}_h \in \ker B_h$$

— la forme bilinéaire  $b$  vérifie :

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{w}_h, q_h)}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{w}_h\|_V} \geq \beta_h \tag{12.11}$$

alors la solution  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  du problème de Stokes discret 12.10 est unique dans  $V_h \times Q_h / \ker B_h^T$ .

*Démonstration.* Voir Brezzi-Fortin [11]. ■

Ici encore, on peut montrer que les 2 conditions sont bien vérifiées et ce, quel que soit le choix des espaces de discrétisation  $V_h$  et  $Q_h$ . La condition 12.11 est en fait équivalente à affirmer que l'image de  $B_h$  est fermée, ce qui est toujours le cas en dimension finie. Il est aussi primordial que  $\ker B_h^T \subset \ker B^T$  car autrement, la pression ne sera plus déterminée à une constante près et risque d'être perturbée par la présence des éléments supplémentaires contenus dans le noyau de  $B_h^T$ .

Un autre problème provient de la constante  $\beta_h$  présente dans la condition 12.11 et qui peut dépendre de  $h$ . Cette constante se retrouve, comme nous le verrons à la prochaine section, dans la borne d'erreur de sorte que l'on peut perdre la convergence de la solution discrète vers la solution continue. Pour éviter ce problème, on doit montrer que

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{w}_h, q_h)}{\|q_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta_0 > 0 \tag{12.12}$$

où la constante  $\beta_0$  est cette fois indépendante de  $h$ . C'est la condition de Brezzi-Babūška dite parfois condition *inf-sup*.

**Théorème 12.4: Convergence**

Sous les hypothèses d'existence et d'unicité des solutions  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  des problèmes de Stokes continu et discret et si la condition de Brezzi-Babūška 12.12 est vérifiée, alors :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left[ \inf_{\mathbf{w}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \right] \tag{12.13}$$

*Démonstration.* Voir Brezzi-Fortin [11]. ■

**Remarque 12.5.** La constante  $C$  apparaissant dans le théorème précédent dépend entre autres choses de  $1/\alpha$  et de  $1/\beta_0$  d'où l'importance que cette dernière constante ne dépende pas de  $h$ . C'est pourquoi, bien que la condition 12.11 soit toujours vérifiée, on n'a pas toujours convergence vers la solution exacte et le théorème 12.13 n'est valide que si la condition *inf-sup* 12.12 est vraie pour  $\beta_0$  indépendant de  $h$ . ◀

**Théorème 12.6: Ordre de convergence**

Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent et si de plus le sous-espace  $V_h$  contient les polynômes de degré  $k$  et le sous-espace  $Q_h$  contient les polynômes de degré  $(k-1)$ , alors :

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{1,\Omega} + \| p - p_h \|_{0,\Omega} \leq Ch^k (\| \mathbf{u} \|_{k+1,\Omega} + \| p \|_{k,\Omega}) \quad (12.14)$$

*Démonstration.* Voir Brezzi-Fortin [11]. ■

**Remarque 12.7.** Il est important de remarquer qu'il ne suffit pas de prendre des polynômes de degré  $k$  pour la vitesse et de degré  $k-1$  pour la pression pour avoir une discrétisation convergente, comme cela est parfois présenté dans la littérature. La condition Brezzi-Babūška 12.12 doit aussi être vérifiée. ◀

**Remarque 12.8.** La transformation géométrique  $F^K$  de l'élément de référence  $\hat{K}$  vers  $K$  joue un rôle important pour déterminer si un espace  $V_h$  contient ou non les polynômes de degré  $k$ . ... ◀

## 12.4 Formulation point-selle (facultative)

Cette section présente comment on peut interpréter le système de Stokes comme un problème de point-selle. La lecture de cette section est facultative mais permettra au lecteur une compréhension encore plus profonde et ouvre la porte à la théorie des points-selles et aux algorithmes qui s'y rattachent.

Une autre façon d'aborder le problème de Stokes consiste à travailler directement dans le noyau de  $B$  c'est-à-dire avec les fonctions à divergence nulle. Revenant au système 12.3, on multiplie par une fonction  $\mathbf{w} \in \ker B$  et on intègre par parties. Le problème de Stokes peut maintenant s'écrire :

♠ Trouver  $\mathbf{u} \in \ker B$  tel que :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{r}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \ker B \quad (12.15)$$

Classiquement (voir le théorème 3.5), ce problème est équivalent à :

$$\inf_{\mathbf{w} \in \ker B} \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - (\mathbf{r}, \mathbf{w})$$

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution  $\mathbf{u}$  sous l'hypothèse habituelle de coercivité de la forme bilinéaire  $a$  sur  $\ker B$  (et non sur tout l'espace  $V$ ). Par contre, démontrer l'existence et l'unicité de la pression  $p$  est plus délicat. Nous y reviendrons plus loin.

On peut de toute évidence pénaliser la contrainte d'incompressibilité et il en résulte un problème de point-selle du *lagrangien*  $\mathcal{L}$  défini par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, q) = \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, q) - (\mathbf{r}, \mathbf{w})$$

En dérivant (au sens de Gâteaux et de l'équation 8.10) par rapport à chacune des variables, on obtient aisément la formulation variationnelle 12.6. En effet, on caractérise le point-selle  $(\mathbf{u}, p)$  par les 2 relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{w} &= \frac{d}{d\lambda}(\mathcal{L}(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{w}, p)) |_{\lambda=0} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(\mathbf{u}, p) \cdot q &= \frac{d}{d\lambda}(\mathcal{L}(\mathbf{u}, p + \lambda q)) |_{\lambda=0} = 0 \end{aligned}$$

qui ne sont rien d'autre que la formulation 12.6. Le problème de Stokes est donc parfaitement équivalent à la recherche d'un point-selle :

$$\inf_{\mathbf{w} \in V} \sup_{q \in Q} \mathcal{L}(\mathbf{w}, q)$$

On peut aussi introduire le *lagrangien augmenté* noté  $\mathcal{L}_r$  et qui est défini par :

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{w}, q) = \mathcal{L}(\mathbf{w}, q) + \frac{r}{2}(\nabla \cdot \mathbf{w}, \nabla \cdot \mathbf{w})$$

La valeur du paramètre  $r$  sera souvent prise très grande de manière à forcer la condition d'incompressibilité. Le point-selle du lagrangien augmenté est caractérisé par :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) + r(\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{w}) &= (\mathbf{r}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned} \tag{12.16}$$

et puisqu'au point-selle  $(\mathbf{u}, p)$ , on a  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , la *formulation variationnelle pénalisée* 12.16 est équivalente au problème de Stokes 12.7.

## 12.5 Formulation variationnelle élémentaire

Nous suivrons une démarche similaire à celle du chapitre 11. On déduit facilement la formulation variationnelle élémentaire :

$$\begin{aligned} \int_K 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_K p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv &= \int_K \mathbf{r}^K \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \mathbf{w} \, ds \\ \int_K q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dv &= 0 \end{aligned} \tag{12.17}$$

Les approximations des vitesses et de la pression pouvant être de degrés différents, on pose :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) |_{K \simeq} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) |_{K} = \mathbf{u}^K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_D^u} \alpha_j^K \Psi_{u,j}^K \quad p(\mathbf{x}) |_{K \simeq} p_h(\mathbf{x}) |_{K} = p^K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_D^p} p_j^K \psi_{p,j}^K$$

Le vecteur  $\alpha^K$  est défini au chapitre 11 à l'équation 11.26. Les  $n_D^u$  fonctions de base (vectorielles) en vitesse  $\Psi_{u,j}^K$  et les  $n_D^p$  fonctions de base en pression peuvent être de nature différente. Par exemple,

les  $\Psi_{u,j}^K$  pourront être quadratiques et les  $\psi_{p,j}^K$  linéaires sur un élément. Il en résulte que le nombre de degrés de liberté pourra varier d'un noeud de calcul à l'autre et que les composantes de la vitesse et la pression pourront être évaluées en des noeuds de calcul différents. Le choix particulier des espaces de discrétisation sera précisé plus loin.

On peut de plus décomposer le système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{11}^K & A_{12}^K & A_{13}^K & (B_1^K)^T \\ A_{21}^K & A_{22}^K & A_{23}^K & (B_2^K)^T \\ A_{31}^K & A_{32}^K & A_{33}^K & (B_3^K)^T \\ B_1^K & B_2^K & B_3^K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^K \\ U_2^K \\ U_3^K \\ P^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^K \\ F_2^K \\ F_3^K \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1^K \\ S_2^K \\ S_3^K \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices  $A_{ij}^K$  sont de dimension  $n_C^u$  par  $n_C^u$ , où  $n_C^u$  est le nombre de noeuds de calcul en vitesse. On aura souvent  $n_D^u = d n_C^u$  où  $d$  est la dimension d'espace ( $d = 2$  ou  $3$ ). Les matrices  $B_i^K$  sont quant à elles de dimension  $n_D^p$  par  $n_C^u$  et sont donc rectangulaires dans le cas général.

On définit les fonctions de base en vitesse comme au chapitre 11 par l'équation 11.27. Les fonctions de base en pression sont obtenues de la manière habituelle. Les différentes matrices élémentaires prennent la forme :

$$(A_{11}^K)_{ij} = \int_K 2\mu \left( \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial x} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial y} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial z} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial z} \right) dv$$

De même :

$$(A_{12}^K)_{ij} = \int_K \mu \left( \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial x} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial y} \right) dv = (A_{21}^K)_{ji}$$

$$(A_{13}^K)_{ij} = \int_K \mu \left( \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial x} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial z} \right) dv = (A_{31}^K)_{ji}$$

$$(A_{22}^K)_{ij} = \int_K 2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial x} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial y} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial z} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial z} \right) dv$$

$$(A_{23}^K)_{ij} = \int_K \mu \left( \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial y} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial z} \right) dv = (A_{32}^K)_{ji}$$

$$(A_{33}^K)_{ij} = \int_K 2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial x} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial y} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{u,j}^K}{\partial z} \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial z} \right) dv$$

$$(B_1^K)_{ij} = \int_K \psi_{p,j}^K \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial x} dv$$

$$(B_2^K)_{ij} = \int_K \psi_{p,j}^K \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial y} dv$$

$$(B_3^K)_{ij} = \int_K \psi_{p,j}^K \frac{\partial \psi_{u,i}^K}{\partial z} dv$$

et enfin :

$$(F_1^K)_i = \int_K r_1^K \psi_{u,i}^K dv, \quad (S_1^K)_i = \int_{\partial K} t_1^K \psi_{u,i}^K ds$$

$$(F_2^K)_i = \int_K r_2^K \psi_{u,i}^K dv, \quad (S_2^K)_i = \int_{\partial K} t_2^K \psi_{u,i}^K ds$$

$$(F_3^K)_i = \int_K r_3^K \psi_{u,i}^K dv, \quad (S_3^K)_i = \int_{\partial K} t_3^K \psi_{u,i}^K ds$$

Il va de soi que ces intégrales sont évaluées sur l'élément de référence par le changement de variables approprié.

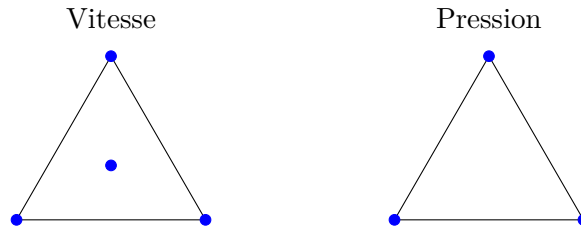
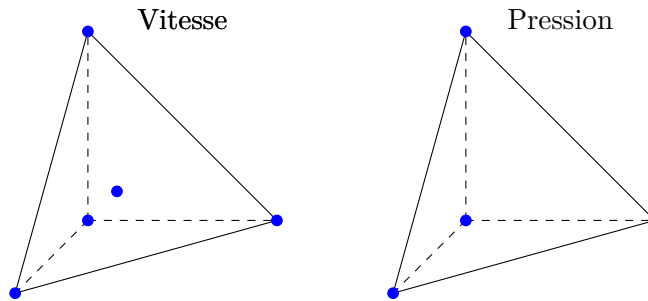
## 12.6 Choix des éléments

Nous présentons dans cette section des espaces discrets vérifiant la condition *inf-sup*. Les approximations en vitesse et pression vérifiant cette condition sont dites *compatibles*. Il existe plusieurs choix possibles et nous les classerons en deux catégories suivant que la discrétisation en pression est continue ou non. En effet, la pression  $p$  étant dans  $L^2(\Omega)$ , il n'est nullement nécessaire que sa discrétisation soit continue à la frontière des éléments.

### 12.6.1 Pression continue

La présentation la plus simple est graphique. On trouvera donc dans les figures qui suivent des exemples de discrétisations compatibles ainsi que leur ordre de convergence. On retrouvera des éléments triangulaires et quadrangulaires en dimension 2, de même que des éléments tétraédriques et hexaédriques en dimension 3.

Le premier élément compatible, illustré aux figures 12.1 et 12.2, est l'élément Mini décrit dans Arnold-Brezzi-Fortin [2]. La discrétisation de la pression est linéaire tandis que la vitesse est linéaire mais enrichie d'un noeud de calcul au centre de l'élément. Chaque élément contient donc 8 degrés de liberté en vitesse et 3 en pression dans le cas bidimensionnel (respectivement 15 et 4 en dimension 3). Cet élément est très utilisé, particulièrement en dimension 3 (voir la figure 12.2) en raison de son faible nombre de degrés de liberté. Cet élément converge à l'ordre 1 car l'espace de discrétisation en vitesse contient les polynômes de degré 1 mais certainement pas ceux de degré 2.

Figure 12.1 – Élément Mini ( $O(h)$ )Figure 12.2 – Élément Mini en dimension 3 ( $O(h)$ )

Notons toutefois qu'il s'agit d'un élément peu précis. Il est en quelque sorte minimal en ce sens qu'il ne contient que tout juste ce qu'il faut pour être compatible.

Le deuxième élément illustré est celui de Taylor-Hood souvent appelé  $P_2 - P_1$  en raison de l'approximation quadratique des composantes de vitesse et de l'approximation  $P_1$  de la pression (voir les figures 12.3 et 12.4. Les noeuds de calcul sont situés aux sommets (vitesses et pression) et aux milieux des arêtes (vitesses seulement). Cet élément converge à l'ordre 2 ( $O(h^2)$ ) en vertu du théorème 12.14 car l'approximation en vitesse contient les polynômes de degré 2 et l'approximation en pression contient ceux d'ordre 1. Des équivalents quadrangulaires et hexaédriques, également d'ordre 2, sont illustrés aux figures 12.5 et 12.6.

**Remarque 12.9.** Dans le cas d'éléments à pression continue, il est parfois nécessaire d'imposer une condition supplémentaire sur le maillage pour avoir l'existence et l'unicité de la solution. On devra par exemple supposer qu'aucun élément n'a deux côtés sur la frontière du domaine (voir les exercices de fin de chapitre). ◀

### 12.6.2 Pression discontinue

Un des éléments les plus utilisés est le  $Q_1 - Q_0$  où les vitesses sont bilinéaires et la pression constante par élément. Cet élément est illustré à la figure 12.7 en dimension 2 et à la figure 12.8 en dimension 3. Malheureusement, cet élément est incompatible et nous en verrons les conséquences dans les exemples numériques.

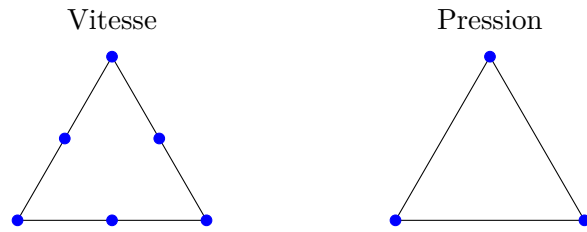


Figure 12.3 – Élément de Taylor-Hood  $P_2 - P_1$  ( $O(h^2)$ )

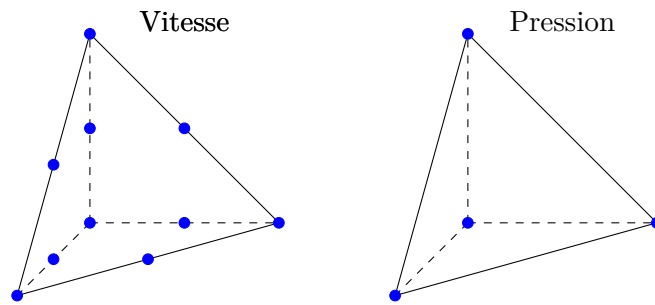


Figure 12.4 – Élément  $P_2 - P_1$  en dimension 3 ( $O(h^2)$ )

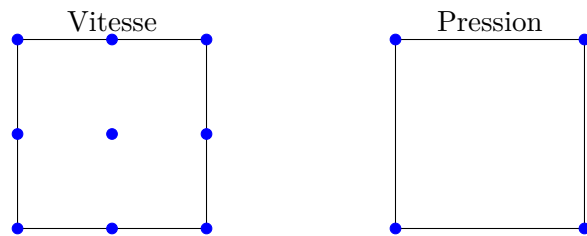
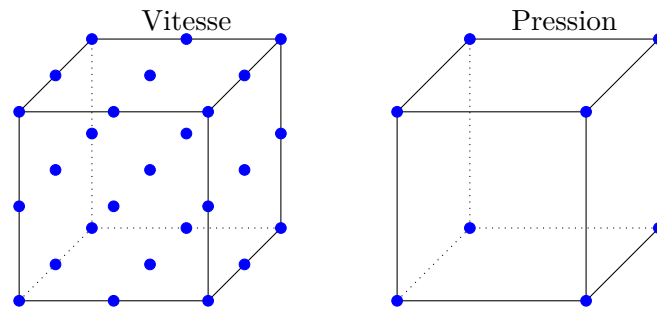
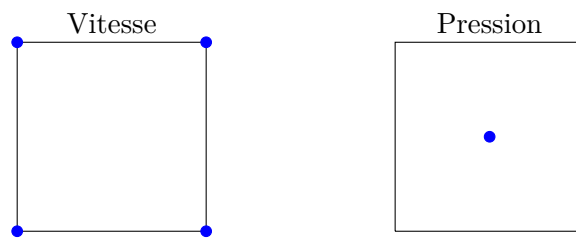
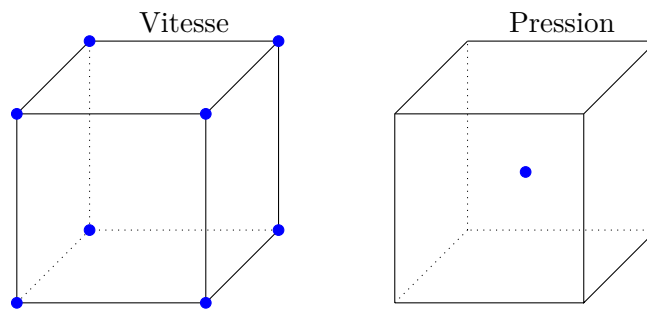


Figure 12.5 – Élément  $Q_2 - Q_1$  ( $O(h^2)$ )

Figure 12.6 – Élément  $Q_2 - Q_1$  en dimension 3 ( $O(h^2)$ )Figure 12.7 – Élément incompatible à pression discontinue  $Q_1 - Q_0$ Figure 12.8 – Élément incompatible  $Q_1 - Q_0$  en dimension 3



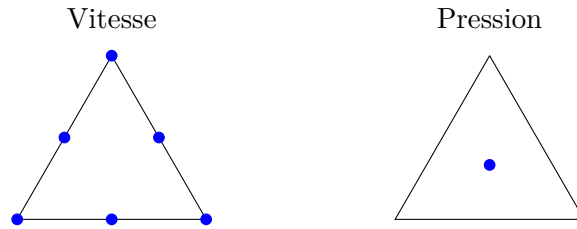


Figure 12.9 – Élément à pression discontinue  $P_2 - P_0$  ( $O(h)$ )

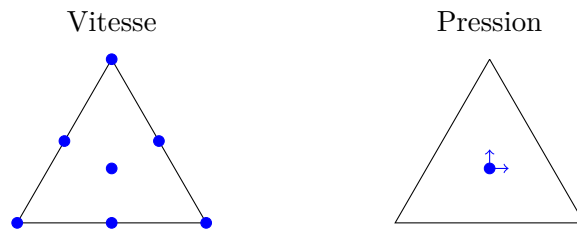


Figure 12.10 – Élément à pression discontinue de Crouzeix-Raviart  $P_2^+ - P_1$  ( $O(h^2)$ )

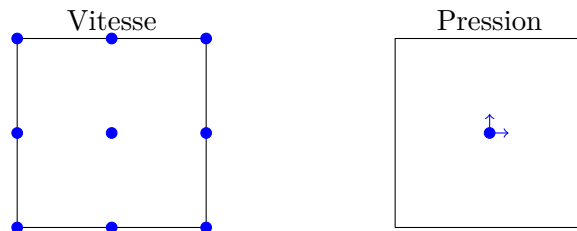


Figure 12.11 – Élément à pression discontinue  $Q_2 - P_1$  ( $O(h^2)$ )

Le premier élément compatible de la catégorie des éléments à pression discontinue est le  $P_2 - P_0$  présenté à la figure 12.9. Comme son nom l'indique, les composantes de vitesses sont quadratiques tandis que la pression est constante par élément. Le théorème 12.14 assure une convergence linéaire seulement car l'approximation en pression ne contient que les polynômes de degré 0. Il s'agit en fait d'un élément assez pauvre qui n'est pas beaucoup utilisé. C'est cependant l'un des plus simples vérifiant la condition *inf-sup*. Notons cependant que cet élément n'est valide qu'en dimension 2. En dimension 3, il faut mettre des degrés de liberté en vitesse sur le milieu des faces (nul besoin d'en mettre sur les arêtes) pour obtenir un élément compatible similaire.

L'élément de cette catégorie le plus connu est l'élément dit de Crouzeix et Raviart illustré à la figure 12.10 dans le cas bidimensionnel. En dimension 2, on approche les composantes de la vitesse par des polynômes de degré 2 mais enrichi d'une fonction bulle de degré 3 associée à un noeud de calcul situé au centre de l'élément. Il y a donc 14 degrés de liberté en vitesse. La pression contient 3 degrés de liberté tous situés par exemple au barycentre de l'élément. Souvent, ces degrés de liberté sont associés à la pression et aux deux composantes du gradient de pression au barycentre. C'est ce que nous avons illustré par le symbole  $\bullet \leftrightarrow$  à la figure 12.10.

En dimension 3, on ajoute aussi des fonctions bulles de degré 3 au centre de chaque face ainsi qu'une fonction bulle de degré 4 au barycentre de l'élément. On obtient ainsi 45 degrés de liberté en vitesse répartis sur 15 noeuds de calcul et 4 en pression (la pression et les 3 composantes du gradient au barycentre). Notons aussi les conséquences sur l'intégration numérique de la présence de ces fonctions bulles qui sont de degré élevé.

La pression est linéaire mais discontinue d'un élément à l'autre. C'est pourquoi nous avons illustré les noeuds de calcul en pression à l'intérieur de l'élément. Il en résulte que le nombre de degrés de liberté en pression est plus important que dans le cas d'une pression continue.

Notons enfin qu'il existe une technique, dite de condensation, qui permet d'éliminer localement les degrés de liberté en vitesse au barycentre de l'élément ainsi que le gradient de la pression, tout en conservant l'ordre de convergence de l'élément de Crouzeix et Raviart. En dimension 2, cette procédure réduit le système assemblé de  $4 \times Nel$  équations ( $6 \times Nel$  en dimension 3). On trouvera les détails dans Fortin et Fortin [28].

## 12.7 Résultats numériques : cas newtonien

### 12.7.1 L'écoulement de Poiseuille

Pour illustrer certains concepts que nous venons de présenter, il est utile de considérer un exemple très simple. Il s'agit de l'écoulement dit de Poiseuille dont la géométrie est illustrée à la figure 12.12. Ce problème décrit l'écoulement d'un fluide newtonien dans un canal dont les parois sont des plaques parallèles. Le fluide se déplace de gauche à droite dans une géométrie bidimensionnelle rectangulaire de longueur  $L$  ( $1 \leq x_1 \leq L$ ) et de hauteur  $H$  ( $0 \leq x_2 \leq H$ ) (les effets tridimensionnels sont négligés). On impose en entrée (en  $x_1 = 0$ ) un profil parabolique :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{6Q}{H^3} (x_2(H - x_2)) = \bar{u}_1 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \tag{12.18}$$

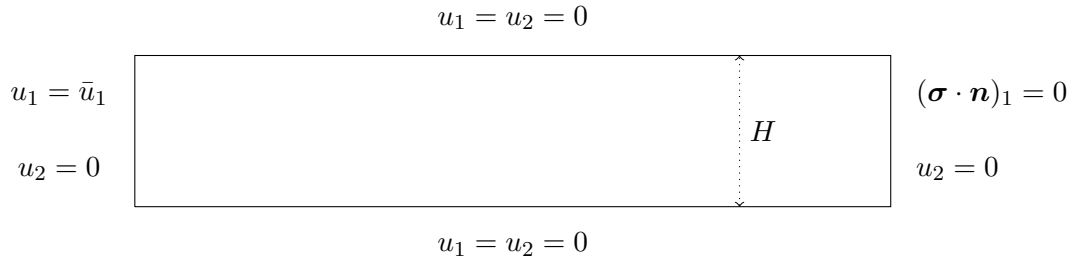


Figure 12.12 – Écoulement de Poiseuille (géométrie et conditions aux limites)

Dans l’expression de  $u_1$ ,  $Q$  désigne le débit imposé. On vérifie en effet que :

$$\int_0^H \bar{u}_1(x_2) dx_2 = Q$$

On impose en sortie (en  $x_1 = L$ ) que le profil soit entièrement développé c.-à-d.  $u_2 = 0$  et que la première composante de la condition naturelle soit nulle  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_1 = p = 0$ . Sur les parois du canal (en  $x_2 = 0$  et  $x_2 = H$ ), une condition d’adhérence  $u_1 = u_2 = 0$  doit être imposée car un fluide visqueux adhère aux parois solides. La solution analytique de ce problème est tout simplement le déplacement de la condition aux limites imposée en entrée 12.18 dans tout le domaine. Quant à la pression, elle varie linéairement en fonction de  $x_1$  et s’écrit :

$$p = - \left( \frac{12Q\eta}{H^3} \right) (x_1 - L) \tag{12.19}$$

Il suffit pour s’en convaincre de remplacer les relations 12.18 et 12.19 dans le système 12.3.

Nous avons résolu ce problème avec les conditions suivantes :  $H = 1$ ,  $L = 5$ ,  $\eta = 1$  et  $Q = 1$ . Dans ces conditions, la vitesse maximale (en  $x_2 = 1/2$ ) sera  $3/2$  alors que la pression devrait varier entre 60 en entrée et 0 en sortie. Les maillages de base, rectangulaire et triangulaire, sont illustrés à la figure 12.13.

Pour le premier cas test, on considère l’élément  $Q_1 - P_0$  qui, comme nous l’avons vu, ne vérifie pas la condition inf-sup. Dans un premier temps, nous avons résolu sur le maillage rectangulaire de la figure 12.13. et obtenu des résultats en apparence très acceptables (voir les deux premières images de la figure 12.14). Nous avons alors modifié ce maillage régulier en déplaçant légèrement un seul noeud. Les deux dernières images de la figure 12.14 montre un résultat typique de solution avec l’élément  $Q_1 - Q_0$  (figure 12.7). On remarque que le champ de vitesses est acceptable mais la pression présente de fortes oscillations qui sont typiques d’un élément ne vérifiant pas la condition inf-sup. Au lieu d’obtenir une pression linéaire dans la direction de l’écoulement, on obtient des oscillations dues à la présence d’éléments parasites (en forme de damiers) dans l’espace  $\ker B_h^T$ .

Au contraire, l’élément *Mini* (figure 12.1) donne d’excellents résultats comme on peut le voir à la figure 12.15. La pression devrait varier entre 0 et 60 et on constate une légère erreur. Enfin, l’élément d’ordre 2  $P_2 - P_1$  (figure 12.3) donne exactement le bon résultat, à la fois pour les vitesses et la pression (voir les deux dernières images de la figure 12.15). En fait, pour ce dernier élément, un maillage de deux éléments suffirait à donner la solution exacte.

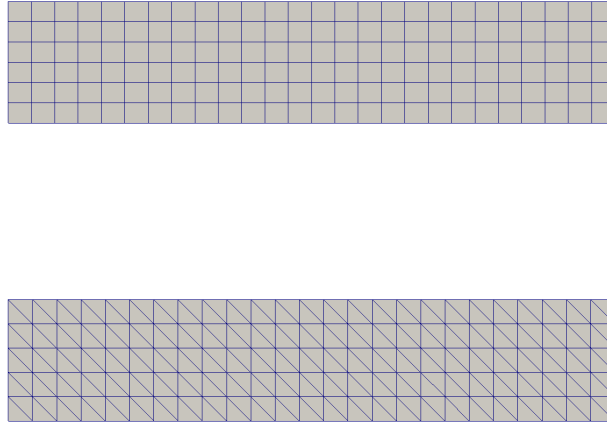


Figure 12.13 – Écoulement de Poiseuille : maillages rectangulaire et triangulaire

Notons enfin que :

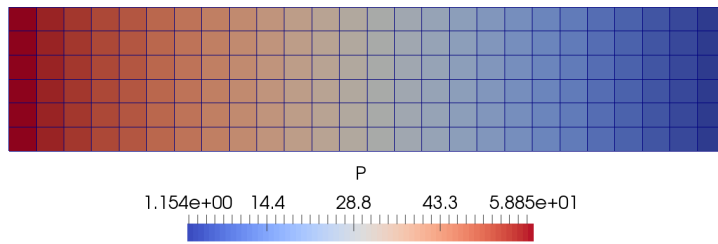
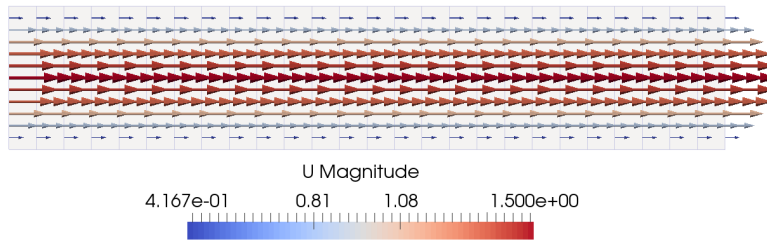
$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\eta\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{12Q\eta}{H^3}(x_1 - L) & \frac{6Q\eta}{H^3}(H - 2x_2) \\ \frac{6Q\eta}{H^3}(H - 2x_2) & \frac{12Q\eta}{H^3}(x_1 - L) \end{bmatrix}$$

et que sur la paroi supérieure ( $x_2 = H$ ), on a  $\mathbf{n} = (0, 1)$  et :

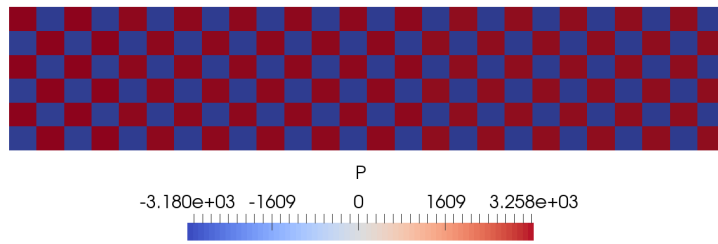
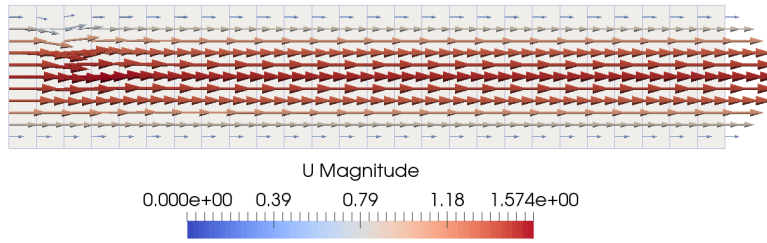
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{12Q\eta}{H^3}(x_1 - L) & \frac{6Q\eta}{H^3}(-H) \\ \frac{6Q\eta}{H^3}(-H) & \frac{12Q\eta}{H^3}(x_1 - L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Q\eta}{H^2} \\ \frac{12Q\eta}{H^3}(x_1 - L) \end{bmatrix}$$

dont les deux composantes sont négatives. Le fluide exerce en effet une poussée sur la paroi en s'écoulant. La traction  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est donc la force (par unité d'aire) exercée par la paroi supérieure pour maintenir le fluide dans le canal.

De manière générale, la traction  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est la force par unité d'aire exercée par le milieu externe (celui vers lequel pointe le vecteur  $\mathbf{n}$ ) sur le fluide.



Maillage initial de quadrangles



Maillage perturbé en un seul noeud

Figure 12.14 – Écoulement de Poiseuille pour l'élément  $Q_1 - Q_0$  : maillages initial et perturbé

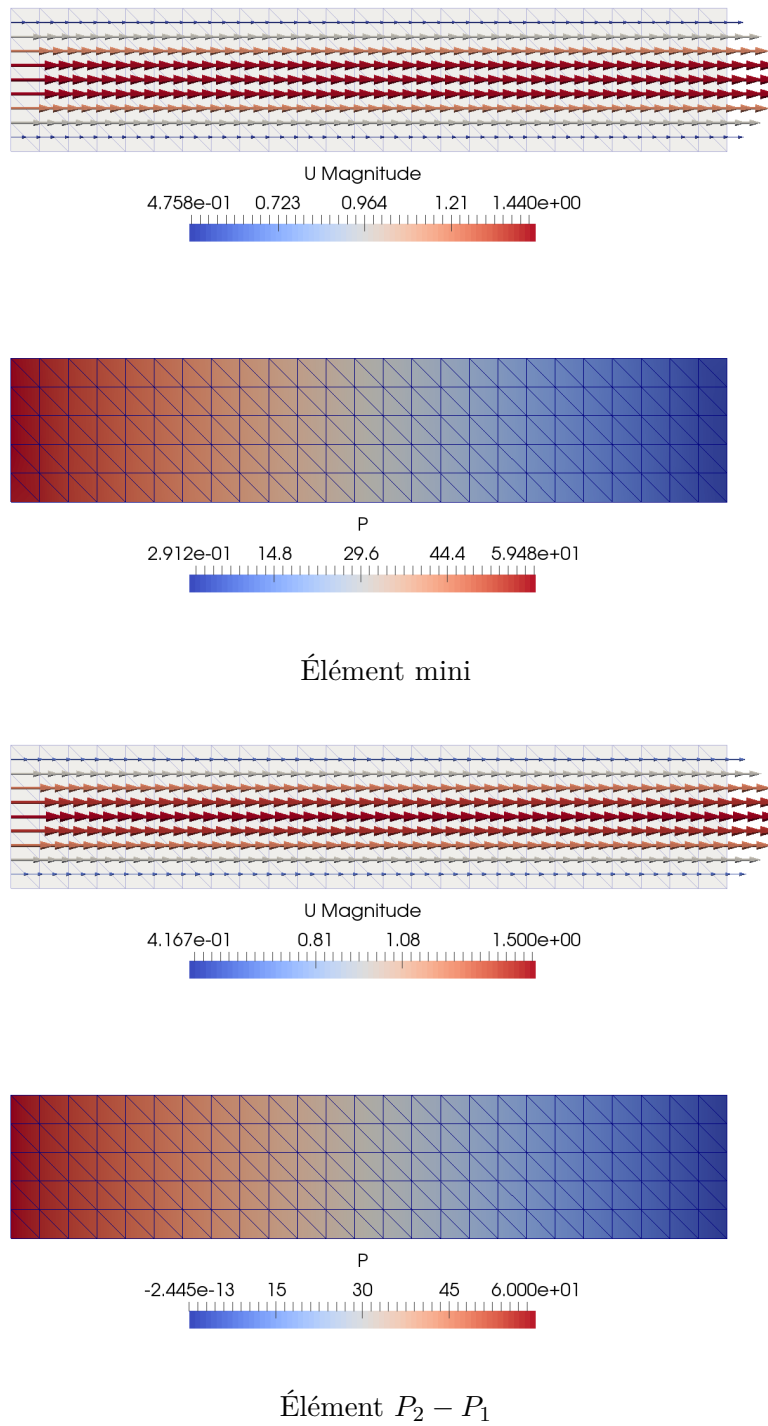


Figure 12.15 – Écoulement de Poiseuille pour l'élément Mini et  $P_2 - P_1$

## 12.8 Problème de Stokes non linéaire

La vaste majorité des fluides n'entre pas dans la catégorie des fluides newtoniens, c'est-à-dire des fluides à viscosité constante. On peut observer en laboratoire divers types de comportement, notamment en élongation ou en cisaillement. La viscosité de plusieurs fluides varie en fonction du cisaillement. On se doit alors de modéliser ce comportement et d'essayer de reproduire le plus fidèlement possible les données rhéologiques de viscosité en fonction du taux de déformation. Les fluides dont la viscosité dépend du cisaillement sont dits *viscoplastiques* et les modèles correspondants ont la forme générale suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$$

où  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|$  désigne le second invariant du tenseur  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$  défini par :

$$|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|^2 = 2\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) = 2(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}))_{ij}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}))_{ij}$$

La viscosité  $\eta$  est donc une fonction de  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|$  par l'intermédiaire de lois de comportement telle la loi puissance :

$$\eta = \eta_0 |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|^{n-1} \tag{12.20}$$

où  $n$  est l'indice de pseudoplasticité et  $\eta_0$  est la consistance. Cette loi est principalement utilisée pour décrire la viscoplasticité des métaux à chaud. On remarque cependant que la viscosité du polymère tend vers l'infini en cisaillement faible, ce qui est peu représentatif du comportement réel.

Une autre loi de comportement importante et plus réaliste est la loi de Carreau-Yasuda qui nous écrivons sous la forme :

$$\eta(\mathbf{u}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) (c_0 + \lambda^m |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|^m)^{\frac{n-1}{m}} \tag{12.21}$$

Dans le modèle original la constante  $c_0$  est tout simplement 1. Cette écriture nous permet cependant de voir la loi de puissance comme un cas particulier obtenu en posant  $\eta_\infty = 0$ ,  $c_0 = 0$ ,  $\lambda = 1$  et  $m = 1$ .

Le modèle de Carreau-Yasuda permet de prendre en compte la présence d'un plateau newtonien à faible taux de cisaillement. Dans ce dernier cas,  $\eta_0$  désigne toujours la consistance,  $\lambda$  est un temps de relaxation et  $m$  et  $n$  des indices de pseudoplasticité. En particulier, si  $m = 2$  on retrouve le modèle classique de Carreau.

Nous présentons maintenant la formulation variationnelle dans le cas des fluides viscoplastiques. Nous supposons donc que la viscosité du polymère est donnée par la loi de Carreau-Yasuda sous la forme 12.21. La formulation variationnelle élémentaire du problème de Stokes devient dans ce cas :

$$\begin{cases} \int_K 2\eta(\mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}) \, dv - \int_K p\nabla \cdot \mathbf{w} \, dv = \int_K \mathbf{r}^K \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \mathbf{w} \, ds \\ \int_K q\nabla \cdot \mathbf{u} \, dv = 0 \end{cases}$$

De toute évidence, le problème est maintenant non linéaire et on peut appliquer les techniques vues au chapitre 8 et notamment la méthode de Newton. Bien entendu, on suppose connues la fonction  $\mathbf{r}^K$  de même que la traction  $\mathbf{t}^K$ .

Partant d'une solution approximative  $(\mathbf{u}_0, p_0)$ , on cherche une correction  $(\delta_u, \delta_p)$  de sorte que  $(\mathbf{u}_0 + \delta_u, p_0 + \delta_p)$  soit une solution du problème non linéaire ou du moins une meilleure approximation. Remplaçant  $\mathbf{u}$  et  $p$  par  $\mathbf{u}_0 + \delta_u$  et  $p_0 + \delta_p$  on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_K 2\eta(\mathbf{u}_0 + \delta_u) \dot{\gamma}(\mathbf{u}_0 + \delta_u) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_K (p_0 + \delta_p) \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv = \\ \int_K \mathbf{r}^K \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \mathbf{w} \, ds \\ \int_K q \nabla \cdot (\mathbf{u}_0 + \delta_u) \, dv = 0 \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_K 2\eta(\mathbf{u}_0 + \delta_u) \dot{\gamma}(\mathbf{u}_0 + \delta_u) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_K \delta_p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv = \\ \int_K p_0 \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_K \mathbf{r}^K \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \mathbf{w} \, ds \\ \int_K q \nabla \cdot \delta_u \, dv = - \int_K q \nabla \cdot \mathbf{u}_0 \, dv \end{array} \right.$$

Il reste alors un dernier terme à linéariser. Pour ce faire on utilise la relation 8.9 et la dérivée de Gâteaux 8.10. On obtient ainsi le problème linéarisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\mathbf{u}_0}(\delta_u, \mathbf{w}) - \int_K \delta_p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv = - \int_K \mathbf{R}((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w}) \, dv \\ \int_K q \nabla \cdot \delta_u \, dv = - \int_K q \nabla \cdot \mathbf{u}_0 \, dv \end{array} \right.$$

où la forme bilinéaire  $a_{\mathbf{u}_0}$  et le résidu  $\mathbf{R}((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w})$  sont définis par :

$$a_{\mathbf{u}_0}(\delta_u, \mathbf{w}) = \int_K (2\eta(\mathbf{u}_0) \dot{\gamma}(\delta_u) : \dot{\gamma}(\mathbf{w})) \, dv + \int_K K_0 \left( |\dot{\gamma}(\mathbf{u}_0)|^{m-2} (c_0 + \lambda^m |\dot{\gamma}(\mathbf{u}_0)|^m)^{\frac{n-m-1}{m}} (\dot{\gamma}(\mathbf{u}_0) : \dot{\gamma}(\delta_u)) (\dot{\gamma}(\mathbf{u}_0) : \dot{\gamma}(\mathbf{w})) \right) \, dv$$

$$\mathbf{R}((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w}) = \int_K 2\eta(\mathbf{u}_0) \dot{\gamma}(\mathbf{u}_0) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv - \int_K p_0 \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv - \int_K \mathbf{r}^K \cdot \mathbf{w} \, dv - \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \mathbf{w} \, ds$$

(12.22)

où on a posé  $K_0 = 4(\eta_0 - \eta_\infty)(n-1)\lambda^m$

### 12.8.1 Résultats numériques : cas viscoplastique

#### Écoulement de Poiseuille

On considère encore un écoulement de Poiseuille mais cette fois avec une loi puissance 12.20 pour laquelle la viscosité diminue avec le cisaillement. Ce cisaillement se produisant principalement



aux parois solides, la viscosité y est plus faible qu’au centre du canal. On remarque à la figure 12.16 la différence de comportement entre les cas newtoniens ( $n = 1$ ) et les cas non newtoniens  $n = 0,7$  et  $n = 0,4$ . Le profil de vitesse en sortie s’aplatit lorsque  $n$  diminue et on le voit encore mieux à la figure 12.17 qui montre une coupe du profil de vitesse  $u_1$  en sortie sur l’axe  $x_1 = L$ . On y voit clairement l’aplatissement du profil et on remarque également que la surface sous la courbe (le débit) reste la même.

Le comportement de la pression est bien caractéristique d’un fluide viscoplastique (voir la figure 12.18). Pour un débit donné, la perte de charge c.-à-d. la différence de pression entre l’entrée et la sortie du canal diminue fortement avec  $n$ . En effet, puisque la viscosité diminue avec  $n$ , il faut pousser moins fort pour assurer un même débit. Cette propriété est fort appréciée dans bon nombre de procédés de mise en forme des polymères comme l’extrusion (voir Agassant [1]).

### Écoulement dans une filière d’extrusion

On considère dans ce problème une filière d’extrusion utilisée pour la production de poutre en I constituée d’un mélange de polymère et de fibre de bois. La section initiale est de forme circulaire et prend graduellement la forme en I désirée. Le problème a été adimensionnalisé de sorte que le rayon de la section circulaire de la filière soit 1. La longueur de la filière est d’environ 5,7 suivant l’axe des  $z$ . Le mélange bois-plastique est réputé viscoplastique avec les valeurs suivantes des paramètres du modèle de Carreau :  $\eta_0 = 1$ ,  $\lambda = 0,1588$ ,  $m = 2$  et  $n = 0,3$ .

La valeur de  $n$  étant assez loin du cas newtonien ( $n = 1$ ), la résolution du problème a nécessité plusieurs étapes. Nous avons d’abord résolu en prenant  $n = 1$  pour obtenir une solution de départ du problème non linéaire. par la suite, nous avons résolu avec  $n = 0,8$ ,  $n = 0,5$  et  $n = 0,3$ , toujours en prenant la solution précédente comme point de départ de la nouvelle résolution. On a utilisé un élément  $P_2 - P_1$  c.-à-d. quadratique en vitesse et linéaire en pression (voir la figure 12.4). Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} &= \left( 0, 0, \frac{(3n+1)}{(2n+2)}(1 - r^{(1+n)/n}) \right) \quad \text{où } r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \text{sur la section circulaire d'entrée} \\ \mathbf{u} &= (0, 0, 0) \quad \text{sur les parois} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= (0, 0, 0) \quad \text{sur la section de sortie} \end{array} \right.$$

Le profil de vitesse en entrée correspond à un écoulement de Poiseuille dans un tube de section circulaire pour un fluide en loi de puissance. Ce profil est légèrement inexact pour le modèle de Carreau.

Le maillage est illustré à la figure 12.19 de même que la pression et le module de vitesse à la sortie de la filière. En ce qui concerne la pression, on remarque qu’elle est à peu près constante dans la partie circulaire de la filière. On observe ensuite une chute rapide jusqu’en sortie où la pression s’annule en raison de la condition aux limites. Le module de vitesse est évidemment nul sur les parois de la filière. En sortie, on peut facilement voir l’accélération provoquée par la forme en I de la filière. En effet, l’écoulement est favorisé dans les parties plus larges.

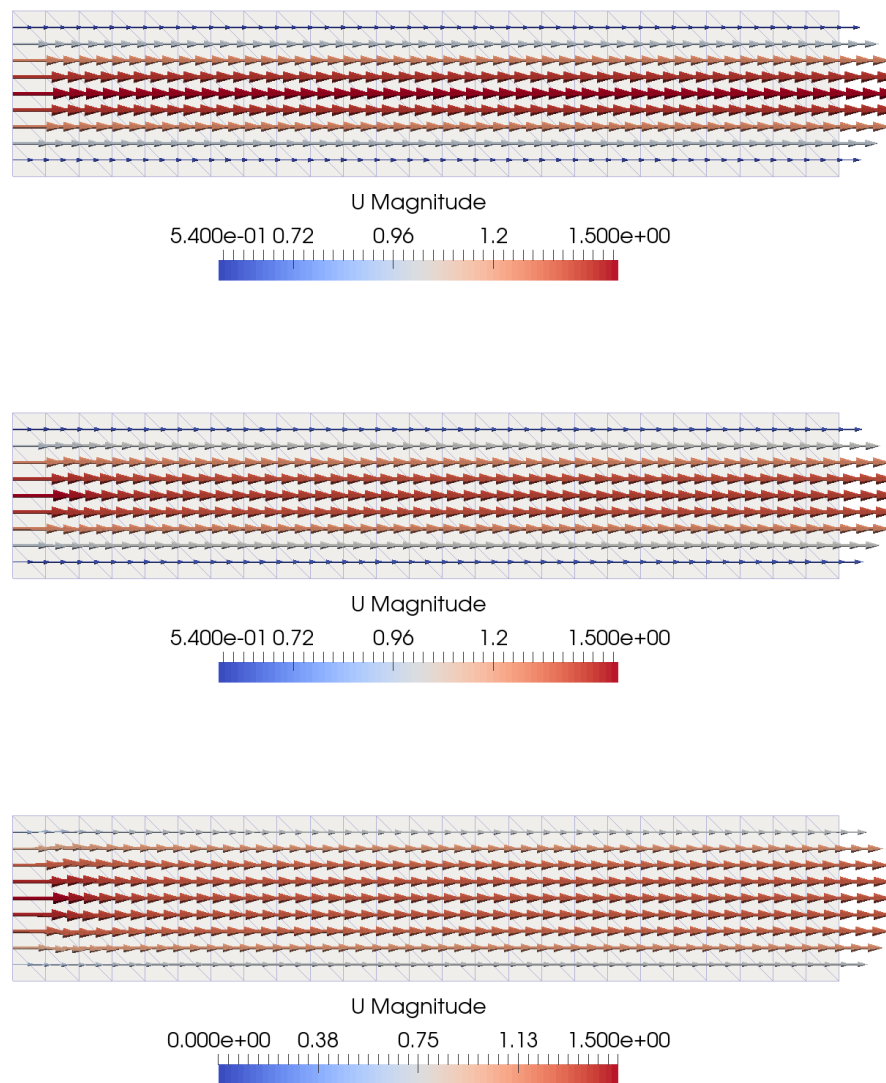


Figure 12.16 – Écoulement de Poiseuille : loi puissance avec  $n = 1$ ,  $n = 0,7$  et  $n = 0,4$

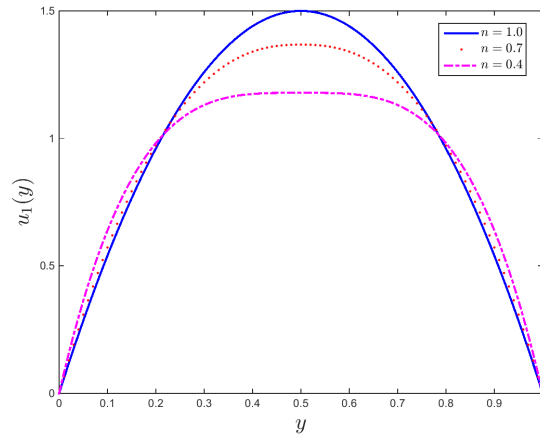


Figure 12.17 – Profil de vitesse en sortie :  $n = 1$ ,  $n = 0,7$  et  $n = 0,4$

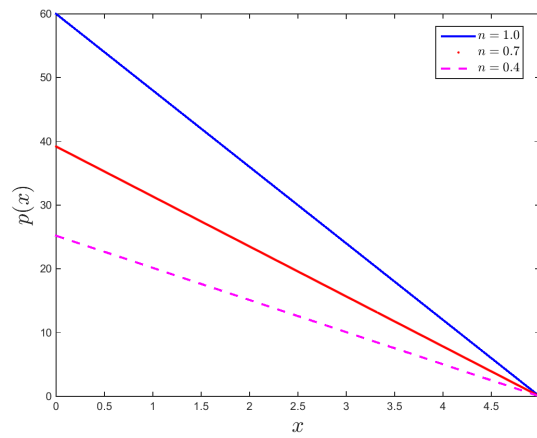


Figure 12.18 – Perte de charge dans le canal :  $n = 1$ ,  $n = 0,7$  et  $n = 0,4$

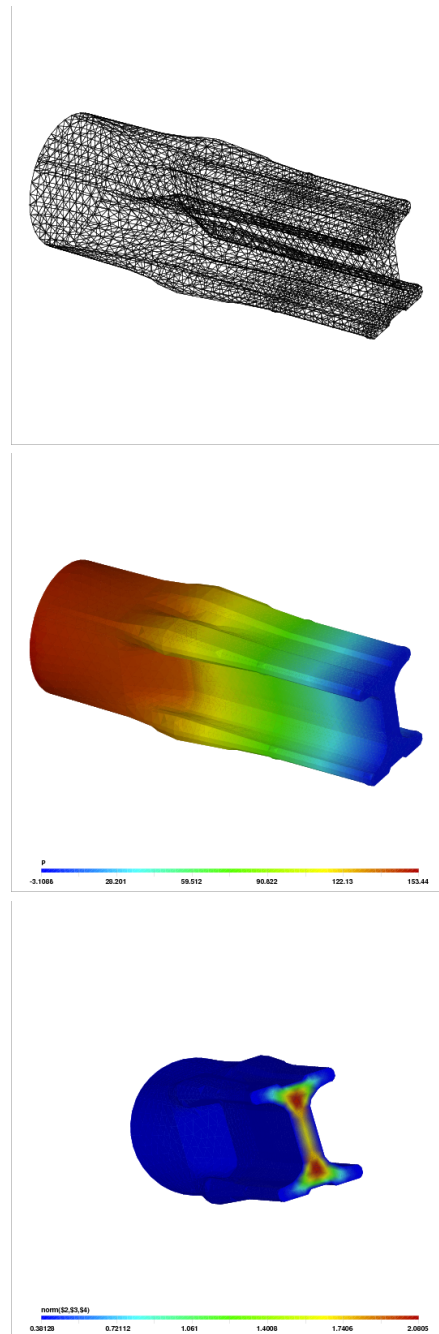


Figure 12.19 – Maillage, perte de charge et module de vitesse en sortie de filière

## 12.9 Les équations de Navier-Stokes

Les fluides viscoplastiques sont généralement très visqueux, leur viscosité étant souvent de l'ordre de  $10^5$  Pa · s. À l'autre extrémité du spectre, on trouve les fluides peu visqueux comme l'eau et l'air. Il va de soi que ces fluides particuliers sont aussi d'une grande importance en hydraulique et en aéronautique, bien que dans ce dernier cas, il faut tenir compte de la compressibilité.

Dans ce dernier cas, les équations d'équilibre sont modifiées de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (2\eta\dot{\gamma}(\mathbf{u})) + \nabla p &= \rho\mathbf{r} - \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{cases} \quad (12.23)$$

Le deuxième terme de droite en est un d'inertie, qui est négligé dans le cas où la viscosité est grande (et où par le fait même le terme visqueux est dominant). Notons de plus la forme spécifique du terme source  $\rho\mathbf{r}$  où  $\mathbf{r}$  désigne une force par unité de masse (dont les unités sont des N/kg). Nous négligerons dans un premier temps la dérivée en temps pour ne considérer que le cas stationnaire. Même si la viscosité est constante, ce système est non linéaire.

On retrouve souvent les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnelle. Pour ce faire, on choisit une longueur  $L_0$ , une vitesse  $U_0$ , une pression  $p_0$  et une force massique  $r_0$ , dites de référence et qui dépendent de la géométrie et des conditions du problème. On introduit ensuite les variables adimensionnelles  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/L_0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/U_0$ ,  $\tilde{p} = p/P_0$  et  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/R_0$  et en faisant ce changement de variables, on obtient les équations adimensionnelles :

$$\begin{cases} -\frac{1}{Re}\tilde{\nabla} \cdot (2\tilde{\gamma}(\tilde{\mathbf{u}})) + \tilde{\nabla}\tilde{p} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{r}} \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0 \end{cases} \quad (12.24)$$

où on a introduit le nombre adimensionnel dit *de Reynolds* qui est défini par :

$$Re = \frac{U_0 L_0 \rho}{\eta}$$

et où on a choisi  $P_0 = \rho U_0^2$  et  $R_0 = P_0/(\rho L_0)$  comme pression et force massique de référence. Les variables identifiées par le symbole  $\sim$  sont adimensionnelles (n'ont pas d'unités). Dans ce qui suit, nous laisserons tomber ce symbole pour éviter d'alourdir la notation.

On peut, ici encore, appliquer la méthode de Newton, bien qu'il existe d'autres possibilités. Il n'y a dans ce cas qu'un terme à linéariser. Par les techniques que nous avons vues, on obtient ainsi le problème linéarisé :

$$\begin{cases} a_{\mathbf{u}_0}(\delta_{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) - \int_K \delta_p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv &= - \int_K \mathbf{R}((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w}) \, dv \\ \int_K q \nabla \cdot \delta_{\mathbf{u}} \, dv &= - \int_K q \nabla \cdot \mathbf{u}_0 \, dv \end{cases}$$

où la forme bilinéaire  $a_{\mathbf{u}_0}$  et le résidu  $R((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w})$  sont définis par :

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{u}_0}(\boldsymbol{\delta}_u, \mathbf{w}) &= \int_K \left( \frac{2}{Re} \dot{\gamma}(\boldsymbol{\delta}_u) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\delta}_u) \cdot \mathbf{w} + ((\boldsymbol{\delta}_u \cdot \nabla) \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{w} \right) dv \\ R((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w}) &= \int_K \frac{2}{Re} \dot{\gamma}(\mathbf{u}_0) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{w} dv - \int_K p_0 \nabla \cdot \mathbf{w} dv - \int_K \mathbf{r}^K \cdot \mathbf{w} dv \\ &\quad - \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \mathbf{w} ds \end{aligned} \tag{12.25}$$

Différentes variantes de la méthode des points fixes sont également envisageables.

### 12.9.1 Résultats numériques : cas Navier-Stokes

#### Écoulement autour d'un cylindre : cas stationnaire

On considère l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre circulaire de diamètre 1 et centré en  $(0, 0)$ . Pour éviter une influence induite des conditions aux limites, on fera le calcul dans une géométrie assez vaste du plan  $x - z$  c.-à-d.  $-10 \leq x \leq 25$  et  $-10 \leq z \leq 10$ . On suppose donc que le cylindre est de longueur infinie dans la direction de l'axe des  $y$  et on néglige ainsi les variations dans cette direction de sorte que  $u_y = 0$  dans tout le domaine de calcul. Les dimensions de ce domaine sont volontairement choisies très grandes car les conditions aux limites sont mal connues en aval du cylindre. Par contre, sur la section d'entrée ( $x = -10$ ) on imposera un profil de vitesse uniforme  $\mathbf{u} = (1, 0)$  de même que sur les frontières (fictives) supérieures et inférieures. On suppose que ces deux frontières sont suffisamment éloignées pour que le profil uniforme ne soit pas perturbé. Enfin, on imposera une condition naturelle nulle en sortie  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (0, 0)$ . Cette dernière condition est encore ici douteuse, spécialement dans le cas instationnaire. Les conditions aux limites sont présentées à la figure 12.20. Le maillage de 14700 éléments de Taylor-Hood ( $P_2 - P_1$ ) est présenté à la figure 12.21.

Pour bien cerner l'influence du nombre de Reynolds sur la solution, on retrace les lignes de courant immédiatement au voisinage du cylindre. C'est ce qui est illustré à la figure 12.22 où on peut constater les différences entre les solutions à  $Re = 1, 45$  et  $100$ . On constate que loin du cylindre, les lignes de courant sont peu perturbées, ce qui justifie *a posteriori* le choix des conditions aux limites.

#### Écoulement autour d'un cylindre : cas instationnaire

Lorsque le nombre de Reynolds atteint environ  $Re = 45$ , l'écoulement devient instationnaire et il se développe à l'arrière du cylindre une instabilité connue sous le nom d'allée de von Karman. Ce phénomène est très fréquemment rencontré dans la nature et c'est ce qui fait par exemple louvoyer un drapeau dans le vent, le mât au bout duquel flotte le drapeau faisant office de cylindre. Le passage d'un écoulement stationnaire à un écoulement instationnaire correspond à ce que les mathématiciens appellent une bifurcation de Hopf.

Nous présentons maintenant des résultats obtenus pour un nombre de Reynolds de 100, nombre bien au-delà du nombre critique. Nous avons utilisé une différence arrière implicite d'ordre 2 pour la dérivée en temps ainsi qu'un pas de temps de 0,1.

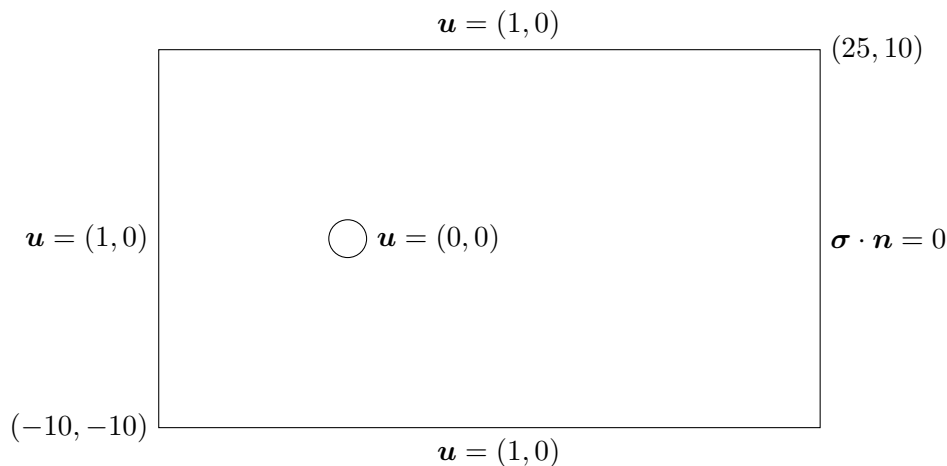


Figure 12.20 – Écoulement autour d’un cylindre : géométrie et conditions aux limites

La figure 12.23 donne les détails de l’écoulement derrière le cylindre sur près d’une période. En effet, on peut vérifier que l’écoulement est bien périodique de période 5,9, en accord notamment avec Engleman et Jamnia [24]. Puisque  $\Delta t = 0,1$ , une soixantaine de pas de temps couvre donc une période d’oscillations. Il est à noter qu’au départ, un grand nombre de pas de temps sont nécessaires pour éliminer les effets transitoires et pour que l’écoulement périodique s’établisse de manière définitive.

On trouvera un certain nombre d’exemples de modélisation d’écoulements instationnaires dans Fortin et al. [27]. On y observera des bifurcations de Hopf ainsi que ce qu’il est convenu d’appeler des cascades de dédoublements de périodes, correspondant à de nouvelles bifurcations.

On peut conclure cette sous-section en élaborant sur le calcul de quantités fort utiles en ingénierie. Un solide placé dans un écoulement subit une force  $\mathbf{F}$ . Si la direction principale de l’écoulement est dans le plan  $x - y$ , les deux coefficients  $F_x$  et  $F_y$  sont dits de trainée alors que  $F_z$  est la portance. On pense bien entendu à un avion mais c’est aussi le cas pour une voiture. Dans notre exemple, l’objet sera le cylindre mais le calcul serait similaire pour un objet de forme quelconque. On les définit, pour un problème bidimensionnel :

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t} \, ds$$

où  $\Gamma_c$  est la frontière du cylindre,  $\boldsymbol{\sigma}$  est toujours le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est le vecteur de traction au bord. Bien entendu, pour un problème bidimensionnel, l’une des composantes serait nulle.

**Remarque 12.10.** La procédure qui suit est générale et s’applique à toute courbe fermée (surface en 3D), pas seulement un cylindre. Il faudra toutefois faire attention au signe. Puisque la normale  $\mathbf{n}$  est orientée vers l’extérieur de la région occupée par le fluide (en l’occurrence l’intérieur du cylindre), la traction  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est la force par unité de surface exercée sur le fluide par le cylindre et on cherche précisément l’inverse. ◀

Il serait tentant d'expliciter  $\boldsymbol{\sigma}$  et d'évaluer l'intégrale de bord en calculant :

$$\int_{\Gamma_c} (-p\mathbf{I} + 2\eta\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (12.26)$$

mais on perdrait ainsi beaucoup de précision principalement en raison des dérivées de  $\mathbf{u}$  dans  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$  qui convergent moins rapidement. C'est un point que nous avons déjà abordé aux chapitres 5 et 6.

Pour évaluer ces quantités, il est préférable de recourir aux réactions nodales. Une analyse similaire à celle menant à l'équation (6.17) (à partir de (6.16)) nous permettrait en effet de montrer que :

$$\mathbf{R}^i = \sum_{K \in T_i} \int_{\partial K} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^K) \phi_i(\mathbf{x}) \, ds \quad (12.27)$$

où  $T_i$  est l'ensemble de tous les éléments dont l'un des sommets est le numéro  $i$  et où  $\phi_i$  est la fonction de Ritz en vitesse au noeud  $i$ . On intègre donc sur toutes les arêtes de ces éléments. Les arêtes internes au domaine sont ainsi parcourues deux fois en sens inverses et s'annulent. Il ne reste donc que les arêtes sur la frontière (sur l'objet où on calcule  $\mathbf{F}$ ). On aura alors :

$$\mathbf{R}^i = \int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \phi_i \, ds = (R_x^i, R_y^i, R_z^i)$$

(ces vecteurs se retrouvent dans le vecteur  $S^I$  à l'assemblage). Si on somme sur tous les noeuds de calcul du cylindre :

$$\sum_{i \in \Gamma_c} \mathbf{R}^i = \sum_{i \in \Gamma_c} \int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \phi_i \, ds = \int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \sum_{i \in \Gamma_c} \phi_i \, ds = \int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \mathbf{F}$$

et on obtient précisément la force recherchée car, ici encore, la somme des  $\phi_i$  (ou si l'on préfère la somme des  $\psi_i^K$ ) sur chaque côté d'élément vaut 1. Il suffit simplement d'additionner les réactions nodales et le coût est essentiellement nul. Mais le plus important est que l'on peut montrer que le résultat obtenu est beaucoup plus précis qu'en évaluant (12.26).

On peut du même coup calculer un moment de force  $\mathbf{M}$  sur le cylindre par rapport à un point de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ . Ainsi, on rappelle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (M_x, M_y, M_z) = \int_{\Gamma_c} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \times \mathbf{t} \, ds \\ &= \left( \int_{\Gamma_c} (y - y_0)t_z - (z - z_0)t_y \, ds, \int_{\Gamma_c} (z - z_0)t_x - (x - x_0)t_z \, ds, \int_{\Gamma_c} (x - x_0)t_y - (y - y_0)t_x \, ds \right) \end{aligned}$$

Le calcul de ces intégrales se fait bien entendu élément par élément. On constate toutefois que l'on peut interpoler  $x$ ,  $y$  et  $z$  sur la frontière à l'aide des fonctions d'interpolation  $\phi_i$  et que :

$$x = \sum_{i \in \Gamma_c} x_i \phi_i \text{ de même que } y = \sum_{i \in \Gamma_c} y_i \phi_i \text{ et } z = \sum_{i \in \Gamma_c} z_i \phi_i$$



où  $(x_i, y_i, z_i)$  sont les noeuds de calcul en vitesse. Ainsi, par exemple, le moment  $M_z$  recherché est alors :

$$\begin{aligned}
 M_z &= \int_{\Gamma_c} (x - x_0)t_y - (y - y_0)t_x \, ds \\
 &= \sum_{i \in \Gamma_c} x_i \int_{\Gamma_c} t_y \phi_i \, ds - x_0 \int_{\Gamma_c} t_y \, ds + y_i \int_{\Gamma_c} t_x \phi_i \, ds - y_0 \int_{\Gamma_c} t_x \, ds \\
 &= \sum_{i \in \Gamma_c} x_i \int_{\Gamma_c} t_y \phi_i \, ds - x_0 F_y + y_i \int_{\Gamma_c} t_x \phi_i \, ds - y_0 F_x \\
 &= \sum_{i \in \Gamma_c} (x_i - x_0)R_y^i - (y_i - y_0)R_x^i
 \end{aligned}$$

et on obtient encore ici un résultat d'une grande précision à coût négligeable.

**Remarque 12.11.** Dans ce dernier résultat, la somme porte sur tous les noeuds de calcul en vitesse situés sur le cylindre. Pour un élément quadratique standard tel que celui utilisé ici, cela inclut les milieux d'arête. Toutefois, si on utilise une base hiérarchique pour décrire cet élément quadratique (voir la figure 5.8), la somme des  $\phi_i$  (ou des  $\tilde{\psi}_i^K$  si on se restreint à un côté d'un élément  $K$ ) n'est plus 1 sur les côtés. Si on note toujours  $\psi_i^K$  les fonctions d'interpolation quadratiques standards de la figure 5.7 et  $\tilde{\psi}_i^K$  les fonctions d'interpolation hiérarchiques de la figure 5.8, on constate que  $\psi_3^K = \tilde{\psi}_3^K$ , que  $\psi_1^K = \tilde{\psi}_1^K - \frac{1}{2}\tilde{\psi}_3^K$  ainsi que  $\psi_2^K = \tilde{\psi}_2^K - \frac{1}{2}\tilde{\psi}_3^K$ . On peut donc récupérer les réactions nodales standards  $\mathbf{R}^i$  à partir des réactions nodales hiérarchiques correspondantes  $\tilde{\mathbf{R}}^i$  en corrigeant sur chaque arête par les relations :

$$\mathbf{R}^3 = \tilde{\mathbf{R}}^3, \quad \mathbf{R}^1 = \tilde{\mathbf{R}}^1 - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{R}}^3 \text{ et } \mathbf{R}^2 = \tilde{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{R}}^3$$

ce qui signifie, en vertu de la définition (12.27), que la réaction nodale à un sommet sera corrigée autant de fois qu'il y a d'arêtes connectées à ce sommet. Une fois ces transformations faites, on peut calculer les vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{M}$  comme auparavant. ◀

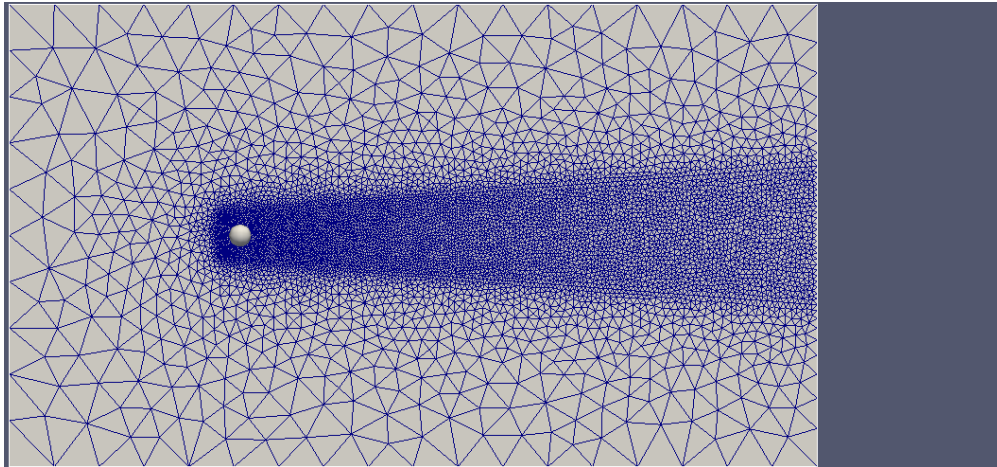


Figure 12.21 – Maillage pour l'écoulement autour d'un cylindre

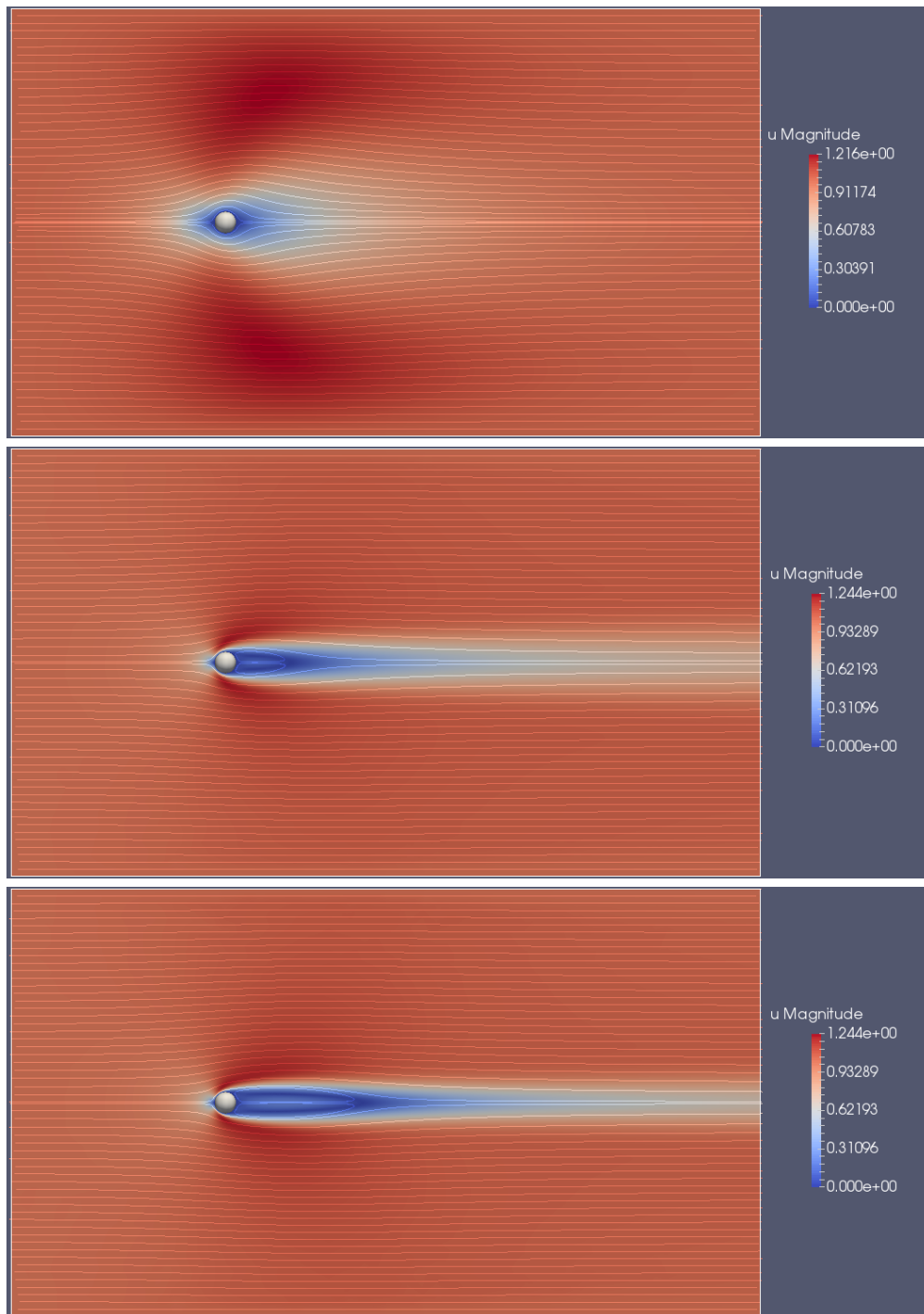


Figure 12.22 – Cas stationnaire : lignes de courant à  $Re = 1, 45$  et  $100$

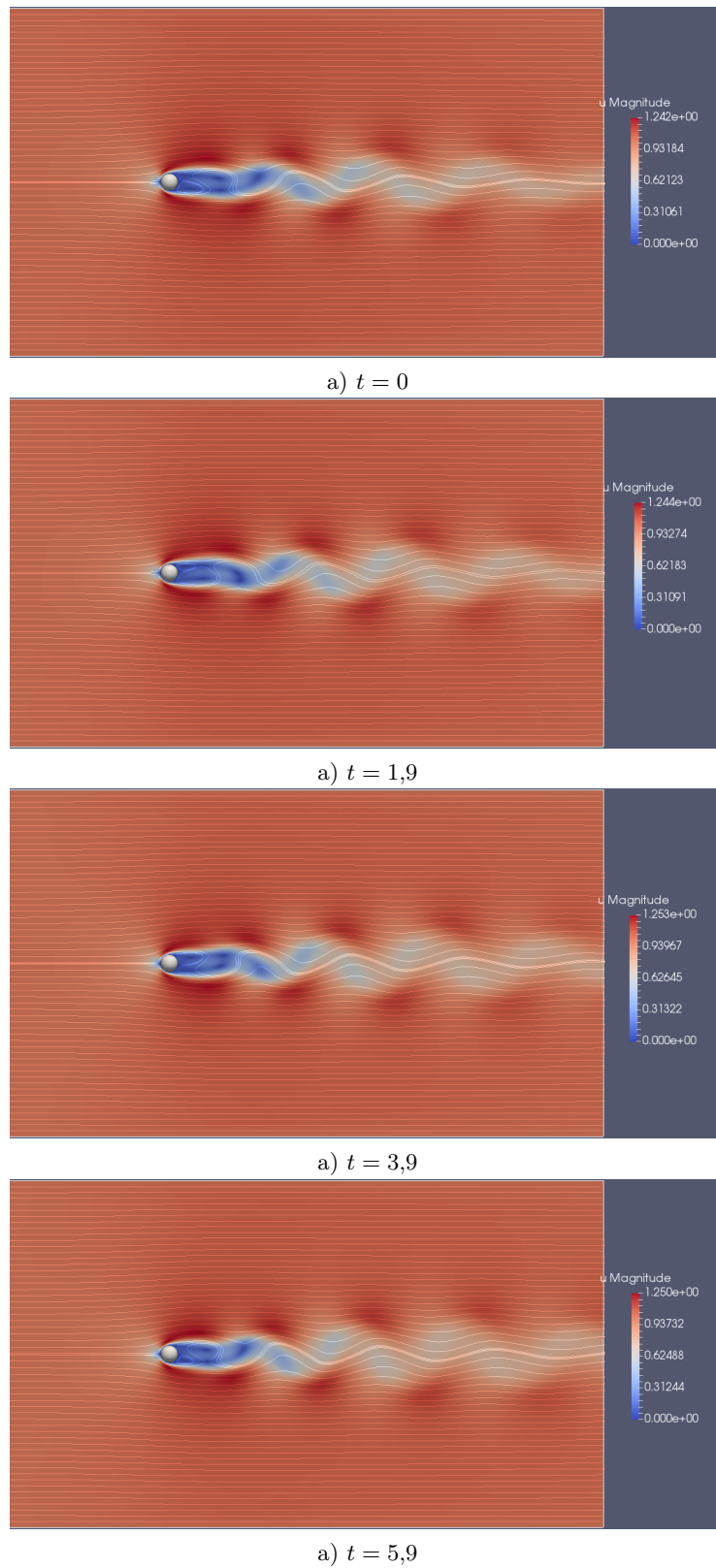


Figure 12.23 – Cas instationnaire : lignes de courant à  $Re = 100$  sur approximativement une période

## 12.10 Exercices

1. Montrer que l'opérateur  $B$  défini par la relation :

$$\langle B\mathbf{w}, q \rangle = b(\mathbf{w}, q)$$

est bien linéaire et continu sur  $V$ .

2. On va démontrer que pour le problème de Stokes, une discrétisation linéaire par éléments en vitesse et en pression ( $P_1 - P_1$ ) ne vérifie pas la condition de Brezzi ou plus précisément que le noyau de l'opérateur  $B_h^T$  contient des pressions parasites. On considère encore le maillage de la figure 6.16 ainsi que 3 nombres  $a, b$  et  $c$  tels que  $a + b + c = 0$  c.-à-d. de moyenne nulle.
  - a) Reproduire le maillage de la figure 6.16 et assigner à chaque noeud du maillage l'une des valeurs  $a, b$  ou  $c$  de sorte que la moyenne des valeurs nodales dans tous les éléments soit nulle.
  - b) On considère maintenant la fonction linéaire par élément  $p_h(\mathbf{x})$  prenant les valeurs nodales obtenues en (a). Montrer à l'aide d'une quadrature de Hammer à un point que si les valeurs nodales sont de moyenne nulle dans un élément, alors :

$$\int_K p_h(\mathbf{x}) \, dv = 0 \quad \forall K$$

- c) Montrer alors que si les composantes du vecteur vitesse sont linéaires par élément, alors la fonction  $p_h$  construite précédemment est dans le noyau de l'opérateur  $B_h^T$  c.-à-d.

$$b(\mathbf{w}_h, p_h) = \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h \, dv = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h$$

3. En partant des équations de Navier-Stokes dimensionnelles 12.23, obtenir la forme adimensionnelle 12.24 en choisissant en particulier  $P_0 = \rho U_0^2$  et  $R_0 = P_0 / (\rho L_0)$  comme pression et force massique de référence.



## Chapitre 13

# Formulations mixtes en élasticité linéaire

Au chapitre 11, nous avons rencontré ce qu'il est convenu d'appeler une *formulation déplacement* du problème d'élasticité linéaire isotrope en ce sens que la seule inconnue du problème est le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$ . Nous avons vu au chapitre 12 une formulation mixte du problème de Stokes (en vitesse et pression) et constaté l'importance de choisir des approximations consistantes en vitesse et pression. Nous revenons dans ce chapitre sur les problèmes d'élasticité linéaire, mais en formulation mixte (en déplacement et pression). De telles formulations mixtes deviennent nécessaires lorsque le coefficient de Poisson  $\nu$  approche 0,5 et que le matériau devient incompressible. Le système obtenu est alors très proche du système de Stokes. Nous mettrons également en évidence la faiblesse de la formulation déplacement dans ce cas.

### 13.1 Cas isotrope

Rappelons les équations d'équilibre :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}$$

et l'expression du tenseur des contraintes dans le cas isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \quad (13.1)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité et  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$  est le tenseur de déformation défini à la relation 11.2. Notons que ceci est un cas particulier de la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{C}_{ijkl}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}))_{kl} = \mathcal{C}_{ijkl}\gamma_{kl}$$

où on a posé  $\gamma_{ij} = (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}))_{ij}$  et où on a utilisé la convention de somme sur les indices répétés.  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité (du quatrième ordre). Dans le cas isotrope, le tenseur d'élasticité est défini par la relation 11.9 que nous rappelons :

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \lambda I_{ij}I_{kl} + \mu(I_{ik}I_{jl} + I_{il}I_{jk}) \quad (13.2)$$

Rappelons que  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé (voir la relation 11.10). On introduit également le coefficient de compressibilité  $k$  (« bulk modulus » en anglais) défini par :

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

et on vérifie facilement que :

$$k = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3} \quad \text{ou encore} \quad \lambda - k = -\frac{2\mu}{3} \quad (13.3)$$

On définit la pression par :

$$p = -\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3}$$

Puisque la trace de  $\boldsymbol{\sigma}$  est :

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\text{tr}(\mathbf{I}) + 2\mu \text{tr}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) = (3\lambda + 2\mu)(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 3k(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

on en conclut que :

$$p = -k(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Il est alors courant (voir les références Bathe [5] ainsi que Zienkiewicz et Taylor [64] par exemple) de décomposer le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  en une partie de trace nulle que l'on appelle le *déviateur* de  $\boldsymbol{\sigma}$  (notée  $\boldsymbol{\tau}$ ) et une partie dite *sphérique* faisant intervenir la pression. Selon Bathe [5], on pose alors :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3}\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} - k(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} = 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$$

Par construction, on a  $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0$  et de plus :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3}\mathbf{I} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - p\mathbf{I} \quad (13.4)$$

où on a utilisé les relations 13.1 et 13.3. L'équation d'équilibre devient alors un système de 2 équations faisant intervenir le déplacement  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left[ 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - p\mathbf{I} \right] = \mathbf{r} \\ -\frac{1}{k}p - (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

Nous devons donc obtenir des discrétisations par éléments finis de cette formulation mixte. Multipliant la première équation par une fonction test  $\mathbf{w}$  et la seconde par  $q$  et après intégration par



parties, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( 2\mu\gamma(\mathbf{u}) : \gamma(\mathbf{w}) - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{w}) \right) dv - \int_{\Omega} p\nabla \cdot \mathbf{w} dv &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} dv + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma \\ - \int_{\Omega} q\nabla \cdot \mathbf{u} dv - \frac{1}{k} \int_{\Omega} pq dv &= 0 \end{aligned} \quad (13.5)$$

La condition essentielle est, comme pour le problème de Stokes, l'imposition du déplacement  $\mathbf{u}$  (ou de l'une de ses composantes  $u_i$ ) et la condition naturelle consiste à imposer  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  (ou de l'une de ses composantes  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_i$ ).

L'analyse numérique du système 13.5 ressemble beaucoup à celle du problème de Stokes. En fait, lorsque le coefficient de Poisson s'approche de 0,5, le coefficient de compressibilité  $k$  tend vers l'infini, ce qui annule le deuxième terme de la deuxième équation du système. On retombe alors sur le problème de Stokes à la différence près du terme :

$$\frac{2\mu}{3} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{w}) dv$$

C'est donc dans le cas où  $\nu \simeq 0,5$  que les méthodes mixtes pour l'élasticité linéaire prennent toute leur importance et se distinguent avantageusement des formulations en déplacement seulement.

Nous ne referons pas toute l'analyse de cette méthode mixte puisqu'elle est tout-à-fait similaire à celle du problème de Stokes. Il y a toutefois de petites différences qu'il faut souligner. Le problème d'élasticité linéaire mixte pour un matériau isotrope s'écrit :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) = (\mathbf{r}, \mathbf{w}) & \forall \mathbf{w} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) - c(p, q) = 0 & \forall q \in Q \end{cases} \quad (13.6)$$

où :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \left( 2\mu\gamma(\mathbf{u}) : \gamma(\mathbf{w}) - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{w}) \right) dv \\ b(\mathbf{w}, q) &= - \int_{\Omega} q\nabla \cdot \mathbf{w} dv \\ c(p, q) &= \frac{1}{k} \int_{\Omega} pq dv \end{aligned}$$

**Remarque 13.1.** On montre facilement que :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \left( 2\mu\gamma(\mathbf{u}) : \gamma(\mathbf{w}) - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{w}) \right) dv \\ &= 2\mu \int_{\Omega} \left( \gamma(\mathbf{u}) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{3} \mathbf{I} \right) : \gamma(\mathbf{w}) dv \\ &= 2\mu \int_{\Omega} \left( \gamma(\mathbf{u}) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{3} \mathbf{I} \right) : \left( \gamma(\mathbf{w}) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{w}}{3} \mathbf{I} \right) dv \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $a(\mathbf{w}, \mathbf{w})$  est une quantité qui est toujours positive. ◀

**Remarque 13.2.** On peut obtenir une formulation mixte des problèmes d'élasticité à partir de la relation 13.4 en posant simplement  $\tilde{p} = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$ . On obtient alors une forme plus simple que l'on rencontre fréquemment (voir Brezzi et Fortin [11] par exemple) :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (2\mu\gamma(\mathbf{u}) - \tilde{p}\mathbf{I}) &= \mathbf{r} \\ -\frac{\tilde{p}}{\lambda} + \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

Il faut cependant noter que la variable  $\tilde{p}$  n'est plus la partie sphérique du tenseur des contraintes et qu'elle est différente de  $p$ . ◀

### Théorème 13.3: Existence et unicité du problème continu

Sous les conditions suivantes :

- la forme bilinéaire  $a$  vérifie  $a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq 0 \forall \mathbf{w} \in V$  et est coercive sur  $\ker B$  :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \alpha \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{w} \in \ker B \quad (13.7)$$

- la forme bilinéaire  $c$  est symétrique et telle que :  $c(q, q) \geq 0 \forall q \in Q$  ;
- il existe une constante positive  $\beta$  telle que la forme bilinéaire  $b$  vérifie :

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{w} \in V} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|q\|_{0,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}} \geq \beta \quad (13.8)$$

alors la solution  $(\mathbf{u}, p)$  du problème d'élasticité linéaire isotrope 13.6 est unique dans  $V \times Q$ .

**Démonstration :** Voir Brezzi-Fortin [11].

**Remarque 13.4.** Contrairement au problème de Stokes, la forme bilinéaire  $a$  n'est coercive que sur  $\ker B$ . La condition *inf-sup* est par contre la même. La présence de la forme bilinéaire  $c$  permet d'assurer l'unicité de la pression  $p$ . ◀

## 13.2 Cas anisotrope

Le cas général des matériaux anisotropes est plus difficile mais est tout de même d'une grande importance. De nombreux matériaux ne sont pas isotropes. Le bois, par exemple est un matériau orthotrope et ses propriétés ne sont de toute évidence pas les mêmes dans toutes les directions.

L'analyse qui suit couvre tous les cas, y compris bien sûr les matériaux isotropes. Nous suivrons l'approche de Bathe et Sussman [57] qui nous mènera à la description des matériaux dit *semi-déformables*. Le point de départ est encore ici la relation contraintes-déformations que l'on suppose sous sa forme la plus générale, soit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = C_{ijkl} \gamma_{kl}$$

**Remarque 13.5.** Le tenseur d'élasticité d'ordre 4  $\mathbf{C}$  n'est pas tout-à-fait quelconque. On montre en effet que ce tenseur dérive généralement d'un potentiel  $\Phi$  suivant une expression de la forme :

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}$$

Puisque  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ , on en conclut immédiatement les propriétés de symétrie de ce tenseur :

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{ijlk} = \mathcal{C}_{klij}$$

Le tenseur  $\mathbf{C}$  possède donc au plus 21 composantes différentes et éventuellement non nulles. ◀

Nous souhaitons en arriver à une décomposition similaire à celle de la relation 13.4 pour les matériaux isotropes. Pour ce faire, on pose :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = (\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - p\tilde{\mathbf{I}} = \boldsymbol{\tau} - p\tilde{\mathbf{I}} \quad (13.9)$$

où  $\tilde{\mathbf{I}}$  et  $\tilde{\mathbf{C}}$  sont les tenseurs respectivement d'ordre 2 et 4 définis par les relations<sup>1</sup> :

$$\tilde{\mathcal{C}}_{ijkl} = \frac{\mathcal{C}_{aaij}\mathcal{C}_{bbkl}}{\mathcal{C}_{aabb}} \quad \text{et} \quad \tilde{I}_{ij} = \frac{3\mathcal{C}_{aaij}}{\mathcal{C}_{aabb}}$$

Pour que  $\boldsymbol{\sigma}$  soit toujours égal à  $\mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ , la pression doit vérifier :

$$p\tilde{\mathbf{I}} = -\tilde{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \quad \text{ou encore} \quad p\tilde{I}_{ij} = -\tilde{\mathcal{C}}_{ijkl}\gamma_{kl}$$

qui peut encore s'écrire :

$$p \left( \frac{3\mathcal{C}_{aaij}}{\mathcal{C}_{aabb}} \right) = -\frac{\mathcal{C}_{aaij}\mathcal{C}_{bbkl}}{\mathcal{C}_{aabb}} \gamma_{kl}$$

ce qui entraîne que :

$$p = -\frac{\mathcal{C}_{aakl}\gamma_{kl}}{3}$$

ce qui devient enfin :

$$p = -\frac{\mathcal{C}_{aabb}}{9} \left( \frac{3\mathcal{C}_{aakl}}{\mathcal{C}_{aabb}} \right) \gamma_{kl} = -\left( \frac{\mathcal{C}_{aabb}}{9} \right) \tilde{\mathbf{I}} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$$

À l'aide de ces dernières expressions, on constate aisément que la relation 13.9 n'est qu'un réarrangement du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  permettant d'introduire la pression. Plusieurs remarques s'imposent dès maintenant.

**Remarque 13.6.**

1.  $\mathcal{C}_{aabb} = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \mathcal{C}_{aabb}$  est un scalaire et non un tenseur.

---

1. Rappelons que l'on utilise ici la notation d'Einstein sur les indices répétés.

2. Puisque

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \quad \text{ou encore} \quad \tau_{ij} = (\mathcal{C}_{ijkl} - \tilde{\mathcal{C}}_{ijkl})\gamma_{kl}$$

on a alors :

$$\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \tau_{ii} = \left( \mathcal{C}_{iikl} - \tilde{\mathcal{C}}_{iikl} \right) \gamma_{kl} = \left( \mathcal{C}_{iikl} - \frac{\mathcal{C}_{aaii}\mathcal{C}_{aakl}}{\mathcal{C}_{aabb}} \right) \gamma_{kl} = 0$$

et le tenseur  $\boldsymbol{\tau}$  est de trace nulle.

◀

**Remarque 13.7.** Dans le cas isotrope, la relation contraintes-déformations prend la forme de l'équation 11.9 et on a :

1. La constante  $\mathcal{C}_{aabb}$  devient :

$$\mathcal{C}_{aabb} = \lambda I_{aa} I_{bb} + \mu(2I_{ab} I_{ab}) = 9\lambda + 6\mu$$

2. Le tenseur  $\tilde{\mathbf{I}}$  est égal au tenseur  $\mathbf{I}$ . En effet :

$$\tilde{I}_{ij} = \frac{3\mathcal{C}_{aaij}}{\mathcal{C}_{aabb}} = \frac{\lambda I_{aa} I_{ij} + 2\mu I_{ai} I_{aj}}{3\lambda + 2\mu} = \frac{3\lambda I_{ij} + 2\mu I_{ij}}{3\lambda + 2\mu} = I_{ij}$$

3. La pression devient :

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\mathcal{C}_{aakl}\gamma_{kl}}{3} = -\frac{(\lambda I_{aa} I_{kl} + 2\mu I_{ak} I_{al})\gamma_{kl}}{3} \\ &= -\frac{3\lambda I_{kl}\gamma_{kl} + 2\mu I_{kl}\gamma_{kl}}{3} = -\frac{(3\lambda + 2\mu)\text{tr}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}))}{3} \\ &= -k \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

◀

Le système mixte dans le cas anisotrope peut maintenant s'écrire :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} \cdot [(\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - p\tilde{\mathbf{I}}] &= \mathbf{r} \\ -\frac{9}{\mathcal{C}_{aabb}}p - (\tilde{\mathbf{I}} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) &= 0 \end{cases}$$

qui est une généralisation de la forme variationnelle 13.6. Multipliant ces 2 équations par des fonctions tests  $\mathbf{w}$  et  $q$  et intégrant par parties, on trouve la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})] : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv &- \int_{\Omega} p\tilde{\mathbf{I}} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv \\ - \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{I}} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}))q \, dv &- \frac{9}{\mathcal{C}_{aabb}} \int_{\Omega} pq \, dv &= 0 \end{aligned}$$

et on retrouve encore la forme 13.6, mais cette fois avec les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} [(\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})] : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) \, dv \\ b(\mathbf{w}, q) &= - \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{I}} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w})) q \, dv \\ c(p, q) &= \frac{9}{\mathcal{C}_{aabb}} \int_{\Omega} pq \, dv \end{aligned}$$

**Remarque 13.8.** Selon Bathe et Sussman [57], ce sont les matériaux pour lesquels la constante :

$$\frac{9}{\mathcal{C}_{aabb}}$$

tend vers l'infini qui requièrent l'emploi de méthodes mixtes. ◀

## 13.3 Résultats numériques

### 13.3.1 Plaque trouée en élongation

Nous avons déjà vu ce problème au chapitre 11 (voir la figure 11.3) et nous l'avons résolu par une méthode en déplacements seulement. Cette formulation avait alors montré ses faiblesses dans le cas où  $\nu$  approchait 0,5 c.-à-d. dans le cas d'un matériau quasi-incompressible. Nous reprenons cette fois la résolution mais avec une méthode mixte. Nous utiliserons un élément triangulaire à 6 noeuds (quadratique) pour la vitesse et un élément à 3 noeuds (linéaire) pour la pression. C'est l'élément de Taylor-Hood utilisé en mécanique des fluides pour le problème de Stokes (voir la figure 12.3).

Les figures 13.1 à 13.2 reprennent celles du chapitre 11 en ajoutant au passage la pression (absente en formulation déplacements).

Contrairement à la formulation en déplacements seulement, la formulation mixte donne d'excellents résultats, même pour  $\nu = 0,499\,999\,99$  comme on peut le constater à la figure 13.4

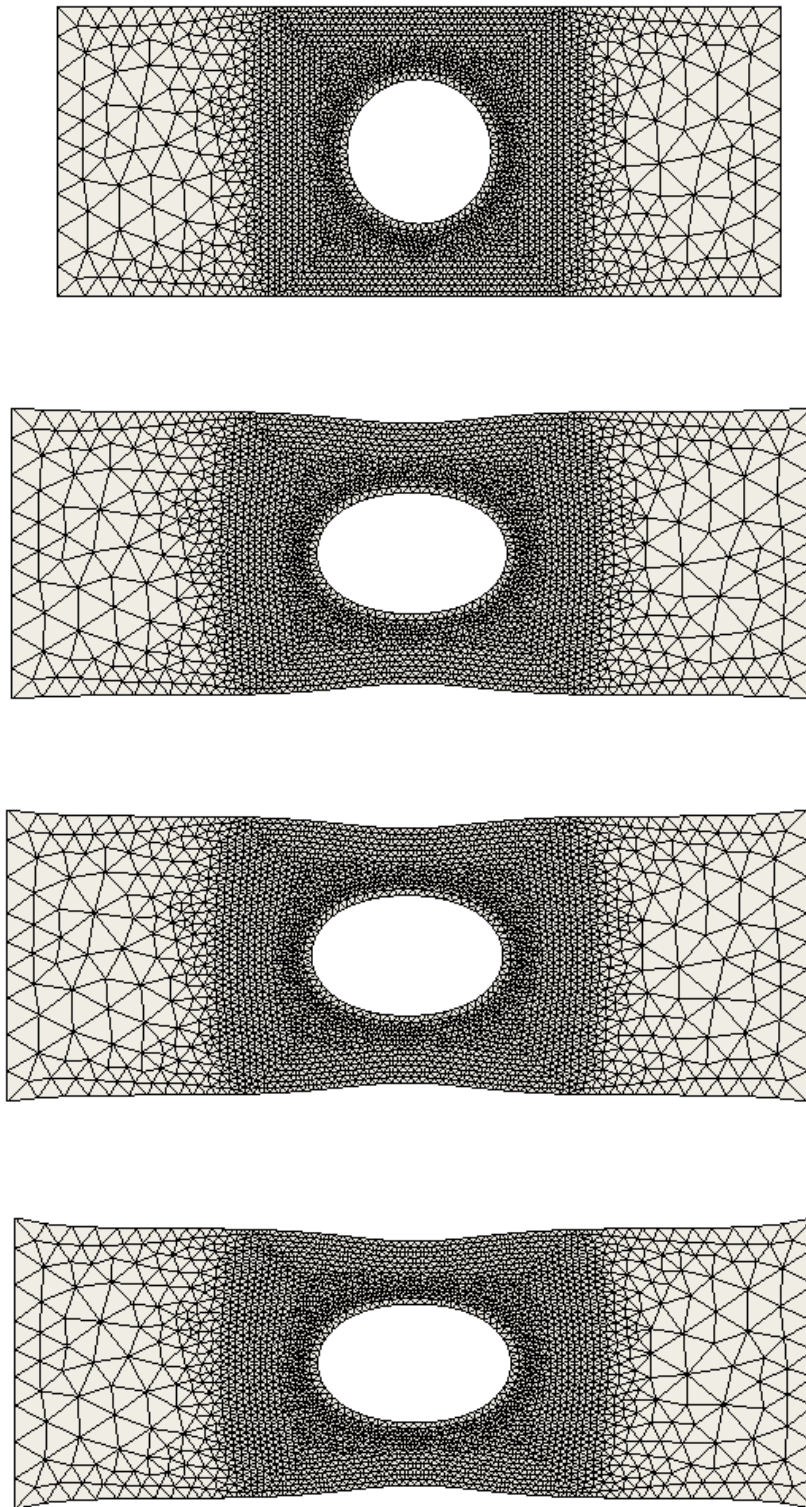


Figure 13.1 – Maillages initial et déformés pour  $\nu = 0,3$ ,  $\nu = 0,4$  et  $\nu = 0,4999$

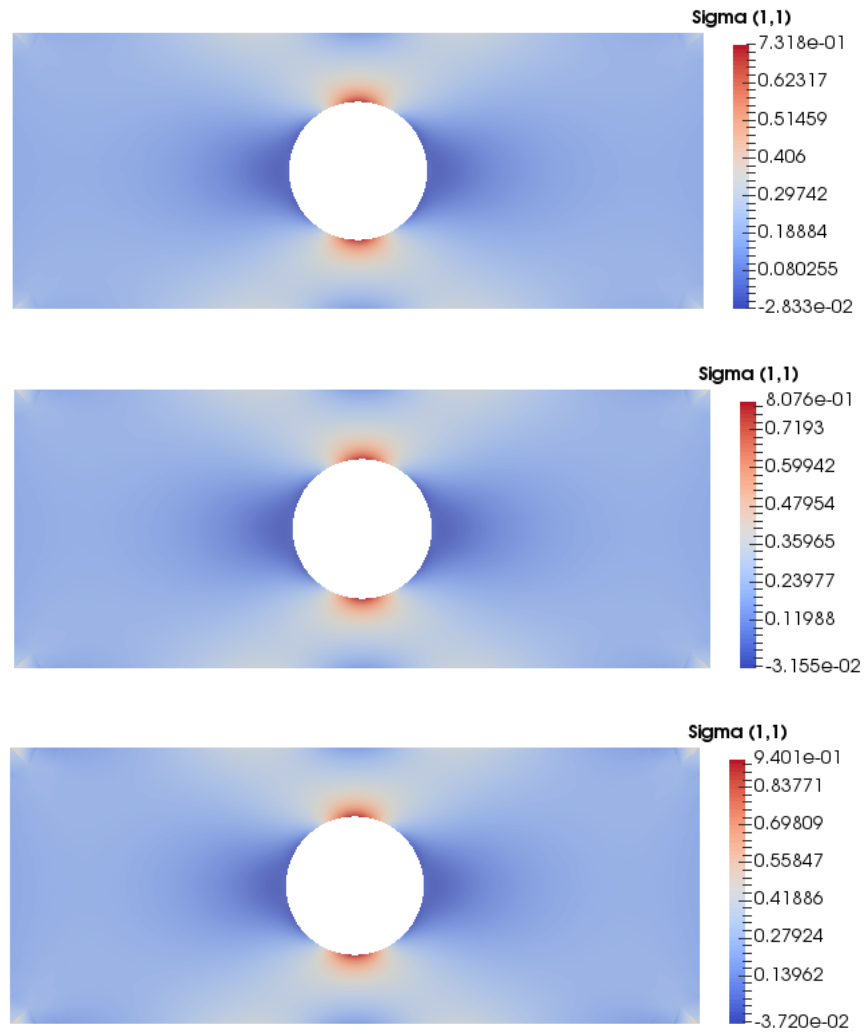


Figure 13.2 – Contrainte  $\sigma_{11}$  pour  $\nu = 0,3$ ,  $\nu = 0,4$  et  $\nu = 0,4999$

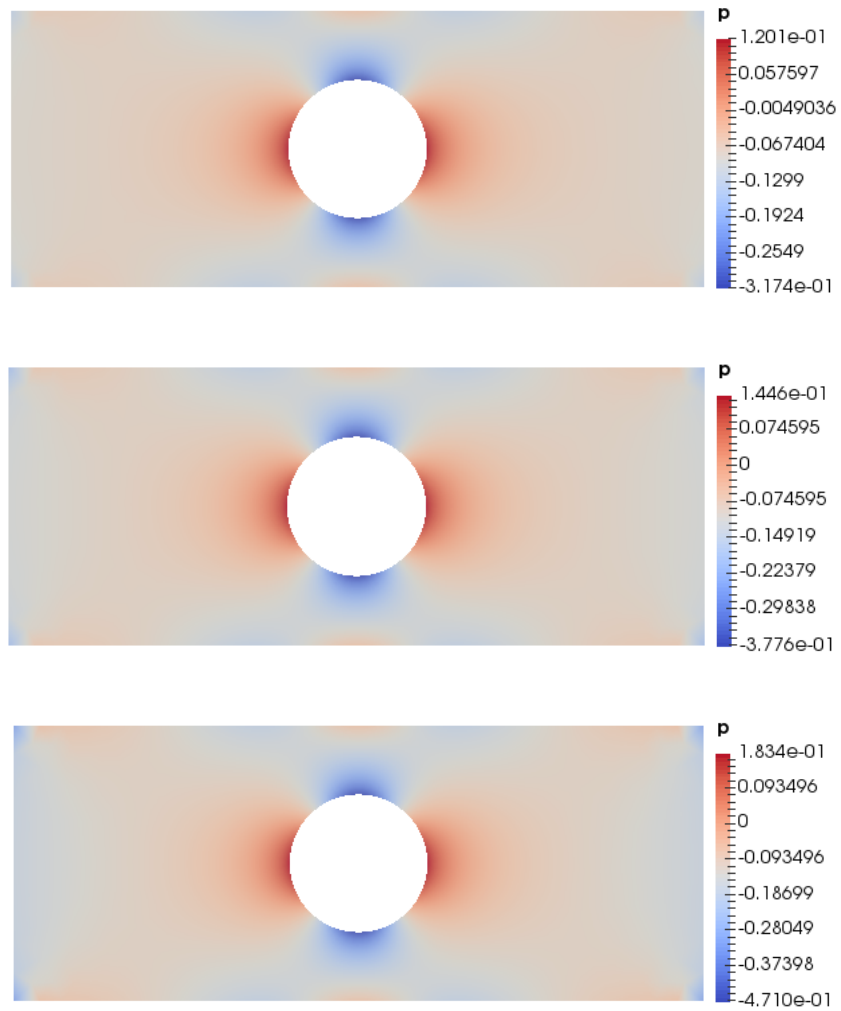


Figure 13.3 – Champs de pression pour  $\nu = 0,3$ ,  $\nu = 0,4$  et  $\nu = 0,4999$



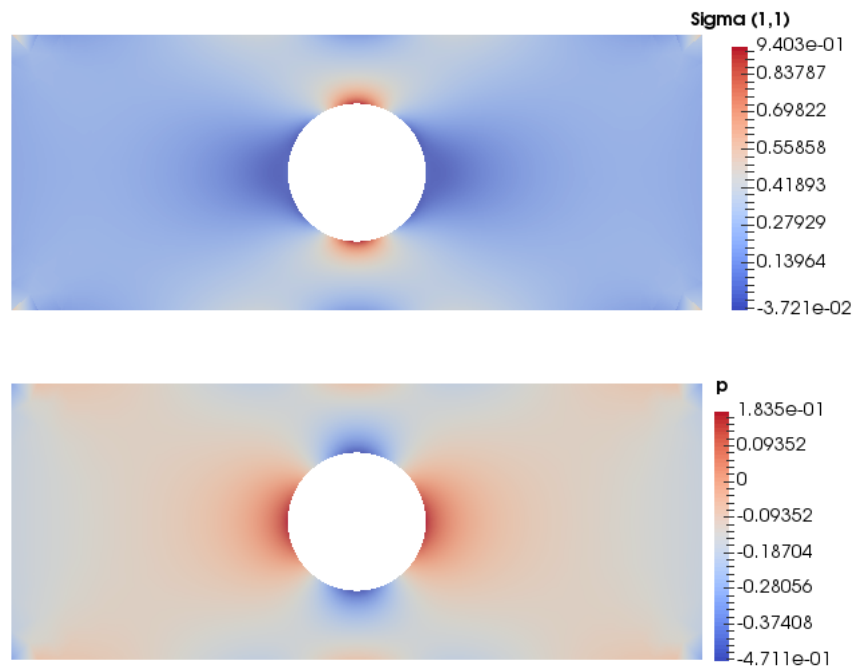


Figure 13.4 – Contrainte  $\sigma_{11}$  et pression pour  $\nu = 0,499\ 999\ 99$

## 13.4 Exercices

1. La définition du tenseur des contraintes en élasticité linéaire du chapitre 11 nous donne :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$$

Poser  $p = -\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})$  et obtenir une nouvelle formulation mixte du problème d'élasticité linéaire (légèrement différente du système 13.6). Discuter de l'existence et de l'unicité de la solution.

## Chapitre 14

# Matériaux en grandes déformations

### 14.1 Introduction

Nous avons vu jusqu'à maintenant plusieurs applications de la méthode des éléments finis qui se caractérisaient toutes par un domaine de calcul fixe (noté  $\Omega$ ). En y regardant cependant de plus près, on découvre que ce n'était pas tout-à-fait le cas. En effet, les problèmes en élasticité linéaire rencontrés aux chapitres 11 et 13 entraînent une déformation du domaine  $\Omega$ . Cette déformation était supposée faible de sorte que, dans les formulations variationnelles, toutes les intégrales portaient quand même sur le domaine non déformé  $\Omega$ . Dans le cas des problèmes dits en grandes déformations, cette simplification n'est plus possible. Ces déformations entraînent des non-linéarités géométriques importantes. La normale à la géométrie n'est plus constante mais varie en fonction de la déformation. Par exemple, un pneu qui s'aplatit au contact de la route subit une déformation significative par rapport à sa forme circulaire initiale et on ne peut négliger l'évolution du domaine en fonction de la charge imposée. C'est l'objet de ce chapitre.

Le problème consiste à calculer la déformation d'un corps de forme initiale  $\Omega^0$  lorsqu'il est soumis à des déplacements et des contraintes externes. Nous ne considérerons pour le moment que les matériaux hyperélastiques. Au préalable, il nous faut introduire plusieurs concepts nouveaux qui nous permettront d'aborder les formulations variationnelles en grandes déformations.

### 14.2 Déformations et tenseurs associés

Nous noterons  $\Omega^0$  le domaine initial et  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$  un point matériel de ce domaine. Au fil du temps, le domaine  $\Omega^0$  se déplace et se déforme et le domaine ainsi déformé sera noté  $\Omega^t$  (la notation indiquant la dépendance par rapport au temps). Le point correspondant à  $\mathbf{X}$  dans cette nouvelle configuration sera noté  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = (x_1(\mathbf{X}, t), x_2(\mathbf{X}, t), x_3(\mathbf{X}, t))^\top$ . L'indice supérieur  $^\top$  dénote la transposée de sorte que les points et vecteurs sont représentés par des matrices colonnes 3 par 1. La particule initialement située en  $\mathbf{X}$  dans la configuration initiale  $\Omega^0$  sera donc située en  $\mathbf{x}$  dans la configuration  $\Omega^t$  au temps  $t$ . Le point matériel  $\mathbf{X}$  a donc subi un déplacement

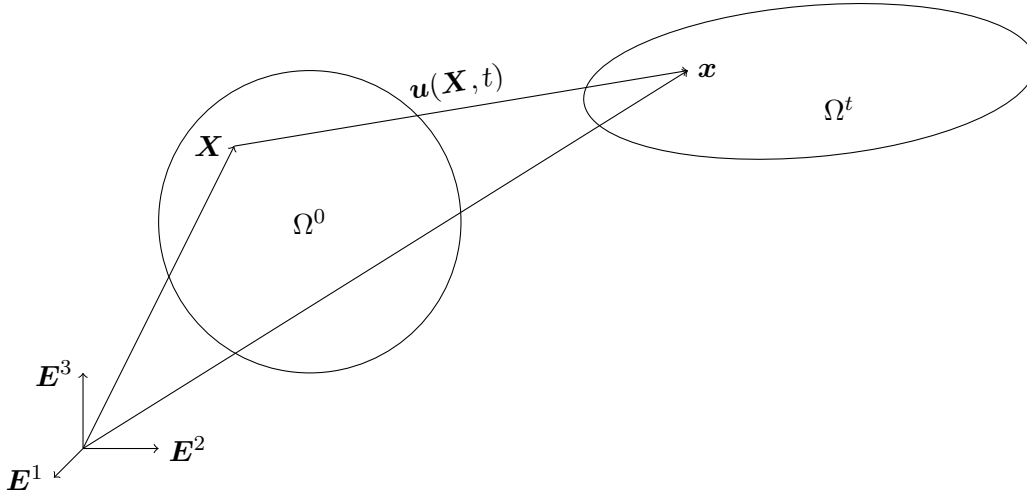


Figure 14.1 – Description cinématique

$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ , que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x_1(\mathbf{X}, t) \\ x_2(\mathbf{X}, t) \\ x_3(\mathbf{X}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(\mathbf{X}, t) \\ u_2(\mathbf{X}, t) \\ u_3(\mathbf{X}, t) \end{bmatrix} \quad (14.1)$$

Des éléments de longueur  $d\mathbf{X}$ , de surface  $dA$  ou de volume  $dV$  dans la configuration initiale  $\Omega^0$  seront transformés respectivement en  $d\mathbf{x}$ ,  $da$  et  $dv$  dans la configuration déformée  $\Omega^t$ . La clé de ces transformations est le tenseur *gradient de déformation* défini par :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad \text{dont l'inverse est } \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (14.2)$$

Nous supposons que le tenseur gradient de déformation est toujours inversible et nous notons  $J$  son déterminant et  $F_{ij}$  ses composantes. En pratique, on calculera le déplacement  $\mathbf{u}$  de sorte qu'il convient d'utiliser la relation 14.1 et d'exprimer le tenseur gradient de déformation en fonction du tenseur gradient des déplacements :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} \quad (14.3)$$

L'indice inférieur dans le symbole  $\nabla_{\mathbf{X}}$  indique que les dérivées sont prises par rapport aux variables

$X_i$  c.-à-d. dans la configuration initiale. On a ainsi :

$$(\nabla_X \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

dont la partie symétrique :

$$\gamma_X(\mathbf{u}) = \frac{\nabla_X \mathbf{u} + \nabla_X^\top \mathbf{u}}{2}$$

est le tenseur de déformation que nous avons rencontré dans le cas des petites déformations (voir le chapitre 11). Par dérivation en chaîne, on a :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}$$

de sorte que :

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla_X \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{ou encore} \quad \nabla_X \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \quad (14.4)$$

Il en résulte que le tenseur de déformation  $\gamma(\mathbf{u})$  peut s'écrire :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^\top \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla_X \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-\top} \cdot \nabla_X^\top \mathbf{u}) \quad (14.5)$$

En multipliant la relation (14.3) de chaque côté par  $\mathbf{F}^{-1}$ , on a de plus que :

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u} \quad (14.6)$$

Le tenseur  $\mathbf{F}$  permet de suivre l'évolution de la déformation de la géométrie initiale. Ainsi, un élément de longueur  $d\mathbf{X} = (dX_1, dX_2, dX_3)^\top$  de la géométrie initiale sera transformé en un élément de longueur  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)^\top$  sur la géométrie déformée. De plus, puisque :

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$$

on a immédiatement que :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

La longueur  $dl$  de l'élément  $d\mathbf{X}$  sera modifiée pour devenir :

$$(dl)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}) = (\mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X}$$

par définition de la transposée d'un tenseur (voir l'annexe D pour quelques rappels sur les tenseurs) et où on a introduit le tenseur de Cauchy-Green  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  qui jouera un rôle important par la suite.<sup>1</sup> Notons au passage que ce tenseur est symétrique, contrairement au tenseur gradient de déformation  $\mathbf{F}$ .

1. Le symbole « $\cdot$ » désigne le produit contracté de deux tenseurs ou le produit d'un tenseur et d'un vecteur.

De même, si on considère maintenant deux éléments de longueur  $d\mathbf{X}^1$  et  $d\mathbf{X}^2$  (non colinéaires), on peut définir un élément de surface  $d\mathbf{A} = d\mathbf{X}^1 \wedge d\mathbf{X}^2$  ( $\wedge$  étant le produit vectoriel). On a ainsi :

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{X}^1 \wedge d\mathbf{X}^2 = \frac{d\mathbf{X}^1 \wedge d\mathbf{X}^2}{\|d\mathbf{X}^1 \wedge d\mathbf{X}^2\|} \|d\mathbf{X}^1 \wedge d\mathbf{X}^2\| = \mathbf{N}dA$$

en rappelant que le produit vectoriel donne un vecteur orthogonal à  $d\mathbf{X}^1$  et  $d\mathbf{X}^2$  et que le module du produit vectoriel n'est autre que l'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs. On remarquera de plus la différence entre l'élément d'aire orienté  $d\mathbf{A}$  (un vecteur) et son aire  $dA$  (un scalaire).

### Lemme 14.1: Changement de volume

Un élément de volume  $dV$  de la configuration initiale sera transformé en un élément de volume  $dv$  de la configuration déformée suivant la formule classique de changement de variables :

$$dv = \det(\mathbf{F}) dV = J dV \quad \text{ou encore} \quad d\mathbf{x}^1 \cdot (d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3) = J d\mathbf{X}^1 \cdot (d\mathbf{X}^2 \wedge d\mathbf{X}^3) \quad (14.7)$$

*Démonstration.* Un élément de volume de la configuration initiale sera de la forme  $d\mathbf{X}^1 \cdot (d\mathbf{X}^2 \wedge d\mathbf{X}^3)$  où  $d\mathbf{X}^1 = dX^1 \mathbf{E}^1$ ,  $d\mathbf{X}^2 = dX^2 \mathbf{E}^2$  et  $d\mathbf{X}^3 = dX^3 \mathbf{E}^3$ , les  $\mathbf{E}^i$  étant les vecteurs unitaires illustrés à la Figure 14.1. On a alors que  $d\mathbf{x}^i = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i} dX^i$  de sorte que :

$$d\mathbf{x}^1 \cdot (d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^1} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^2} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^3} \right) dX^1 dX^2 dX^3$$

et le produit mixte à droite n'est rien d'autre que le déterminant de la transformation. ■

De même, un élément d'aire orientée  $d\mathbf{A} = \mathbf{N}dA$  et sa normale  $\mathbf{N}$  sur la géométrie initiale (non déformée) seront transformés respectivement en  $d\mathbf{a} = \mathbf{n}da$  et  $\mathbf{n}$  sur la géométrie actuelle (déformée) selon la formule de Nanson que nous allons démontrer.

### Lemme 14.2: Formule de Nanson

Un élément d'aire orientée se transforme suivant la relation :

$$d\mathbf{a} = J(\mathbf{X}) \mathbf{F}^{-\top} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{n} da = J(\mathbf{X}) \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} dA \quad (14.8)$$

*Démonstration.* Puisque  $dv = J dV$ , on a :

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{a} = J d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{A}$$

et puisque  $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$  :

$$(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{a} = J d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{ou encore} \quad d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^\top \cdot d\mathbf{a}) = J d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{A}$$

pour tout vecteur  $d\mathbf{X}$ . On a ainsi :

$$\mathbf{F}^\top \cdot d\mathbf{a} = J dA$$

d'où le résultat. ■

### Lemme 14.3: Formule de Piola

L'opérateur de divergence se transforme d'une géométrie à l'autre suivant les relations :

1) Pour un vecteur  $\mathbf{w}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\nabla_X \cdot \mathbf{W}}{J} \text{ où } \mathbf{W} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{w} \quad (14.9)$$

2) Pour un tenseur  $\mathbf{T}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\nabla_X \cdot \mathbf{T}_0}{J} \text{ où } \mathbf{T}_0 = J\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (14.10)$$

*Démonstration.* Le résultat découle de la formule de Nanson et du théorème de la divergence. On a en effet :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^t} \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv &= \int_{\Gamma^t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Gamma^0} \mathbf{w} \cdot (J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}) \, dA = \int_{\Gamma^0} J(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{N} \, dA = \int_{\Gamma^0} \mathbf{W} \cdot \mathbf{N} \, dA \\ &= \int_{\Omega^0} \nabla_X \cdot \mathbf{W} \, dV = \int_{\Omega^t} \frac{\nabla_X \cdot \mathbf{W}}{J} \, dv \end{aligned}$$

et on obtient le résultat car  $\Omega^t$  est quelconque. La démonstration est identique pour les tenseurs. ■

### Lemme 14.4: Jacobien surfacique et évolution de la normale

Le rapport des aires entre des éléments de surface déformée et non déformée  $da/dA$  est appelé le *jacobien surfacique* que l'on note  $J_s$  et qui s'écrit :

$$J_s = \frac{da}{dA} = J \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}\| = J \sqrt{(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}} = \frac{J}{\sqrt{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}}} \quad (14.11)$$

De plus, la normale à la configuration déformée  $\mathbf{n}$  évolue à partir de la normale à la configuration initiale  $\mathbf{N}$  suivant la formule :

$$\mathbf{n} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \frac{dA}{da} = \frac{J}{J_s} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}) \quad (14.12)$$

*Démonstration.* De la formule de Nanson 14.8, on a  $\mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} dA$  de sorte qu'en prenant la norme de chaque côté, on a d'une part :

$$da = J \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}\| dA \quad \text{ou encore} \quad \frac{da}{dA} = J \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}\|$$

et d'autre part :

$$\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}\|^2 = (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) = (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}$$

d'où :

$$\frac{da}{dA} = J \sqrt{(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}} \quad \text{et par un calcul similaire} \quad \frac{da}{dA} = \frac{J}{\sqrt{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}}}$$

■

#### Lemme 14.5: Évolution de la masse volumique

Puisqu'il n'y a aucune perte de masse au cours de la déformation du corps, la masse volumique  $\rho$  évolue suivant la formule :

$$\rho_0 dV = \rho dv = \rho J dV \quad \text{ou encore} \quad \rho = \frac{\rho_0}{J} \quad (14.13)$$

de sorte que si dét  $\mathbf{F} = J = 1$ , la masse volumique reste constante.

#### Théorème 14.6: de transport de Reynolds

Soit  $\Omega^t$  un domaine se déplaçant dans le temps à une vitesse  $\mathbf{v}$  et  $f$  une fonction régulière. On a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega^t} \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) dv = \int_{\Omega^t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\Omega^t} f\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (14.14)$$

*Démonstration.* La difficulté provient du domaine d'intégration qui varie dans le temps. On contourne



cette difficulté en se ramenant sur le domaine de référence  $\Omega^0$  qui lui est constant.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(\mathbf{x}, t) dv &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega^0} f(\mathbf{x}, t) J dV = \int_{\Omega^0} \frac{d}{dt} (f(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{X}, t)) dV \\
&= \int_{\Omega^0} J \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) + f \frac{d}{dt} J dV \\
&= \int_{\Omega^0} J \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) + f \frac{d}{dt} J dV \\
&= \int_{\Omega^0} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \right) J + f J \nabla \cdot \mathbf{v} dV \quad (\text{voir le lemme D.19}) \\
&= \int_{\Omega^0} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right) J dV \\
&= \int_{\Omega^t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right) dv
\end{aligned}$$

et la dernière égalité de 14.14 provient du théorème de la divergence A.1. ■

### 14.3 Tenseurs de Green-Lagrange et Piola-Kirchhoff

Les lois de comportement du matériau reliant les contraintes aux déformations sont d'une grande complexité. Nous introduirons dans ce qui suit les tenseurs de Green-Lagrange et de Piola-Kirchhoff apparaissant dans ces lois de comportement. Nous discutons d'abord d'un résultat de décomposition des tenseurs d'ordre 2.

#### Théorème 14.7: Décomposition polaire

Tout tenseur peut s'écrire comme le produit d'un tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  orthogonal ( $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I}$ ) et d'un tenseur d'élongation  $\mathbf{U}$  (symétrique et défini positif) ou, dans l'ordre inverse, d'un tenseur d'élongation symétrique et défini positif  $\mathbf{V}$  et d'un tenseur de rotation  $\mathbf{R}$ . En particulier, le tenseur de déformation  $\mathbf{F}$  peut être factorisé sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathbf{F}$  est inversible, le tenseur  $\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  est symétrique et défini positif de sorte qu'il peut être diagonalisé. On a donc :

$$\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \Lambda^2 \cdot \mathbf{Q}^\top \quad (14.15)$$

où  $\mathbf{Q}$  est un tenseur orthogonal ( $\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}$ ),  $\mathbf{\Lambda}$  est un tenseur diagonal contenant la racine carrée des valeurs propres de  $\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  (puisqu'elles sont toutes strictement positives). On pose maintenant :

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^\top \quad \text{d'où} \quad \mathbf{U}^2 = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^\top)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^\top) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}^2 \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C}$$

Le tenseur  $\mathbf{U}$  est de toute évidence symétrique et défini positif et est en quelque sorte la racine carrée de  $\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$ . Posant maintenant  $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ , on constate que ce nouveau tenseur est orthogonal. En effet :

$$\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} = \mathbf{U}^{-\top} \cdot (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{Q}^{-\top} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}^2 \cdot \mathbf{Q}^\top) \cdot (\mathbf{Q}^{-\top} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{U}^{-\top} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$$

puisque  $\mathbf{U}$  est symétrique. Suivant ces définitions, on a bien  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$  et en définissant le tenseur symétrique  $\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^\top$ , on a bien  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$ . De plus,

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^\top = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{R}^\top = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q})^\top$$

ce qui permet de conclure que  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  possèdent les mêmes valeurs propres mais que les vecteurs propres de  $\mathbf{V}$  sont obtenus en effectuant une rotation des vecteurs propres de  $\mathbf{U}$ . ■

#### Définition 14.8: Tenseur de Green-Lagrange

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange, noté  $\mathbf{E}$ , est défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I})$$

et le tenseur de Green-Lagrange est donc insensible aux rotations puisqu'il ne dépend pas de  $\mathbf{R}$  (contrairement au tenseur de déformation  $\mathbf{F}$ ).

On peut de plus exprimer le tenseur de Green-Lagrange en fonction des composantes du déplacement. En effet, on a en vertu de la relation 14.3 :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( (\mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u})^\top \cdot (\mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}) - \mathbf{I} \right)$$

et on obtient immédiatement l'expression :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \nabla_X \mathbf{u} + \nabla_X^\top \mathbf{u} + \nabla_X^\top \mathbf{u} \cdot \nabla_X \mathbf{u} \right) = \gamma_X(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla_X^\top \mathbf{u} \cdot \nabla_X \mathbf{u} \quad (14.16)$$

**Remarque 14.9.** Lorsque les déformations sont petites, on peut négliger les termes d'ordre 2 dans le tenseur de Green-Lagrange de sorte que :

$$\mathbf{E} \simeq \frac{1}{2} \left( \nabla_X \mathbf{u} + \nabla_X^\top \mathbf{u} \right) = \gamma_X(\mathbf{u})$$

C'est cette expression qui a été utilisée en élasticité linéaire. D'autre part, l'expression 14.16 est bien une égalité, en ce sens qu'aucun terme n'a été négligé. ◀

Le tenseur le plus important est sans doute le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , qui agit sur la configuration déformée  $\Omega^t$ . C'est donc ce tenseur que nous essaierons d'évaluer. Il est cependant difficile de le manipuler directement puisque la géométrie varie constamment. Il est donc souvent préférable de revenir sur la configuration initiale  $\Omega^0$  et y définir des tenseurs *de passage*, qui nous permettront éventuellement de calculer  $\boldsymbol{\sigma}$ .

#### Définition 14.10: Tenseur de Cauchy

Si  $d\mathbf{f}$  désigne un élément de force agissant sur un élément de surface  $da$  de normale  $\mathbf{n}$  de  $\Omega^t$ , le tenseur de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est celui qui vérifie :

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da \quad \text{ou encore} \quad \frac{d\mathbf{f}}{da} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (14.17)$$

#### Définition 14.11: Premier tenseur de Piola-Kirchhoff

Si  $d\mathbf{f}$  désigne un élément de force agissant sur un élément de surface  $da$  de normale  $\mathbf{n}$  de  $\Omega^t$ , alors on définit le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\Pi}$  par la relation :

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{N} dA \quad (14.18)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{d\mathbf{f}}{dA} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{N}$$

de sorte que le premier tenseur de Piola-Kirchhoff exprime une force sur la configuration actuelle par unité d'aire non déformée.

#### Définition 14.12: Deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff

Si  $d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da$  désigne un élément de force agissant sur un élément de surface  $da$  de normale  $\mathbf{n}$  de  $\Omega^t$ . À  $d\mathbf{f}$ , on associe un élément de force fictif (voir [5])  $d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}$  agissant sur l'élément d'aire non déformée  $dA$ . On définit alors sur la configuration initiale  $\Omega^0$ , le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  comme le tenseur vérifiant :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{N} dA = d\mathbf{f}_0 \quad (14.19)$$

Il s'agit donc d'une force sur la configuration initiale par unité d'aire non déformée.

Une comparaison des relations 14.17 et 14.19 montrent bien la similarité des rôles de  $\boldsymbol{\sigma}$  sur  $\Omega^t$  et de  $\mathbf{S}$  sur  $\Omega^0$ .

**Lemme 14.13**

Les premier et deuxième tenseurs de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{S}$  sont reliés par la relation :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \quad (14.20)$$

*Démonstration.* On a d'une part :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N} dA$$

et d'autre part :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} dA$$

En soustrayant les deux dernières expressions, on trouve le résultat puisque  $\mathbf{N} dA$  est arbitraire. ■

Il nous faut également relier entre eux le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  sur la géométrie actuelle  $\Omega^t$ , au deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff. C'est l'objet du prochain résultat.

**Lemme 14.14**

Le passage entre le tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff s'effectue à travers la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad (14.21)$$

*Démonstration.* Par définition du deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff, on a d'une part :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{N} dA)$$

et d'autre part, par la formule de Nanson, on a :

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot (J \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\mathbf{N} dA))$$

Soustrayant ces deux dernières relations, on trouve :

$$(J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\top} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{N} dA) = 0$$

d'où le résultat puisqu'ici encore  $\mathbf{N} dA$  est arbitraire. ■

**Lemme 14.15**

Le tenseur de Cauchy et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff sont liés par les relations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{F}^\top \quad \text{ou encore} \quad \boldsymbol{\Pi} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad (14.22)$$

**Démonstration** : immédiate

## 14.4 Matériaux hyperélastiques

Les matériaux hyperélastiques couvrent une vaste gamme d'applications notamment dans le domaine du pneumatique. Nous allons procéder dans un cadre assez général et nous verrons, dans un premier temps, les modèles de base (Saint-Venant-Kirchhoff, néo-hookéen) et nous nous attarderons par la suite aux matériaux hyperélastiques incompressibles.

Pour un matériau hyperélastique, le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff découle d'un potentiel d'énergie  $\Psi$  de déformation comme suit :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur de Cauchy-Green. Le potentiel  $\Psi$  dépend donc de  $\mathbf{C}$  (et donc de  $\mathbf{E}$ ) et nous l'exprimerons en fonction de ses invariants (ou de ceux de  $\mathbf{E}$ ) :

$$\begin{cases} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) = C_{kk} \\ I_2 &= \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C})) = \frac{1}{2} (I_1^2 - \mathbf{C} : \mathbf{C}) \\ I_3 &= \det \mathbf{C} = \det \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = J^2 \end{cases}$$

On remarque que  $\mathbf{C} : \mathbf{C} = I_1^2 - 2I_2$  est aussi un invariant. On supposera donc une relation de la forme :

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3)$$

Le potentiel élastique exprimé ainsi est indépendant de la base utilisée. Le tenseur de Piola-Kirchhoff devient donc :

$$\mathbf{S} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{E}} \right) = 2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right)$$

relation qui fait intervenir les dérivées des invariants dont on trouve les expressions à l'équation D.17 de l'annexe D. On a ainsi :

$$\mathbf{S} = 2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} I_3 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (14.23)$$

### Modèle de Saint-Venant-Kirchhoff

Le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff est la généralisation aux grandes déformations du modèle utilisé en élasticité linéaire (petites déformations). Le potentiel d'énergie prend la forme (voir par exemple Bonet et Wood [10]) :

$$\Psi = \frac{1}{2}\lambda(\text{tr}\mathbf{E})^2 + \mu(\mathbf{E}:\mathbf{E})$$

de sorte que :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}} = \lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}$$

Au moment de la linéarisation par la méthode de Newton, nous aurons besoin du tenseur d'élasticité d'ordre 4 :

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{E}\partial\mathbf{E}} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{E}}$$

On a alors en utilisant les dérivées secondes des invariants (voir l'équation D.18) :

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{E}}:\boldsymbol{\delta}_E = \lambda\left(\frac{\partial\text{tr}(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}}:\boldsymbol{\delta}_E\right)\mathbf{I} + 2\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{E}}:\boldsymbol{\delta}_E = \lambda(\mathbf{I}:\boldsymbol{\delta}_E)\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{I}}:\boldsymbol{\delta}_E = (\lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{I}}):\boldsymbol{\delta}_E$$

Le tenseur d'ordre 4  $\mathbf{C}$  a donc pour composantes :

$$C_{ijkl} = \lambda I_{ij}I_{kl} + 2\mu\left(\frac{I_{ik}I_{jl} + I_{il}I_{jk}}{2}\right)$$

résultat que nous avons déjà obtenu au chapitre 11 et qui montre bien que le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff est une généralisation du modèle d'élasticité linéaire<sup>2</sup>.

### Modèle néo-hookéen

Un autre modèle hyperélastique est le modèle néo-hookéen pour lequel le potentiel est de la forme (voir [10]) :

$$\Psi = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 - \mu \ln J = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{\lambda}{8}(\ln I_3)^2 - \frac{\mu}{2} \ln I_3$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} = 2\left(\frac{\mu}{2}\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{C}} + \frac{\lambda \ln I_3}{4I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\mathbf{C}} - \frac{\mu}{2I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\mathbf{C}}\right) \\ &= 2\left[\frac{\mu}{2}\mathbf{I} + \left(\frac{\lambda \ln(I_3)}{4}\mathbf{C}^{-1} - \frac{\mu}{2}\mathbf{C}^{-1}\right)\right] \quad \left(\text{puisque } \frac{\partial I_3}{\partial\mathbf{C}} = I_3\mathbf{C}^{-1}\right) \\ &= \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{\lambda}{2}(\ln I_3)\mathbf{C}^{-1} \end{aligned}$$

2. Voir l'annexe D pour la définition du tenseur  $\boldsymbol{\mathcal{I}}$  d'ordre 4.

et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} : \delta_C &= 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} : \delta_C \\
&= 2 \left\{ -\mu \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} : \delta_C + \frac{\lambda}{2} \left[ \left( \frac{\partial \ln(I_3)}{\partial \mathbf{C}} : \delta_C \right) \mathbf{C}^{-1} + \ln(I_3) \left( \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} : \delta_C \right) \right] \right\} \\
&= -2\mu \mathcal{J} : \delta_C + \lambda \left[ \left( \frac{1}{I_3} I_3 \mathbf{C}^{-1} : \delta_C \right) \mathbf{C}^{-1} + \ln(I_3) \mathcal{J} : \delta_C \right] \\
&= -2\mu \mathcal{J} : \delta_C + \lambda \left( \mathbf{C}^{-1} : \delta_C \right) \mathbf{C}^{-1} + \lambda \ln(I_3) \mathcal{J} : \delta_C \\
&= \left[ (\lambda \ln(I_3) - 2\mu) \mathcal{J} + \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] : \delta_C
\end{aligned}$$

(voir l'annexe D pour la définition du tenseur  $\mathcal{J}$  d'ordre 4).

**Remarque 14.16.** Si on considère le cas des petites déformations, on peut considérer le domaine comme constant et il n'y a plus de différences entre la variable  $\mathbf{X}$  sur la géométrie initiale et la variable  $\mathbf{x}$  de la géométrie déformée ( $\nabla_{\mathbf{X}} = \nabla$ ), ces deux géométries étant confondues. On peut aussi négliger les termes d'ordre 2 du tenseur de Cauchy-Green et on a :

$$\mathbf{C} = (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^\top \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \simeq \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$$

de sorte que :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) \simeq \text{tr}(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) = 3 + 2\nabla \cdot \mathbf{u}$$

De l'équation 14.6 pour  $\mathbf{F}^{-1}$  :

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} = (\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u})^\top \simeq \mathbf{I} - 2\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$$

De même :

$$J = \det \mathbf{F} \simeq 1 + \nabla \cdot \mathbf{u} \text{ d'où } p = -k(J - 1) \simeq -k(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

et on a ainsi, toujours en négligeant les termes d'ordre 2, le modèle néo-hookéan compressible devient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{\lambda}{2}(\ln I_3)\mathbf{C}^{-1} \\
&\simeq \mu(\mathbf{I} - \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) + \frac{\lambda}{2}2(\ln J)(\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) \\
&\simeq 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \lambda \ln(1 + \nabla \cdot \mathbf{u})(\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) \\
&\simeq 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \lambda \left( \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{2} + \dots \right) (\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) \\
&\simeq 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}
\end{aligned}$$

De plus, pour le tenseur des contraintes, on a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top \\
&\simeq \left( \frac{1}{1 + \nabla \cdot \mathbf{u}} \right) (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) (2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}) (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^\top \\
&\simeq (1 - \nabla \cdot \mathbf{u} + \dots) (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) (2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}) (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^\top \\
&\simeq 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}
\end{aligned}$$

en négligeant, encore une fois, les termes d'ordre 2. On montre ainsi que dans le cas des petites déformations,  $\boldsymbol{\sigma} \simeq \mathbf{S}$  qui correspond au modèle utilisé au chapitre 11. ◀

### Modèle d'Ogden

Le modèle d'Ogden se distingue des modèles précédents en ce sens que le potentiel est exprimé, non pas en fonction des invariants de  $\mathbf{C}$  mais directement en fonction de ses valeurs propres (notées  $L_i$ ). Il est alors approprié d'exprimer le tenseur de Piola-Kirchhoff dans la base de ses vecteurs propres (notés  $\mathbf{N}_i$ ). On a en effet :

$$\Psi = \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} \left( L_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_3^{\frac{\alpha_m}{2}} - 3 \right) \quad (14.24)$$

Les paramètres  $\mu_m$  et  $\alpha_m$  dépendent du matériau et  $N = 3$  dans le modèle de base le plus utilisé.

**Remarque 14.17.** Il existe des variantes de ce modèle. Celui présenté ici est similaire à celui présenté dans Bonet et Wood [10] de même que dans Sussman et Bathe [57]. Le modèle utilisé dans le logiciel Abaqus [] est de la forme :

$$\Psi = \sum_{m=1}^N \frac{2\nu_m}{\beta_m^2} \left( L_1^{\frac{\beta_m}{2}} + L_2^{\frac{\beta_m}{2}} + L_3^{\frac{\beta_m}{2}} - 3 \right)$$

et en comparant avec (14.24), on constate qu'il suffit de poser  $\alpha_m = \beta_m$  et  $\mu_m = 2\nu_m/\beta_m$  pour revenir au modèle initial. ◀

Il n'est donc plus possible, du moins pas facilement, de dériver le potentiel par rapport aux invariants. On commence donc par les exprimer en fonction des valeurs propres. On rappelle que :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) & = L_1 + L_2 + L_3 \\ I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C})) & = \frac{1}{2}(I_1^2 - (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)) = L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3 \\ I_3 = \text{dét } \mathbf{C} & = L_1L_2L_3 \end{cases} \quad (14.25)$$



On note immédiatement que pour  $i = 1, 2, 3$  :

$$\frac{\partial I_1}{\partial L_i} = 1, \quad \frac{\partial I_2}{\partial L_i} = I_1 - L_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial I_3}{\partial L_i} = \frac{I_3}{L_i} \quad (14.26)$$

Puisque  $\mathbf{C}$  est un tenseur défini positif, il existe une base de vecteurs propres orthonormaux que nous noterons  $\mathbf{N}_i$ . Rappelons que l'on peut toujours écrire un tenseur d'ordre 2 dans cette base. Par exemple, on a :

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 L_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{C}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i$$

Le tenseur de Piola-Kirchhoff (14.23) peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} I_3 \mathbf{C}^{-1} \right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} (I_1 - L_i) + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{I_3}{L_i} \right) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial L_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial L_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial L_i} \right) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial L_i} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^3 S_{ii} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{où} \quad S_{ii} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial L_i} \end{aligned}$$

où nous nous sommes servis des équations (14.26). Nous avons ainsi exprimé le tenseur  $\mathbf{S}$  dans sa base de vecteurs propres.

On peut faire de même pour le tenseur d'élasticité d'ordre 4. On procédera ici encore, un peu différemment de ce que nous avons déjà fait. L'astuce est de voir que le tenseur  $\mathbf{S}$  dépend bien entendu de  $\mathbf{C}$  et donc  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{C})$ . En dérivant par rapport au temps, on trouve :

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}}$$

et il suffit donc d'exprimer  $\dot{\mathbf{S}}$  en fonction de  $\dot{\mathbf{C}}$  pour obtenir le tenseur d'élasticité. Au préalable, notons que pour tout tenseur d'ordre 2 écrit sous la forme  $\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 T_{ii} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i$  on a :

$$\dot{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^3 \left[ \dot{T}_{ii} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + T_{ii} (\dot{\mathbf{N}}_i \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \dot{\mathbf{N}}_i) \right]$$

On exprime ensuite les vecteurs  $\dot{\mathbf{N}}_i$  dans la base des vecteurs propres :

$$\dot{\mathbf{N}}_i = \sum_{j=1}^3 W_{ij} \mathbf{N}_j \quad \text{où} \quad W_{ij} = \dot{\mathbf{N}}_i \cdot \mathbf{N}_j$$

et puisque  $\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j = \delta_{ij}$ , on a  $\dot{\mathbf{N}}_i \cdot \mathbf{N}_j + \mathbf{N}_i \cdot \dot{\mathbf{N}}_j = 0$  de sorte que la matrice  $W$  est anti-symétrique ( $W_{ii} = 0$  et  $W_{ij} = -W_{ji}$ ). On a donc :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= \sum_{i=1}^3 \left[ \dot{T}_{ii} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + T_{ii} \left( \sum_{j \neq i}^3 W_{ij} \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i + W_{ij} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{T}_{ii} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 T_{ii} W_{ij} (\mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j) \end{aligned}$$

L'expression précédente étant générale, on a en particulier :

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^3 \dot{S}_{ii} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 S_{ii} W_{ij} (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j + \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i) \quad (14.27)$$

où :

$$S_{ii} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial L_i} \text{ et } \dot{S}_{ii} = 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial L_i} \right) = 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_j \partial L_i} \dot{L}_j$$

et il nous reste à évaluer la dérivée des valeurs propres par rapport au temps. En appliquant le développement précédent au tenseur  $\mathbf{C}$ , on a :

$$\dot{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 \dot{L}_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 L_i W_{ij} (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j + \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i) = \sum_{i=1}^3 \dot{L}_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 (L_i - L_j) W_{ij} (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j)$$

en utilisant l'antisymétrie de la matrice  $W$  et le simple fait que  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 A_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 A_{ji}$ .

On a ainsi  $\dot{C}_{ii} = \dot{L}_i$  et  $\dot{C}_{ij} = W_{ij} (L_i - L_j)$  (et donc la symétrie de  $\dot{\mathbf{C}}$ ) de sorte que  $W_{ij} = \frac{\dot{C}_{ij}}{L_i - L_j}$ .

En revenant au tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\dot{\mathbf{S}} = 2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_j \partial L_i} \dot{C}_{jj} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 S_{ii} \left( \frac{\dot{C}_{ij}}{L_i - L_j} \right) (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j + \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i) \quad (14.28)$$

Rappelant maintenant que  $\dot{C}_{ij} = (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j) : \dot{\mathbf{C}}$  et  $\dot{C}_{ji} = (\mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i) : \dot{\mathbf{C}}$ , par symétrie de  $\dot{\mathbf{C}}$  on peut aussi écrire :

$$\dot{C}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j + \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i) : \dot{\mathbf{C}}$$

et on a :

$$\dot{\mathbf{S}} = 2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_j \partial L_i} \mathcal{N}_{iijj} : \dot{\mathbf{C}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \frac{S_{ii}}{L_i - L_j} (\mathcal{N}_{ijij} + \mathcal{N}_{ijji} + \mathcal{N}_{jii j} + \mathcal{N}_{jiji}) : \dot{\mathbf{C}}$$

où on a noté :

$$\mathcal{N}_{ijkl} = \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_l$$

On remarque que les  $\mathcal{N}_{ijkl}$  sont des tenseurs d'ordre 4 et non les composantes du tenseur  $\mathcal{N}$  d'ordre 4 que l'on noterait  $\mathcal{N}_{ijkl}$ . On a ainsi :

$$\mathbf{c} = 4 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_j \partial L_i} \mathcal{N}_{iijj} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \frac{S_{ii}}{L_i - L_j} (\mathcal{N}_{ijij} + \mathcal{N}_{ijji} + \mathcal{N}_{jii} + \mathcal{N}_{jiji})$$

On note aussi une indétermination lorsque deux valeurs propres sont égales ( $L_i = L_j$ ) que nous devons lever. Pour simplifier l'écriture, on divise les sommations en parties ( $i = j$ ,  $i < j$  et  $i > j$ ) et on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = & 4 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_i^2} \mathcal{N}_{iiii} + 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_j \partial L_i} \mathcal{N}_{iijj} + 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j<i}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_j \partial L_i} \mathcal{N}_{iijj} \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^3 \frac{S_{ii}}{L_i - L_j} (\mathcal{N}_{ijij} + \mathcal{N}_{ijji} + \mathcal{N}_{jii} + \mathcal{N}_{jiji}) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j<i}^3 \frac{S_{ii}}{L_i - L_j} (\mathcal{N}_{ijij} + \mathcal{N}_{ijji} + \mathcal{N}_{jii} + \mathcal{N}_{jiji}) \end{aligned}$$

Puisque cette fois  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j<i}^3 A_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^3 A_{ji}$ , on a la simplification suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = & 4 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_i^2} \mathcal{N}_{iiii} + 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_j \partial L_i} (\mathcal{N}_{iijj} + \mathcal{N}_{jji}) \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^3 \frac{S_{ii} - S_{jj}}{L_i - L_j} (\mathcal{N}_{ijij} + \mathcal{N}_{ijji} + \mathcal{N}_{jii} + \mathcal{N}_{jiji}) \end{aligned} \quad (14.29)$$

qui est une somme de tenseurs d'ordre 4 possédant la propriété de symétrie majeure.

L'indétermination n'est toujours pas levée lorsque deux valeurs propres sont égales. L'isotropie nous donne alors  $S_{ii} = S_{jj}$  et il faut alors passer à la limite :

$$\lim_{L_j \rightarrow L_i} \frac{S_{ii} - S_{jj}}{L_i - L_j} = 2 \lim_{L_j \rightarrow L_i} \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial L_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial L_j}}{L_i - L_j} = 2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_i^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_i \partial L_j} \right)$$

où on a simplement appliqué la règle de l'Hospital et dérivé au numérateur et au dénominateur par rapport à  $L_j$ . On retrouve un résultat similaire dans Bonet et Wood [10] mais où le tenseur  $\mathbf{c}$  a perdu la propriété de symétrie majeure.

L'expression pour le tenseur d'élasticité est complexe. On note toutefois que dans le modèle de base, les dérivées mixtes  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_j \partial L_i}$  sont nulles et on a alors :

$$\mathbf{c} = 4 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L_i^2} \mathcal{N}_{iiii} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^3 \frac{S_{ii} - S_{jj}}{L_i - L_j} (\mathcal{N}_{ijij} + \mathcal{N}_{ijji} + \mathcal{N}_{jii} + \mathcal{N}_{jiji})$$

mais il faut garder à l'esprit que cette dernière expression est un cas particulier.

### 14.4.1 Le cas quasi-incompressible

Lors de l'étude des problèmes d'élasticité linéaire en petites déformations des chapitres 11 et 13, nous avons pu constater que la limite incompressible pose des problèmes numériques qui ont été surmontés par l'emploi de méthodes mixtes judicieusement choisies. C'est encore le cas en grandes déformations. Les matériaux incompressibles (ou quasi incompressibles) ont la particularité de se déformer tout en préservant le volume. Cela se traduit par la condition  $\det \mathbf{F} = 1$  si le matériau est parfaitement incompressible, ou plus généralement par  $\det \mathbf{F} \simeq 1$  dans le cas dit quasi-incompressible. Pour les petites déformations, cette condition est équivalente à  $\nabla \cdot \mathbf{u} \simeq 0$ , expression que nous connaissons bien. Il semble donc naturel lorsque l'on étudie de tels matériaux de découpler les déformations volumiques des autres déformations dites isochoriques (à volumes constants). Une façon d'y arriver est d'introduire un nouveau tenseur de déformation :

$$\hat{\mathbf{F}} = (\det \mathbf{F})^{-1/3} \mathbf{F} = J^{-1/3} \mathbf{F}$$

dont le déterminant est de toute évidence 1. On obtient de cette manière une décomposition du tenseur de déformation  $\mathbf{F} = J^{1/3} \hat{\mathbf{F}}$  en une partie volumique et une partie isochorique. On obtient également une décomposition du tenseur de Cauchy-Green :

$$\mathbf{C} = J^{2/3} \hat{\mathbf{F}}^\top \hat{\mathbf{F}} = J^{2/3} \hat{\mathbf{C}} = I_3^{1/3} \hat{\mathbf{C}} \text{ ou encore } \hat{\mathbf{C}} = I_3^{-1/3} \mathbf{C}$$

On a de plus que  $\det \hat{\mathbf{C}} = 1$ . Notons également que les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{C}}$ , notées  $\hat{L}_i$  sont liées à celles de  $\mathbf{C}$  (notées  $L_i$ ) par la relation :

$$\hat{L}_i = J^{-2/3} L_i = I_3^{-1/3} L_i \quad (14.30)$$

dont nous aurons besoin pour le modèle d'Ogden incompressible.

Les deux premiers invariants de  $\hat{\mathbf{C}}$  sont :

$$\begin{cases} J_1 = \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}) = I_1 I_3^{-1/3} = J^{-2/3} (L_1 + L_2 + L_3) \\ J_2 = \frac{1}{2} (J_1^2 - \hat{\mathbf{C}} : \hat{\mathbf{C}}) = I_2 I_3^{-2/3} = J^{-4/3} (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) \end{cases}$$

mais aussi de  $J$  puisque  $J_3 = \det \hat{\mathbf{C}} = 1$ . Dans la formulation quasi-incompressible, on exprime le potentiel en fonction des invariants de  $\hat{\mathbf{C}}$  et on ajoute ce qui peut être vu comme un terme de pénalisation pour l'incompressibilité qui ne dépendra que de  $J$  c.-à-d.

$$\Psi = \Psi_0(\hat{\mathbf{C}}) + U(J) = \Psi_0(J_1, J_2) + U(J)$$

On a alors (toujours en se servant des dérivées premières et secondes des invariants données aux équations (D.14), (D.17) et (D.18)) :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{dU}{dJ} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{C}} + \frac{dU}{dJ} J \mathbf{C}^{-1} \quad (14.31)$$

Par la suite, on obtient tout aussi facilement le tenseur d'élasticité d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= 4 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \mathbf{C}^2} + 4 \frac{dU}{dJ} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{C}^2} + 4 \frac{d^2 U}{dJ^2} \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \mathbf{C}^2} + J \frac{dU}{dJ} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2\mathcal{J}) + J^2 \frac{d^2 U}{dJ^2} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1})\end{aligned}$$

Dans les modèles que nous verrons plus loin, le potentiel d'énergie sera plus précisément de la forme :

$$U(J) = \frac{1}{2} k (J - 1)^2 \quad (14.32)$$

où  $k$  est le module de compressibilité. Plus  $k$  est grand, plus on force ainsi l'incompressibilité. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{C}} + kJ(J - 1) \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{c} &= 4 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \mathbf{C}^2} + kJ(J - 1) (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2\mathcal{J}) + J^2 k (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1})\end{aligned} \quad (14.33)$$

### Modèle de Mooney-Rivlin quasi-incompressible

Pour le modèle dit de Mooney-Rivlin<sup>3</sup>, le potentiel  $\Psi$  peut alors s'écrire :

$$\Psi = c_1 (J_1 - 3) + c_2 (J_2 - 3) + \frac{1}{2} k (J - 1)^2$$

de sorte qu'à partir de l'équation (14.33), on a :

$$\mathbf{S} = 2 \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} \right) + kJ(J - 1) \mathbf{C}^{-1} = 2 \left( c_1 \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} + c_2 \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} \right) + kJ(J - 1) \mathbf{C}^{-1}$$

Si on souhaite l'explicitier, on utilise les dérivées des invariants de l'équation (D.19) et le tenseur de Piola-Kirchhoff pour le modèle de Mooney-Rivlin s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= 2c_1 \left( \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} I_3^{-1/3} - \frac{1}{3} I_1 I_3^{-4/3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) + 2c_2 \left( \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} I_3^{-2/3} - \frac{2}{3} I_2 I_3^{-5/3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) + kJ(J - 1) \mathbf{C}^{-1} \\ &= 2c_1 I_3^{-1/3} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) + 2c_2 I_3^{-2/3} \left( I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) + kJ(J - 1) \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{S}' + kJ(J - 1) \mathbf{C}^{-1}\end{aligned}$$

---

3. Le britano-américain Ronald Samuel Rivlin (1915—2005) était mathématicien, physicien, rhéologue et surtout, spécialiste des caoutchoucs. Melvin Mooney (1893—1968) était un rhéologue américain, concepteur de nombreux équipements spécialement utilisés pour le caoutchouc.

Le tenseur  $\mathbf{C}$  s'écrit quant à lui, toujours en partant de (14.33) :

$$\mathbf{C} = 4 \left( c_1 \frac{\partial^2 J_1}{\partial \mathbf{C}^2} + c_2 \frac{\partial^2 J_2}{\partial \mathbf{C}^2} \right) + kJ(J-1)(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2\mathcal{J}) + J^2 k(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1})$$

que l'on peut directement évaluer à partir des dérivées secondes des invariants (voir (D.18)).

Le cas quasi-incompressible est donc généralement traité en formulation déplacement seulement par opposition au cas véritablement incompressible qui, comme nous allons maintenant le voir, est traité en formulation mixte en introduisant une variable supplémentaire, la pression.

### 14.4.2 Le cas incompressible

Pour le cas incompressible, on procède comme au chapitre 13 et on définit la pression par l'expression :

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{3J} \text{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top) = -\frac{1}{3J} \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{C})$$

en vertu des propriétés de la trace d'un produit D.5. Or, en multipliant à droite par  $\mathbf{C}$  l'expression (14.31), on constate que les scalaires  $\frac{\partial \Psi_0}{\partial J_1}$  et  $\frac{\partial \Psi_0}{\partial J_2}$  n'ont qu'un effet multiplicatif sur la trace des tenseurs  $\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}$  et  $\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}$  on vérifie facilement (voir les exercices de fin de chapitre) à l'aide des expressions D.19 que :

$$\text{tr} \left( \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} \right) = \text{tr} \left( \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} \right) = 0, \text{ de sorte que } \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}) = 3J \frac{dU}{dJ}$$

et par la suite :

$$p = -\frac{1}{3J} \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}) = -\frac{dU}{dJ}$$

Le tenseur de Piola-Kirchhoff s'écrit donc :

$$\mathbf{S} = 2 \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} \right) - pJ\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{S}' - pJ\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{S}' - 2p \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \quad (14.34)$$

Par conséquent, le tenseur d'élasticité s'écrit (voir (D.18)) :

$$\mathbf{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial \mathbf{C}} - 4p \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{C}^2} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial \mathbf{C}} - Jp \left( \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2\mathcal{J} \right) \quad (14.35)$$

Dans les développements qui suivent, on aura besoin des dérivées des invariants (calculées à l'annexe D) pour obtenir les tenseurs de Piola-Kirchhoff et d'élasticité.

### Modèle de Mooney-Rivlin incompressible

Pour le modèle dit de Mooney-Rivlin<sup>4</sup>, le potentiel  $\Psi$  peut alors s'écrire :

$$\Psi = c_1(J_1 - 3) + c_2(J_2 - 3) + \frac{1}{2}k(J - 1)^2$$

4. Le britano-américain Ronald Samuel Rivlin (1915—2005) était mathématicien, physicien, rhéologue et surtout, spécialiste des caoutchoucs. Melvin Mooney (1893–1968) était un rhéologue américain, concepteur de nombreux équipements spécialement utilisés pour le caoutchouc.

On note la forme particulière de  $U(J)$  qui nous donne la pression soit  $p = -\frac{dU}{dJ} = -k(J-1)$ . À partir de l'équation (14.34), on a :

$$\mathbf{S} = 2 \left( c_1 \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} + c_2 \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} \right) - pJ\mathbf{C}^{-1}$$

Si on souhaite l'expliciter, on utilise les dérivées des invariants de l'équation (D.19) et le tenseur de Piola-Kirchhoff pour le modèle de Mooney-Rivlin s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2c_1 \left( \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} I_3^{-1/3} - \frac{1}{3} I_1 I_3^{-4/3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) + 2c_2 \left( \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} I_3^{-2/3} - \frac{2}{3} I_2 I_3^{-5/3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) - pJ\mathbf{C}^{-1} \\ &= 2c_1 I_3^{-1/3} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) + 2c_2 I_3^{-2/3} \left( I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) - pJ\mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{S}' - pJ\mathbf{C}^{-1} \end{aligned}$$

Le tenseur  $\mathbf{C}$  s'écrit quant à lui, cette fois en partant de (14.35) :

$$\mathbf{C} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C}^2} = 4 \left( c_1 \frac{\partial^2 J_1}{\partial \mathbf{C}^2} + c_2 \frac{\partial^2 J_2}{\partial \mathbf{C}^2} \right) - Jp \left( \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2\mathcal{J} \right)$$

que l'on peut directement évaluer à partir des dérivées des invariants (voir (D.18)).

### Modèle néo-hookéen incompressible

Le modèle néo-hookéen est un cas particulier du modèle de Mooney-Rivlin obtenu en posant  $\mu = 2c_1$  et  $c_2 = 0$  de sorte que :

$$\mathbf{S} = \mu I_3^{-1/3} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) - pJ\mathbf{C}^{-1}$$

**Remarque 14.18.** Le tenseur de Cauchy peut alors s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{S}' - pJ\mathbf{C}^{-1}) \cdot \mathbf{F}^\top = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{F}^\top - p\mathbf{I} = \mu J^{-5/3} \left( \mathbf{B} - \frac{I_1}{3} \mathbf{I} \right) - p\mathbf{I}$$

où  $\mathbf{B}$  est le tenseur de Finger ( $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$ ). De plus, en utilisant les mêmes approximations qu'à la page 325, on retrouve le modèle élastique linéaire dans le cas des petites déformations. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{F}^\top &\simeq \mu J^{-5/3} (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} (3 + 2\nabla \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{I} - 2\gamma(\mathbf{u})) \right) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^\top \\ &\simeq \mu (1 + \nabla \cdot \mathbf{u})^{-5/3} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot \left( -\frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\gamma(\mathbf{u}) \right) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^\top \\ &\simeq \mu \left( 1 - \frac{5}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} + \dots \right) \cdot \left( -\frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\gamma(\mathbf{u}) \right) \\ &\simeq 2\mu\gamma(\mathbf{u}) - \frac{2\mu}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \end{aligned}$$

qui est bien le modèle linéaire présenté à l'équation (13.4). ◀

### Modèle d'Ogden incompressible

Pour la version incompressible de ce modèle, ici encore, l'idée fondamentale est de reformuler le modèle de la section 14.4 à partir non plus des valeurs propres de  $\mathbf{C}$  mais bien de celles de  $\hat{\mathbf{C}}$ . On obtient immédiatement :

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_0 + \frac{1}{2}k(J-1)^2 \\ &= \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} \left[ \left( \hat{L}_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + \hat{L}_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + \hat{L}_3^{\frac{\alpha_m}{2}} - 3 \right) \right] + \frac{1}{2}k(J-1)^2 \\ &= \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} \left[ \left( L_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_3^{\frac{\alpha_m}{2}} \right) (L_1 L_2 L_3)^{-\frac{\alpha_m}{6}} - 3 \right] + \frac{1}{2}k(J-1)^2\end{aligned}$$

Les paramètres  $\mu_m$  et  $\alpha_m$  sont les mêmes qu'à la section 14.4. Notons que pour  $\mu_1 = 2c_1$ ,  $\mu_2 = -2c_2$ ,  $\mu_3 = 0$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = -2$  et  $\alpha_3 = 0$ , on retrouve le modèle de Mooney-Rivlin de la section 14.4.2.

On rappelle que  $J_1 = I_1 I_3^{-1/3}$  et  $J_2 = I_2 I_3^{-2/3}$  de sorte que des relations 14.26 :

$$\frac{\partial J_1}{\partial L_i} = I_3^{-1/3} \left( 1 - \frac{I_1}{3L_i} \right), \quad \text{et} \quad \frac{\partial J_2}{\partial L_i} = I_3^{-2/3} \left( I_1 - L_i - \frac{2I_2}{3L_i} \right) \quad (14.36)$$

Comme précédemment, on exprime les tenseurs  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}^{-1}$  dans la base des vecteurs propres (directions principales). Le tenseur de Piola-Kirchhoff (14.34) peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= 2 \left[ \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_1} I_3^{-1/3} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) + \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_2} I_3^{-2/3} \left( I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \right] - p J \mathbf{C}^{-1} \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_1} I_3^{-1/3} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{I_1}{L_i} \right) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_2} I_3^{-2/3} \left( I_1 - L_i - \frac{2I_2}{3L_i} \right) \right] \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i - p J \mathbf{C}^{-1} \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi_0}{\partial L_i} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i - p J \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{S}' - p J \mathbf{C}^{-1}\end{aligned}$$

où nous nous sommes servis des équations (14.36). Nous avons ainsi exprimé le tenseur  $\mathbf{S}$  dans sa base de vecteurs propres. Pour expliciter davantage, on doit développer les dérivées partielles  $\frac{\partial \Psi_0}{\partial L_i}$



où :

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} \left[ \left( L_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_3^{\frac{\alpha_m}{2}} \right) (L_1 L_2 L_3)^{-\frac{\alpha_m}{6}} - 3 \right] \\ &= \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} \left[ J^{-\frac{\alpha_m}{3}} \left( L_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_3^{\frac{\alpha_m}{2}} \right) - 3 \right] \\ &= \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} [\Psi_m - 3] \text{ où } \Psi_m = J^{-\frac{\alpha_m}{3}} \left( L_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_3^{\frac{\alpha_m}{2}} \right)\end{aligned}$$

en rappelant que :

$$\hat{L}_j = J^{-\frac{2}{3}} L_j \text{ et que } J = (\det C)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(L_1 L_2 L_3)}$$

On montre facilement que :

$$\frac{\partial J}{\partial L_j} = \frac{1}{2\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \frac{L_1 L_2 L_3}{L_j} = \frac{J}{2L_j}$$

et alors :

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial L_i} = \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} \frac{\partial \Psi_m}{\partial L_i}$$

où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_m}{\partial L_i} &= \left[ -\frac{\alpha_m}{3} J^{-\frac{\alpha_m}{3}-1} \frac{\partial J}{\partial L_i} \left( L_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_3^{\frac{\alpha_m}{2}} \right) + J^{-\frac{\alpha_m}{3}} \frac{\alpha_m}{2} L_i^{\frac{\alpha_m}{2}-1} \right] \\ &= \frac{\alpha_m}{2L_i} \left[ -\frac{1}{3} J^{-\frac{\alpha_m}{3}} \left( L_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_3^{\frac{\alpha_m}{2}} \right) + \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}} \right] \\ &= \frac{\alpha_m}{2L_i} \left[ -\frac{1}{3} \Psi_m + \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}} \right]\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial L_i} = \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{2L_i} \left[ -\frac{1}{3} \Psi_m + \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}} \right]$$

L'expression complète du tenseur de Piola-Kirchoff est finalement donnée par

$$S' = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi_0}{\partial L_i} N_i \otimes N_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{L_i} \left[ -\frac{1}{3} \Psi_m + \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}} \right] N_i \otimes N_i \quad (14.37)$$

Pour obtenir le tenseur d'élasticité, on procède exactement comme à la section 14.4. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= 4 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial L_i^2} \mathcal{N}^{iii} + 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^3 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial L_j \partial L_i} (\mathcal{N}^{ijj} + \mathcal{N}^{jji}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^3 \frac{S'_{ii} - S'_{jj}}{L_i - L_j} (\mathcal{N}^{ijj} + \mathcal{N}^{ijji} + \mathcal{N}^{jii} + \mathcal{N}^{jiji}) - Jp (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2\mathcal{J})\end{aligned} \quad (14.38)$$

où  $S'_{ii} = 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial L_i}$ . Nous devons maintenant évaluer les  $\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial L_i \partial L_j}$ <sup>5</sup>. Au préalable, évaluons les  $\frac{\partial \hat{L}_j}{\partial L_i}$ . On distinguera deux cas. Premièrement, si  $i = j$ , alors :

$$\frac{\partial \hat{L}_i}{\partial L_i} = -\frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial L_i} L_i + J^{-2/3} = \frac{2}{3} J^{-2/3} = \frac{2 \hat{L}_i}{3 L_i}$$

Le deuxième cas correspond à  $i \neq j$ . On a alors immédiatement que :

$$\frac{\partial \hat{L}_j}{\partial L_i} = -\frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial L_i} L_j = -\frac{1}{3} J^{-2/3} \frac{L_j}{L_i} = -\frac{1 \hat{L}_j}{3 L_i}$$

Commençons par :

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial L_i^2} = \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial L_i^2}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial L_i^2} &= \frac{\partial}{\partial L_i} \left( \frac{\alpha_m}{2L_i} \left[ -\frac{1}{3} \Psi_m + \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}} \right] \right) \\ &= \frac{\alpha_m}{2} \left( \frac{1}{L_i^2} \left[ \frac{1}{3} \Psi_m - \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}} \right] + \frac{1}{L_i} \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial \Psi_m}{\partial L_i} + \frac{\alpha_m}{2} \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}-1} \frac{\partial \hat{L}_i}{\partial L_i} \right) \right) \\ &= \frac{\alpha_m}{2L_i^2} \left[ \frac{1}{3} \left( \Psi_m - L_i \frac{\partial \Psi_m}{\partial L_i} \right) + \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}} \left( \frac{\alpha_m}{3} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial L_j \partial L_i} &= \frac{\partial}{\partial L_j} \left( \frac{\alpha_m}{2L_i} \left[ -\frac{1}{3} \Psi_m + \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}} \right] \right) \\ &= \frac{\alpha_m}{2L_i} \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial \Psi_m}{\partial L_j} + \frac{\alpha_m}{2} \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}-1} \frac{\partial \hat{L}_i}{\partial L_j} \right) \\ &= \frac{\alpha_m}{2L_i} \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial \Psi_m}{\partial L_j} + \frac{\alpha_m}{2} \hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}-1} \frac{-1 \hat{L}_i}{3 L_j} \right) \\ &= -\frac{\alpha_m}{6L_i} \left( \frac{\partial \Psi_m}{\partial L_j} + \frac{\alpha_m}{2} \frac{\hat{L}_i^{\frac{\alpha_m}{2}}}{L_j} \right) \end{aligned}$$

On a ainsi toutes les éléments nécessaires à l'implémentation de ce modèle.

---

5. Remerciements à M. Rioux pour le développement de cette partie.

## 14.5 Formulations variationnelles

Nous avons en main tous les outils pour obtenir la formulation variationnelle ou plus précisément les formulations variationnelles. Nous considérerons en effet différentes formulations dites en déplacements ou encore mixtes. Nous écrirons également ces formulations sur les géométries déformée et non déformée.

L'équation d'équilibre sur la configuration déformée  $\Omega^t$  s'écrit :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \quad \text{dans } \Omega^t$$

On multiplie ensuite par une fonction test  $\mathbf{w}$  et on intègre pour obtenir<sup>6</sup> :

$$\int_{\Omega^t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, dv - \int_{\Gamma^t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, da = \int_{\Omega^t} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv$$

Les conditions aux limites sont également plus complexes en grandes déformations. Comme auparavant, si on impose des conditions de Dirichlet sur le déplacement  $\mathbf{u}$  sur une partie de la frontière  $\Gamma_D^t$ , alors les fonctions tests  $\mathbf{w}$  s'y annulent. On peut aussi imposer des conditions de type Neumann sur une partie  $\Gamma_N$  de la frontière de même que des conditions de contact frottant ou non sur une autre partie  $\Gamma_C$ . On parlera de contact lorsque le domaine  $\Omega^t$  rencontre un obstacle rigide ou lui-même déformable. Nous considérerons les quatre cas suivants :

1. Condition de Dirichlet en déplacement :  $\mathbf{u} = \mathbf{g}$  sur  $\Gamma_D^t$ . Les fonctions tests  $\mathbf{w}$  s'annuleront alors sur  $\Gamma_D^t$ . On peut aussi bien sûr imposer une condition aux limites sur une des composantes de  $\mathbf{u}$  seulement.
2. Condition de Neumann :  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h}$  sur  $\Gamma_N^t$ . Ici encore, on peut n'imposer qu'une seule des composantes.
3. Pression suiveuse :  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = P\mathbf{n}$  sur  $\Gamma_P^t$ . Il s'agit là d'une condition fréquemment utilisée en pratique et qui nécessitera un traitement particulier. On remarque la présence de la normale à la géométrie déformée qui varie dans le temps, d'où le nom de pression suiveuse. Nous y reviendrons plus loin.
4. Condition de contact frottant ou non sur  $\Gamma_C^t$ . Un corps en déformation est susceptible d'entrer en contact avec un autre corps, lui-même déformable ou non et de s'y frotter. Les applications sont fort nombreuses mais la physique du problème est très complexe et l'implémentation de méthodes numériques demande beaucoup de soin. Mentionnons tout de même quelques mots à ce sujet. On décompose le tenseur des contraintes et la fonction test suivant leur composantes normale et tangentielle de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_t \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{w}_t$$

La formulation variationnelle devient :

$$\int_{\Omega^t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, dv = \int_{\Omega^t} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\Gamma_N^t} \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} \, da + \int_{\Gamma_P^t} P\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, da + \int_{\Gamma_C^t} (\sigma_n(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) + \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{w}_t) \, da \quad (14.39)$$

6. Le symbole « $\gg$ » désigne le produit doublement contracté de deux tenseurs (voir l'annexe D).

La composante  $\sigma_n$  permettra de contrôler l'interpénétration des corps en contact tandis que  $\sigma_t$  nous permettra d'imposer la force de frottement. Nous reviendrons plus loin sur cette formulation variationnelle. Notons que les dérivées dans cette expression sont effectuées par rapport à la configuration actuelle  $\Omega^t$  c.-à-d. par rapport aux variables  $x_i$  et que de plus, cette configuration est *a priori* inconnue. Nous allons ramener cette formulation variationnelle sur la configuration initiale  $\Omega^0$ . On distinguera les intégrales volumiques des intégrales surfaciques, même si le traitement est semblable dans les deux cas.

### 14.5.1 Intégrales volumiques

Pour se ramener sur la configuration initiale, un changement de variables classique est nécessaire. Il est quand même bon de revoir les détails.

**Lemme 14.19**

$$\int_{\Omega^t} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv = \int_{\Omega^0} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, J \, dV \quad \text{et} \quad \int_{\Omega^t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, dv = \int_{\Omega^0} \boldsymbol{\Pi} : \nabla_X \mathbf{w} \, dV \quad (14.40)$$

*Démonstration.* La première égalité est la formule de changement de variables classique. Pour la deuxième, on rappelle que le tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le second tenseur de Piola-Kirchhoff vérifie la relation 14.21. De l'équation 14.5 et des propriétés de la trace et du produit doublement contracté D.5 et D.8, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, dv &= \int_{\Omega^0} \left( \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top}{J} \right) : (\nabla_X \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \, J \, dV \\ &= \int_{\Omega^0} \text{tr} \left[ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top) \cdot (\nabla_X \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-1})^\top \right] \, dV \\ &= \int_{\Omega^0} \text{tr} \left[ \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \nabla_X^\top \mathbf{w} \right] \, dV \\ &= \int_{\Omega^0} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \nabla_X \mathbf{w} \, dV \end{aligned}$$

On reconnaît ainsi le premier tenseur de Piola-Kirchhoff. ■

**14.5.2 Intégrales surfaciques**

Pour obtenir une formulation variationnelle complète, il nous faut transformer les intégrales surfaciques (provenant des conditions aux limites de type Neumann) de la configuration déformée à la configuration initiale. Il faudra voir aussi comment se transforme la normale. Typiquement, on devra transformer des expressions de la forme :

$$\int_{\Gamma} f \, da = \int_{\Gamma^0} f \frac{da}{dA} \, dA = \int_{\Gamma^0} f \, J_s \, dA$$

où le jacobien surfacique  $J_s$  est donné par la formule 14.11.

Par exemple, l'imposition des conditions aux limites naturelles nous amène à considérer :

$$\int_{\Gamma_C^t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, da = \int_{\Gamma_C^0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} \frac{J}{J_s} \right) \cdot \mathbf{w} \, J_s \, dA = \int_{\Gamma_C^0} (\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{w} \, dA$$

où on a utilisé la formule de Nanson et la relation  $\boldsymbol{\Pi} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$ .

### 14.5.3 Pression suiveuse

Les pressions dites « suiveuses » sont parmi les plus importantes conditions aux limites dans les problèmes en grandes déformations. Rappelons qu'il s'agit d'une condition de la forme  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = P\mathbf{n}$ , d'où leur qualité de suiveuse puisque cette force surfacique suit la direction de la normale à la configuration déformée (contrairement à une condition de Neumann classique). On doit donc ajouter au second membre un terme de la forme (voir la relation 14.39) :

$$P_s = \int_{\Gamma_P^t} P\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, da = \int_{\Gamma_P^0} P\mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) J \, dA$$

expression obtenue à l'aide de la formule de Nanson 14.8.

### 14.5.4 Formulation variationnelle sur la configuration initiale

Dans un premier temps, nous négligerons les forces de contact et nous nous limiterons aux conditions de Neumann usuelles et aux pressions suiveuses. La formulation variationnelle 14.39 se réduit à :

$$\int_{\Omega^t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, dv = \int_{\Gamma_N^t} \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} \, da + \int_{\Gamma_P^t} P\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, da + \int_{\Omega^t} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, dv$$

qui équivaut à résoudre sur la configuration déformée les équations :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} & \text{dans } \Omega^t \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{sur } \Gamma_N^t \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = P\mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_P^t \end{cases}$$

En se servant des résultats précédents, on peut reporter cette formulation variationnelle sur la configuration non déformée :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^0} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \nabla_X \mathbf{w} \, dV &= \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} J_s \, dA + \int_{\Gamma_P^0} P\mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) J \, dA + \int_{\Omega^0} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} J \, dV \\ &= \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{\Gamma_P^0} P\mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) J \, dA + \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV \end{aligned}$$

où  $\mathbf{r}_0 = J\mathbf{r}$  et  $\mathbf{h}_0 = J_s\mathbf{h}$ . La formulation variationnelle sur la configuration non déformée est donc :

$$\int_{\Omega^0} \boldsymbol{\Pi} : \nabla_X \mathbf{w} \, dV = \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{\Gamma_P^0} P\mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) J \, dA + \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV \quad (14.41)$$

et le problème équivaut à résoudre :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{r}_0 & \text{dans } \Omega^0 & (\mathbf{r}_0(\mathbf{X}) = J\mathbf{r}(\mathbf{x})) \\ \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{h}_0 & \text{sur } \Gamma_N^0 & (\mathbf{h}_0(\mathbf{X}) = J_s\mathbf{h}(x)) \\ \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{N} = PJ(\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) & \text{sur } \Gamma_P^0 \end{cases}$$

sur la configuration initiale (non déformée). C'est donc le premier tenseur de Piola-Kirchhoff qui apparaît dans la configuration initiale et qui joue le même rôle que le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  sur la configuration déformée. Les autres types de conditions aux limites seront abordés un peu plus loin. Une autre forme équivalente est la suivante :

$$\int_{\Omega^0} \mathbf{S} : (\mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \mathbf{w}) \, dV = \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) \, J \, dA + \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV \quad (14.42)$$

### Formulation variationnelle mixte pour matériaux quasi-incompressibles

Pour simplifier l'exposé, nous supposons qu'il n'y a aucune pression suiveuse imposée. Si on utilise la décomposition 14.34, la formulation variationnelle 14.41 devient :

$$\int_{\Omega^0} (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{S}' - pJ\mathbf{C}^{-1})) : \nabla_X \mathbf{w} \, dV = \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV$$

qui sous sa forme actuelle, nous amène directement à une formulation mixte puisqu'on doit jumeler la dernière équation à la condition :

$$p = -k(J - 1) \quad \text{ou encore} \quad \frac{p}{k} + (J - 1) = 0$$

qui devient sous forme variationnelle :

$$\int_{\Omega^0} \left( (J - 1) + \frac{1}{k} p \right) q \, dV = 0 \quad \forall q$$

On remarque de plus que  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-\top}$  et une formulation mixte en grandes déformations aura donc la forme du système suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^0} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}') : \nabla_X \mathbf{w} \, dV - \int_{\Omega^0} pJ\mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \mathbf{w} \, dV &= \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV \\ \int_{\Omega^0} (J - 1)q \, dV + \int_{\Omega^0} \frac{1}{k} pq \, dV &= 0 \end{aligned}$$

ou en utilisant encore les propriétés du produit doublement contracté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^0} \mathbf{S}' : (\mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \mathbf{w}) \, dV - \int_{\Omega^0} pJ\mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \mathbf{w} \, dV = \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV \\ \int_{\Omega^0} (J - 1)q \, dV + \int_{\Omega^0} \frac{1}{k} pq \, dV = 0 \end{array} \right. \quad (14.43)$$

Cette formulation est non linéaire et devra donc éventuellement être linéarisée.

## 14.6 Linéarisation et méthode de Newton

La formulation variationnelle du problème étant non linéaire, la méthode de Newton semble la plus appropriée pour sa résolution et elle est fréquemment utilisée. On doit donc effectuer une linéarisation.

### 14.6.1 Formulation en déplacement seulement

Cette formulation, exprimée par la relation 14.41, est pertinente dans le cas où le matériau est loin de la limite incompressible. Dans le cas incompressible (ou quasi-incompressible), on utilisera avantagusement la formulation mixte de la section 14.6.2. On pose donc :

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega^0} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : \nabla_X \mathbf{w} \, dV - \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA - \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) \, J \, dA - \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV$$

et partant de  $\mathbf{u}_0$ , on cherche une correction  $\delta_u$  de sorte que  $R(\mathbf{u}_0 + \delta_u, \mathbf{w}) = 0$ . On constate aisément qu'il y a deux termes à linéariser soit le terme incluant la contribution du tenseur de Piola-Kirchhoff et le terme de pression suiveuse.

#### Linéarisation du matériau

Le premier terme à linéariser fait intervenir le tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\int_{\Omega^0} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : \nabla_X \mathbf{w} \, dV = \int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : (\mathbf{F}^\top(\mathbf{u}) \cdot \nabla_X \mathbf{w}) \, dV$$

en vertu de D.9. La dérivée est donc :

$$\int_{\Omega^0} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta_u \right) : (\mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \mathbf{w}) \, dV + \int_{\Omega^0} \mathbf{S} : \left( \left( \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta_u \right) \cdot \nabla_X \mathbf{w} \right) \, dV$$

#### Lemme 14.20

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta_u = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta_u \right) = \mathcal{C} : \frac{(\mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \delta_u + \nabla_X^\top \delta_u \cdot \mathbf{F})}{2} = \mathcal{C} : (\mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \delta_u) \quad (14.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta_u = \nabla_X^\top(\delta_u)$$

*Démonstration.* Le résultat suit de la définition de  $\mathcal{C}$  et de la relation D.23. ■

La linéarisation du premier terme devient donc :

$$\int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_0)) : (\nabla_X^\top(\delta_u) \cdot \nabla_X \mathbf{w}) \, dV + \int_{\Omega^0} (\mathcal{C}(\mathbf{u}_0) : (\mathbf{F}^\top(\mathbf{u}_0) \cdot \nabla_X(\delta_u))) : (\mathbf{F}^\top(\mathbf{u}_0) \cdot \nabla_X \mathbf{w}) \, dV$$



### Linéarisation de la pression suiveuse

Rappelons qu'une pression suiveuse fait intervenir un terme de la forme :

$$P_s = \int_{\Gamma_P^t} P \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, da = \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) J \, dA$$

qu'il faut aussi linéariser par rapport au déplacement  $\mathbf{u}$ . On constate que seuls  $J$  et  $\mathbf{F}^{-\top}$  dépendent de  $\mathbf{u}$ . Il faudra donc évaluer leur variation par rapport à  $\mathbf{u}$  c.-à-d. :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{-\top}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} &= \frac{\partial \mathbf{F}^{-\top}}{\partial \mathbf{F}} : \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) \end{aligned}$$

Rappelons qu'en vertu des relations D.21, D.14 et D.16, on a immédiatement que :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla_X \delta \mathbf{u}, \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} = J \mathbf{F}^{-\top} : \delta \mathbf{F} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{F}^{-\top}}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} = -\mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} = \mathcal{K} : \delta \mathbf{F} \quad (14.45)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} &= J \mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{-\top}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} &= -\mathbf{F}^{-\top} \cdot (\nabla_X \delta \mathbf{u})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} = \mathcal{K} : \nabla_X \delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

En dérivant le terme de pression suiveuse, on doit ajouter à la formulation variationnelle (la matrice tangente) une contribution de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_s}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} &= \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot \left[ \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) + J \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{-\top}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{N} \right] dA \\ &= \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot \left[ (\mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \delta \mathbf{u}) (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) - (\mathbf{F}^{-\top} \cdot (\nabla_X \delta \mathbf{u})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top}) \cdot \mathbf{N} \right] J \, dA \\ &= \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot \left[ (\mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \delta \mathbf{u}) (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) + (\mathcal{K} : \nabla_X \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} \right] J \, dA \\ &= \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot \left[ (\mathbf{F}^{-\top} \otimes \mathbf{F}^{-\top} + \mathcal{K}) : \nabla_X \delta \mathbf{u} \right] \cdot \mathbf{N} J \, dA \quad (\text{en vertu de la relation D.7}) \end{aligned}$$

qui n'est pas symétrique. La perte de symétrie due à la linéarisation des pressions suiveuses exige de mettre en mémoire une matrice complète non symétrique, au lieu d'une demi matrice seulement. Cette perte de symétrie a aussi des conséquences sur le choix des méthodes itératives de résolution

des systèmes linéaires qui en résultent puisque certaines méthodes comme le gradient conjugué ne fonctionnent que pour des matrices symétriques.

Pour contourner partiellement cette difficulté, on peut symétriser la contribution de la pression suiveuse à la matrice tangente. Si on dénote  $M_P$  cette matrice, on peut en effet la remplacer par  $(M_P + M_P^\top)/2$ . Le prix à payer est que dans ces conditions, nous ne sommes plus en présence d'une méthode de Newton et que la convergence n'est plus quadratique. En fait l'expérience montre qu'il faut alors charger la pression suiveuse par incréments progressifs, ce qui augmente sensiblement le coût de calcul. Ce qui a été gagné en espace mémoire est perdu en temps de calcul...

**Exemple 14.21.** On considère dans cet exemple une tige de section carrée faite d'un matériau hyperélastique. On fixe l'extrémité gauche de la tige de sorte que les déplacements  $y$  soient nuls c.-à-d.  $\mathbf{u} = 0$ . Sur la paroi supérieure de cette tige, on impose d'abord une condition de type Neumann  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h}$  qui comme on l'a vu, est équivalente à imposer  $\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{n} = J_s \mathbf{h}$  sur la configuration non déformée.  $\blacklozenge$

### Système à résoudre

En résumé, la méthode de Newton pour une formulation en déplacement seulement requiert la résolution de systèmes linéaires de la forme :

$$\frac{\partial R(\mathbf{u}_0, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\delta}_u = -R(\mathbf{u}_0, \mathbf{w})$$

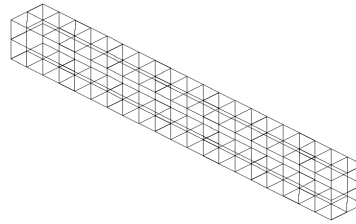
où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\mathbf{u}_0, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\delta}_u &= \int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_0)) : \left( \nabla_X^\top(\boldsymbol{\delta}_u) \cdot \nabla_X \mathbf{w} \right) dV \\ &+ \int_{\Omega^0} \left( \mathcal{C}(\mathbf{u}_0) : \left( \mathbf{F}^\top(\mathbf{u}_0) \cdot \nabla_X(\boldsymbol{\delta}_u) \right) \right) : \left( \mathbf{F}^\top(\mathbf{u}_0) \cdot \nabla_X \mathbf{w} \right) dV \\ &- \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot \left[ \left( \mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \boldsymbol{\delta}_u \right) (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}) - \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\nabla_X \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \right) \cdot \mathbf{N} \right] J dA \end{aligned} \quad (14.46)$$

### 14.6.2 Formulation mixte en déplacements-pressure

On fera l'hypothèse que le tenseur de Piola-Kirchhoff ne dépend que du déplacement et de la pression sous la forme :

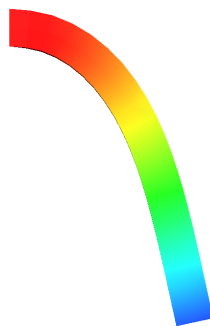
$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), p)$$



a) Maillage



b) Condition de Neumann



c) Pression suivieuse

Figure 14.2 – Comparaison d’une condition de Neumann et d’une pression suivieuse

On pose ensuite :

$$\begin{aligned}
R_1((\mathbf{u}, p), \mathbf{w}) &= \int_{\Omega^0} \mathbf{S} : (\mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \mathbf{w}) \, dV - \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA - \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV \\
&= \int_{\Omega^0} \mathbf{S}' : (\mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \mathbf{w}) \, dV - \int_{\Omega^0} p J \mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \mathbf{w} \, dV - \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA - \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dV \\
R_2((\mathbf{u}, p), q) &= \int_{\Omega^0} \left( -(J-1) - \frac{1}{k} p \right) q \, dV
\end{aligned}$$

Partant d'une approximation  $(\mathbf{u}_0, p_0)$  du déplacement, on cherche une correction  $(\delta_u, \delta_p)$  de sorte que

$$\begin{aligned}
R_1((\mathbf{u}_0 + \delta_u, p + \delta_p), \mathbf{w}) &= 0 \\
R_2((\mathbf{u}_0 + \delta_u, p + \delta_p), q) &= 0
\end{aligned}$$

On doit donc linéariser ce système par rapport à chacune des variables  $\mathbf{u}$  et  $p$ . Pour ce faire, on a besoin de quelques lemmes.

**Lemme 14.22**

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial p} q = -q J \mathbf{C}^{-1} \tag{14.47}$$

**Démonstration :**

La démonstration découle de la définition de  $\mathbf{S}$ .

**Lemme 14.23**

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta_u &= \int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\mathbf{u}_0, p_0) : \left( \nabla_X^\top(\delta_u) \cdot \nabla_X \mathbf{w} \right) \, dV + \\
&\quad \int_{\Omega^0} \left( \mathbf{C}(\mathbf{u}_0, p_0) : \left( \mathbf{F}^\top(\mathbf{u}_0) \cdot \nabla_X(\delta_u) \right) \right) : \left( \mathbf{F}^\top(\mathbf{u}_0) \cdot \nabla_X \mathbf{w} \right) \, dV \\
\frac{\partial R_1((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w})}{\partial p} \delta_p &= - \int_{\Omega^0} J \delta_p \left( \mathbf{F}^{-\top}(\mathbf{u}_0) : \nabla_X \mathbf{w} \right) \, dV \\
\frac{\partial R_2((\mathbf{u}_0, p_0), q)}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta_u &= - \int_{\Omega^0} J q \left( \mathbf{F}^{-\top}(\mathbf{u}_0) : \nabla_X \delta_u \right) \, dV \\
\frac{\partial R_2((\mathbf{u}_0, p_0), q)}{\partial p} \delta_p &= - \int_{\Omega^0} \frac{1}{k} \delta_p q \, dV
\end{aligned}$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur du quatrième ordre défini par :

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}$$

*Démonstration.* La démonstration découle des lemmes précédents. L'expression  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}$  désigne un tenseur d'ordre 4 que nous noterons  $\mathbf{C}$  et dont les composantes sont :

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{lk}} \right)$$

de manière à avoir les bonnes propriétés de symétrie (voir la référence [57]). ■

La formulation variationnelle linéarisée est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_1((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} - \int_{\Omega^0} \delta_p J \mathbf{F}^{-\top}(\mathbf{u}_0) : \nabla_X \mathbf{w} \, dV = -R_1((\mathbf{u}_0, p_0), \mathbf{w}) \\ - \int_{\Omega^0} q J \mathbf{F}^{-\top}(\mathbf{u}_0) : \nabla_X \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega^0} \frac{1}{k} \delta_p q \, dV = -R_2((\mathbf{u}_0, p_0), q) \end{array} \right. \quad (14.48)$$

En vertu du lemme précédent, on remarque que pour les matériaux hyperélastiques, le système linéarisé est symétrique, sauf en présence d'une pression suiveuse (voir la section 14.6.1).

**Remarque 14.24.** Le choix des discrétisations pour les formulations mixtes suit essentiellement les mêmes règles que pour le problème de Stokes du chapitre 12 ou les problèmes d'élasticité linéaire en formulation mixte du chapitre 13. Une comparaison fine de divers éléments, tenant compte de la précision de la solution, du coût de calcul (taille du système non linéaire) et de la quantité de mémoire nécessaire, a été faite dans Chamberland et al. [14] et montre clairement que les éléments d'ordre élevé devraient avoir la préférence. Cela va à l'encontre de l'affirmation souvent entendue que les éléments de bas degré sont plus efficaces car moins coûteux ; ils sont malheureusement aussi très peu précis! ◀

### 14.6.3 Formulation pénalisée

La pénalisation est une technique couramment utilisée dans le but de diminuer la taille des systèmes non linéaires à résoudre. Elle permet, dans certaines conditions, d'éliminer la variable  $p$  du système. Cette méthode est particulièrement efficace dans le cas de la discrétisation de  $p$  par des polynômes discontinus d'un élément à l'autre. Les cas les plus fréquents sont les approximations constante et linéaire par élément. On se référera au chapitre 12 où ce type de discrétisations a déjà été discuté.

Sur un élément  $K$ , la formulation variationnelle linéarisée 14.48 devient, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} A^K & B^{K\top} \\ B^K & M^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_u^K \\ \delta_p^K \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1^K \\ R_2^K \end{bmatrix}$$

où les différentes matrices élémentaires sont directement définies par 14.48. Lorsque la variable  $p$  est discontinue par élément, on peut résoudre localement pour  $p^K$ . En effet, on a :

$$\delta_p^K = -(M^K)^{-1} (R_2^K + B^K \delta_u^K)$$

d'où l'on tire :

$$(A^K - B^{K\top} (M^K)^{-1} B^K) \delta_u^K = -R_1^K + B^{K\top} (M^K)^{-1} R_2^K$$

Cette matrice et le terme de droite sont calculés directement au niveau de l'élément. Cette dernière expression n'est rien d'autre que l'algorithme d'Uzawa [29]. Pour obtenir une méthode de pénalisation classique, il suffit de poser  $p_k = 0$ , ce qui élimine la mise à jour de la pression. Le cas le plus fréquent est celui de la pression constante par élément. La matrice  $M^K$  est alors de dimension 1 sur 1 et vaut tout simplement  $\text{vol}(K)/k$ . On a ainsi :

$$\delta_p^K = \frac{-k}{\text{vol}(K)} \left( \int_K J (\mathbf{F}^{-\top}(\mathbf{u}_0) : \nabla_X \delta_u) dV + \int_K (J - 1) dV - \frac{p^K}{k} \text{vol}(K) \right)$$

**Remarque 14.25.** L'imposition des conditions aux limites et la résolution des systèmes linéaires résultants de la méthode de Newton suivent essentiellement les mêmes lignes que dans tous les problèmes précédents. Il faut toutefois être prudent pour l'imposition des conditions essentielles (imposition des déplacements). Lorsque l'on impose des déplacements sur une frontière, il est alors tout-à-fait possible d'inverser des éléments près de ces frontières et de provoquer ainsi des jacobiens négatifs et toutes les difficultés de convergence qui en résultent. Plus le maillage est fin, plus facilement cela se produira. Il est alors recommandé d'employer la méthode de résolution décrite à la remarque 5.11 où on aura évité de choisir un relèvement  $u_g$  satisfaisant immédiatement les bonnes conditions essentielles. De cette manière, les conditions aux limites seront propagées à tous les noeuds en même temps, évitant ainsi les problèmes d'éléments inversés. ◀

## 14.7 Liens avec la géométrie différentielle intrinsèque

Les outils développés jusqu'à maintenant nous permettent d'établir quelques liens avec la géométrie différentielle intrinsèque au sens de Delfour et Zolézio [19]. On pourra notamment développer des expressions pour les variations de la pression suivieuse, de la normale  $\mathbf{n}$  et du jacobien surfacique  $J_s$  en fonction du déplacement.

### 14.7.1 Variation du jacobien

On a un lien direct entre la variation du jacobien et la divergence. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta_u &= J \mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \delta_u \\ &= J \text{tr} \left( \nabla_X \delta_u \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) \\ &= J \text{tr} (\nabla \delta_u) \\ &= J \nabla \cdot \delta_u \end{aligned}$$

### 14.7.2 Variation du jacobien surfacique

On sait que :

$$J_s = J \sqrt{(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}}$$

et on cherche la variation de  $J_s$  par rapport au déplacement  $\mathbf{u}$ . On a donc :

$$\frac{\partial J_s}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = \frac{\partial J_s}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} = \frac{\partial J_s}{\partial \mathbf{F}} : \nabla_X \delta \mathbf{u}$$

On a d'une part en vertu de D.14 :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} = J \mathbf{F}^{-\top} : \delta \mathbf{F}$$

et d'autre part, en utilisant D.15 et D.16 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} &= \frac{\partial (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top})}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} \right) \cdot \mathbf{F}^{-\top} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{-\top}}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} \right) \\ &= -\mathbf{F}^{-1} \cdot \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \\ &= -\left( \left[ \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \right]^\top + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \right) \end{aligned}$$

et donc en posant  $\alpha = \sqrt{(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}}$  de sorte que  $J_s = J\alpha$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_s}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} \right) \alpha + \frac{J}{2\alpha} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} \right) \cdot \mathbf{N} \right) \cdot \mathbf{N} \\ &= J \alpha \mathbf{F}^{-\top} : \delta \mathbf{F} - \frac{J}{2\alpha} \left( \left( \left[ \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \right]^\top + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \right) \cdot \mathbf{N} \right) \cdot \mathbf{N} \\ &= J_s \mathbf{F}^{-\top} : \delta \mathbf{F} - \frac{J}{\alpha} \left( \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} \right) \cdot \mathbf{N} \end{aligned}$$

Poursuivons plus avant, en rappelant que  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{y})$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_s}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} &= J_s \mathbf{F}^{-\top} : \delta \mathbf{F} - \frac{J}{\alpha} \left( \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} \right) \cdot \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} \right) \right) \\ &= J_s \mathbf{F}^{-\top} : \delta \mathbf{F} - J \alpha \left( \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}}{\alpha} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}}{\alpha} \right) \right) \\ &= J_s \mathbf{F}^{-\top} : \delta \mathbf{F} - J_s \left( \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\delta \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \text{ avec } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}}{\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}\|} \end{aligned}$$

de sorte qu'en se servant de la relation 14.4, on trouve :

$$\frac{\partial J_s}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\delta}_u = J_s \left( \mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \boldsymbol{\delta}_u - \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\nabla_X \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \quad (14.49)$$

On peut encore simplifier cette expression car en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_s}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\delta}_u &= J_s \left( \text{tr} \left[ \nabla_X \boldsymbol{\delta}_u \cdot \mathbf{F}^{-1} \right] - \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\nabla_X \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \\ &= J_s \left( \text{tr} \left[ \nabla \boldsymbol{\delta}_u \right] - \left( (\nabla \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \\ &= J_s \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\delta}_u - \left( (\nabla \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \\ &= J_s \nabla_\Gamma \cdot \boldsymbol{\delta}_u \end{aligned}$$

On a ainsi retrouvé un résultat semblable à celui de la relation (D.24) mais pour le jacobien surfacique. On a du même coup introduit la *divergence tangentielle*  $\nabla_\Gamma \cdot \boldsymbol{\delta}_u$  au sens de Delfour et Zolézio [19].

#### Définition 14.26: Divergence tangentielle

La divergence tangentielle d'un vecteur  $\mathbf{u}$  est définie par :

$$\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} - \left( (\nabla \mathbf{u})^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (14.50)$$

**Remarque 14.27.** Un cas particulier intéressant du résultat précédent est que si  $\mathbf{u} = \mathbf{n}$ , le vecteur normal à la surface, alors  $\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \mathbf{n}$ . Il suffit en effet de vérifier que  $(\nabla \mathbf{n})^\top \cdot \mathbf{n} = 0$  en dérivant la relation  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ . ◀

### 14.7.3 Variation de la normale

De manière similaire, on peut retrouver la formule pour la variation de la normale. Rappelons que (voir 14.12) :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}}{\sqrt{(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}}} = \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}}{\alpha}$$

On a ainsi :

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\delta}_u = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{F}} : \nabla_X \boldsymbol{\delta}_u$$



et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{F}} : \boldsymbol{\delta}_F &= \frac{\left( \frac{\partial \mathbf{F}^{-\top}}{\partial \mathbf{F}} : \boldsymbol{\delta}_F \right) \cdot \mathbf{N} \alpha - \frac{\mathbf{F}^{-\top} \mathbf{N}}{2\alpha} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} : \boldsymbol{\delta}_F \right) \cdot \mathbf{N} \right) \cdot \mathbf{N}}{\alpha^2} \\
&= \frac{-\alpha \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\boldsymbol{\delta}_F)^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} + \frac{\mathbf{F}^{-\top} \mathbf{N}}{\alpha} \left( \left( \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\boldsymbol{\delta}_F)^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} \right) \cdot \mathbf{N} \right)}{\alpha^2} \\
&= \frac{-\mathbf{F}^{-\top} \cdot (\boldsymbol{\delta}_F)^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N}}{\alpha} + \frac{\frac{\mathbf{F}^{-\top} \mathbf{N}}{\alpha} \left( \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\boldsymbol{\delta}_F)^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} \right) \cdot \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{N} \right) \right)}{\alpha^2} \\
&= -\mathbf{F}^{-\top} \cdot (\boldsymbol{\delta}_F)^\top \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \left( \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\boldsymbol{\delta}_F)^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right)
\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\delta}_u &= -\mathbf{F}^{-\top} \cdot (\nabla_X \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \left( \left( \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\nabla_X \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \\
&= -(\nabla \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} + \left( \left( (\nabla \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{14.51}$$

où l'on reconnaît la dérivée matérielle de  $\mathbf{n}$  au sens de Delfour et Zolézio [19] ( $\dot{\mathbf{n}}$  dans leur notation).

#### 14.7.4 Pression suivieuse

Revenons sur la linéarisation du terme de pression suivieuse qui peut aussi s'écrire différemment. Le terme de pression suivieuse est de la forme :

$$P_s = \int_{\Gamma_p^t} P \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Gamma_p^0} P \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{n} J_s \, dA$$

et la linéarisation de ce terme exigera le calcul de :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_s}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\delta}_u &= \int_{\Gamma_p^0} P \boldsymbol{w} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\delta}_u \right) J_s + \mathbf{n} \left( \frac{\partial J_s}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\delta}_u \right) \right] dA \\
&= \int_{\Gamma_p^0} P \boldsymbol{w} \cdot \left[ -(\nabla \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} + \left( \left( (\nabla \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} + \mathbf{n} (\nabla_\Gamma \cdot \boldsymbol{\delta}_u) \right] J_s \, dA \\
&= \int_{\Gamma_p^0} P \boldsymbol{w} \cdot \left[ (\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}_u) \mathbf{n} - (\nabla \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{n} \right] J_s \, dA \\
&= \int_{\Gamma_p^0} P \boldsymbol{w} \cdot \left[ (\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}_u \mathbf{I} - (\nabla \boldsymbol{\delta}_u)^\top) \cdot \mathbf{n} \right] J_s \, dA
\end{aligned}$$

où  $J_s$  est le jacobien surfacique 14.11. On a ainsi fait apparaître le déviateur du tenseur de déformation  $\nabla \boldsymbol{\delta}_u$ , ce qui semble raisonnable puisqu'un déplacement virtuel dans la direction normale ne provoque aucune variation de la normale.

## 14.8 Formulation Lagrangienne actualisée

La formulation Lagrangienne totale considérée jusqu'à maintenant peut s'avérer inadéquate pour les problèmes où la géométrie initiale  $\Omega_0$  subit de très fortes déformations. Le maillage de la géométrie initiale devient alors inapproprié pour tenir compte de ces déformations et il faut alors réactualiser la géométrie et relancer les calculs à partir cette nouvelle géométrie. Il faut bien sûr s'assurer de conserver l'historique des déformations. C'est ce que nous allons maintenant décrire.

Nous supposons donc qu'il n'est pas possible, ou à tout le moins difficile, de passer directement de la configuration  $\Omega^0$  à une nouvelle configuration notée  $\Omega^2$  en raison de déformations trop importantes. Il nous faudra donc passer par une configuration intermédiaire que nous noterons  $\Omega^1$ . Nous noterons  $\mathbf{X}_i, i = 0, 1, 2$ , les coordonnées dans la configuration  $\Omega^i$  et  $\phi_{i \rightarrow j}$  l'application qui envoie  $\Omega^i$  sur  $\Omega^j$ . Le déplacement entre les différentes géométries sera noté  $\mathbf{u}_{i \rightarrow j}$  c.-à-d.

$$\phi_{i \rightarrow j}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_{i \rightarrow j}$$

Ainsi, on aura par exemple  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{u}_{0 \rightarrow 2}$  que l'on notait  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  en formulation Lagrangienne totale. On peut maintenant aussi écrire :

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{u}_{1 \rightarrow 2} = (\mathbf{X}_0 + \mathbf{u}_{0 \rightarrow 1}) + \mathbf{u}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{u}_{0 \rightarrow 2}$$

et donc  $\mathbf{u}_{0 \rightarrow 2} = \mathbf{u}_{0 \rightarrow 1} + \mathbf{u}_{1 \rightarrow 2}$  ainsi que :

$$\mathbf{X}_2 = \phi_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{X}_1) = \phi_{1 \rightarrow 2}(\phi_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{X}_0)) = \phi_{1 \rightarrow 2} \circ \phi_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{X}_0)$$

En notant maintenant le tenseur de déformation  $\mathbf{F}_{i \rightarrow j}$  défini par :

$$(\mathbf{F}_{i \rightarrow j})_{mn} = \frac{\partial (\mathbf{X}_j)_m}{\partial (\mathbf{X}_i)_n}$$

où  $(\mathbf{X}_j)_m$  est la m-ième composante de  $\mathbf{X}_j$ , on obtient immédiatement par composition de fonctions que :

$$\mathbf{F}_{0 \rightarrow 2} = \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1} \quad \text{et donc} \quad J_{0 \rightarrow 2} = J_{1 \rightarrow 2} J_{0 \rightarrow 1}$$

### 14.8.1 Formulation en déplacement seulement

En suivant cette notation, pour passer de la configuration  $\Omega^0$  à  $\Omega^1$ , la formulation variationnelle Lagrangienne totale est obtenue directement de 14.42 et dorénavant écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 1}) : (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top \cdot \nabla_{X_0} \mathbf{w}) \, dX_0 &= \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA_0 + \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_0) J_{0 \rightarrow 1} \, dA_0 \\ &+ \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dX_0 \end{aligned} \tag{14.52}$$

Les intégrales sont effectuées sur la géométrie  $\Omega_0$  de normale  $\mathbf{N}_0$  et le jacobien de la transformation est noté  $J_{0 \rightarrow 1}$ . On remarque ici que le tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 1})$  est évalué en fonction

de  $\mathbf{C}_{0 \rightarrow 1} = \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$  c.-à-d. à partir d'une déformation par rapport à la géométrie initiale. Il en sera de même pour le tenseur  $\mathcal{C}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 1})$  (d'ordre 4) provenant de la linéarisation.

De la même manière, pour passer de la configuration  $\Omega^0$  à  $\Omega^2$ , la formulation variationnelle Lagrangienne totale serait aussi obtenue de 14.42 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_0} \mathbf{w}) \, dX_0 &= \int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} \, dA_0 + \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_0) \, J_{0 \rightarrow 2} \, dA_0 \\ &+ \int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} \, dX_0 \end{aligned} \quad (14.53)$$

Le tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2})$  est ici évalué en fonction de  $\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2} = \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^\top \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}$  et donc encore à partir d'une déformation par rapport à la géométrie initiale. Nous supposons donc que nous sommes pas en mesure de résoudre directement ce problème en raison de trop fortes déformations. L'idée de base est de passer par une géométrie intermédiaire  $\Omega^1$  (déjà calculée) en transformant la formulation variationnelle 14.53 sur  $\Omega^1$ . Il suffit alors de regarder chacun des termes de la formulation 14.53. Notons d'abord que :

$$\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2} = \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^\top \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2} = (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1})^\top (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}) = \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top \cdot \mathbf{C}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$$

et donc que :

$$\mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) = \mathbf{S}(\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top \cdot \mathbf{C}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1})$$

Notons de plus que de l'équation 14.4, on a :

$$\nabla_{X_0} \mathbf{w} = \nabla_{X_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$$

### Le terme principal

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_0} \mathbf{w}) \, dX_0 &= \int_{\Omega^1} \mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : \left( (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1})^\top \cdot (\nabla_{X_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}) \right) J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \, dX_1 \\ &= \int_{\Omega^1} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w}) \, dX_1 \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) = J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top \quad (14.54)$$

et où on a utilisé les propriétés des produits tensoriels (voir les exercices de la série D.3). C'est le terme de base de la formulation Lagrangienne actualisée. Notons de plus que le tenseur de Cauchy s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J_{0 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^\top = \frac{1}{J_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \quad (14.55)$$

Voici quelques remarques supplémentaires :

1. Le tenseur  $\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$  est supposé connu (calculé préalablement). Le déplacement  $\mathbf{u}_{0 \rightarrow 1}$  n'intervient explicitement nulle part ;

2. Les inconnues du problème sont  $\mathbf{u}_{1 \rightarrow 2}$  et par conséquent  $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$  et  $\mathbf{C}_{1 \rightarrow 2}$  ;
3. Pour évaluer  $\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}$ , on utilise l'expression  $(\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top \cdot \mathbf{C}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1})$  en supposant le tenseur  $\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$  connu ;
4. L'expression du tenseur de Piola-Kirchhoff sur  $\Omega^1$  compose les déformations antérieures et est donc un peu plus complexe. La formulation Lagrangienne totale correspond au cas où  $\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1} = \mathbf{I}$  c.-à-d. qu'il n'y a aucune déformation préalable.

On doit effectuer le même travail pour les termes de linéarisation. Ainsi les deux premiers termes de 14.46 deviennent, en se servant des propriétés des produits tensoriels des exercices de la série D.3 :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : \left( \nabla_{X_0}^\top (\boldsymbol{\delta}_u) \cdot \nabla_{X_0} \mathbf{w} \right) dX_0 \\
&= \int_{\Omega^1} J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top \cdot \mathbf{C}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}) \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top : \left( \nabla_{X_1}^\top (\boldsymbol{\delta}_u) \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w} \right) dX_1 \quad (14.56) \\
&= \int_{\Omega^1} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : \left( \nabla_{X_1}^\top (\boldsymbol{\delta}_u) \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w} \right) dX_1
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^0} \left( \mathbf{c}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : \left( \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_0} (\boldsymbol{\delta}_u) \right) \right) : \left( \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_0} \mathbf{w} \right) dX_0 = \\
& \int_{\Omega^1} \left( \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : \left( \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_1} (\boldsymbol{\delta}_u) \right) \right) : \left( \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w} \right) dX_1 \quad (14.57)
\end{aligned}$$

où le tenseur  $\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2})$  a pour composantes :

$$\left( \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) \right)_{mnop} = J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \left( \mathbf{c}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) \right)_{ijkl} (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1})_{mi} (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1})_{nj} (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1})_{ok} (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1})_{pl} \quad (14.58)$$

Nous pouvons maintenant procéder ainsi pour tous les autres termes de la formulation variationnelle.

### Le terme source

$$\int_{\Omega^0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} dX_0 = \int_{\Omega^1} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} J_{0 \rightarrow 1}^{-1} dX_1 = \int_{\Omega^1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w} dX_1 \text{ où } \mathbf{r}_1 = J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \mathbf{r}_0$$

### La condition de Neumann

$$\int_{\Gamma_N^0} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} dA_0 = \int_{\Gamma_N^1} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{w} (J_s)_{0 \rightarrow 1}^{-1} dA_1 = \int_{\Gamma_N^1} \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{w} dA_1 \text{ où } \mathbf{h}_1 = (J_s)_{0 \rightarrow 1}^{-1} \mathbf{h}_0$$

**La pression suiveuse**

Le jacobien surfacique se transforme suivant la formule :

$$(J_s)_{0 \rightarrow 2} = \frac{dA_2}{dA_0} = \frac{dA_2}{dA_1} \frac{dA_1}{dA_0} = (J_s)_{1 \rightarrow 2} (J_s)_{0 \rightarrow 1}$$

et le vecteur normal suivant la formule de transformation de la normale 14.12 :

$$\mathbf{N}_1 = \frac{J_{0 \rightarrow 1}}{(J_s)_{0 \rightarrow 1}} \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_0$$

et il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_0) J_{0 \rightarrow 2} dA_0 &= \int_{\Gamma_P^1} P \mathbf{w} \cdot \left( (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^{-\top}) \cdot \mathbf{N}_0 \right) J_{0 \rightarrow 1} J_{1 \rightarrow 2} (J_s)_{0 \rightarrow 1}^{-1} dA_1 \\ &= \int_{\Gamma_P^1} P \mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_1) J_{1 \rightarrow 2} dA_1 \end{aligned}$$

En ce qui concerne la linéarisation de ce terme, on doit transformer sur  $\Omega^1$  l'expression :

$$\int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot \left[ \left( \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} : \nabla_{X_0} \boldsymbol{\delta}_u \right) (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_0) - \left( \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot (\nabla_{X_0} \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} \right) \cdot \mathbf{N}_0 \right] J_{0 \rightarrow 2} dA_0$$

Le premier terme devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot \left( \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} : \nabla_{X_0} \boldsymbol{\delta}_u \right) (\mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_0) J_{0 \rightarrow 2} dA_0 \\ &= \int_{\Gamma_P^1} P \mathbf{w} \cdot \left( (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^{-\top}) : (\nabla_{X_1} \boldsymbol{\delta}_u \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}) \right) \cdot (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_0) J_{1 \rightarrow 2} J_{0 \rightarrow 1} (J_s)_{0 \rightarrow 1}^{-1} dA_1 \\ &= \int_{\Gamma_P^1} P \mathbf{w} \cdot \left[ \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} : (\nabla_{X_1} \boldsymbol{\delta}_u) \right] \cdot (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_1) J_{1 \rightarrow 2} dA_1 \end{aligned}$$

L'autre terme de la linéarisation se traite de manière similaire et on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_P^0} P \mathbf{w} \cdot \left[ \left( \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot (\nabla_{X_0} \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 2}^{-\top} \right) \cdot \mathbf{N}_0 \right] J_{0 \rightarrow 2} dA_0 \\ &= - \int_{\Gamma_P^1} P \mathbf{w} \cdot \left[ \left( \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot (\nabla_{X_1} \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \right) \cdot \mathbf{N}_1 \right] J_{1 \rightarrow 2} dA_1 \end{aligned}$$

### Formulation Lagrangienne actualisée linéarisée (en déplacement)

La formulation variationnelle Lagrangienne actualisée complète s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^1} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : (\nabla_{X_1}^\top(\boldsymbol{\delta}_u) \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w}) \, dX_1 + \int_{\Omega^1} \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_1}(\boldsymbol{\delta}_u)) : (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w}) \, dX_1 \\
& - \int_{\Gamma_P^1} P \mathbf{w} \cdot [\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} : (\nabla_{X_1} \boldsymbol{\delta}_u)] \cdot (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_1) J_{1 \rightarrow 2} \, dA_1 \\
& + \int_{\Gamma_P^1} P \mathbf{w} \cdot [(\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot (\nabla_{X_1} \boldsymbol{\delta}_u)^\top \cdot \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top}) \cdot \mathbf{N}_1] J_{1 \rightarrow 2} \, dA_1 \\
& = - \int_{\Omega^1} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w}) \, dX_1 + \int_{\Omega^1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w} \, dX_1 + \int_{\Gamma_N^1} \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{w} \, dA_1 \\
& + \int_{\Gamma_P^1} P \mathbf{w} \cdot (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} \cdot \mathbf{N}_1) J_{1 \rightarrow 2} \, dA_1
\end{aligned} \tag{14.59}$$

### 14.8.2 Formulation Lagrangienne actualisée mixte

Si on se réfère à la formulation variationnelle mixte 14.48 déjà obtenue, on montre de manière similaire à ce qui a été fait à la section 14.8.1, que la formulation variationnelle complète s'écrit :

$$\begin{aligned}
R_1 &= \int_{\Omega^1} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w}) \, dX_1 - \int_{\Gamma_N^1} \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{w} \, dA_1 - \int_{\Omega^1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w} \, dX_1 \\
&= \int_{\Omega^1} \tilde{\mathbf{S}}'(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) : (\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^\top \cdot \nabla_{X_1} \mathbf{w}) \, dV - \int_{\Omega^1} p J_{1 \rightarrow 2} \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} : \nabla_{X_1} \mathbf{w} \, dX_1 \\
&\quad - \int_{\Gamma_N^1} \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{w} \, dA_1 - \int_{\Omega^1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w} \, dX_1 \\
R_2 &= \int_{\Omega^1} \left( -(J_{1 \rightarrow 2} - J_{0 \rightarrow 1}^{-1}) - \frac{1}{k} p J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \right) q \, dV
\end{aligned}$$

où  $\tilde{\mathbf{S}}'(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) = J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1} \cdot \mathbf{S}'(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2}) \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top$ ,  $\mathbf{r}_1 = J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{h}_1 = (J_s)_{0 \rightarrow 1}^{-1} \mathbf{h}_0$ . La formulation variationnelle complète s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_1}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\delta}_u - \int_{\Omega^1} \delta_p J_{1 \rightarrow 2} \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} : \nabla_{X_1} \mathbf{w} \, dX_1 = -R_1 \\ - \int_{\Omega^1} q J_{1 \rightarrow 2} \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{-\top} : \nabla_{X_1} \boldsymbol{\delta}_u \, dX_1 - \int_{\Omega^1} \frac{1}{k} \delta_p q J_{0 \rightarrow 1}^{-1} \, dX_1 = -R_2 \end{array} \right. \tag{14.60}$$

où le terme  $\frac{\partial R_1}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\delta}_u$  prend exactement la même forme que pour la formulation en déplacement seulement (voir les équations 14.56 et 14.57).

### 14.8.3 Équivalence des formulations

En absence de remaillage, les formulations Lagrangiennes totale et actualisée sont équivalentes. En effet ...

### 14.8.4 Algorithme complet

#### Cumul des prédéformations

Supposons maintenant que nous en sommes à l'étape  $i$  c.-à-d. nous avons déjà calculé  $i$  configurations  $\Omega^i$  et que nous espérons obtenir  $\Omega^{i+1}$ . Le même raisonnement que précédemment peut encore être appliqué, en remplaçant  $F_{0 \rightarrow 2}$  par  $F_{0 \rightarrow i+1}$ . Il suffit alors de constater que :

$$\mathbf{F}_{0 \rightarrow i+1} = \mathbf{F}_{i \rightarrow i+1} \cdot \mathbf{F}_{i-1 \rightarrow i} \cdot \mathbf{F}_{i-2 \rightarrow i-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$$

On peut ainsi en déduire  $\mathbf{C}_{0 \rightarrow i+1}$ , qui nous permettra de calculer les tenseurs de Piola-Kirchhoff et d'élasticité. Comme les géométries intermédiaires sont détruites au fur et à mesure, il suffit de cumuler ces produits dans un tenseur, toujours noté  $\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$  dans l'algorithme qui suit.

#### Algorithme 14.28: Formulation Lagrangienne actualisée

0. Initialisation :  $\Omega^1 = \Omega^0$  et donc  $\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1} = \mathbf{I}$ ,  $J_{0 \rightarrow 1} = 1$  et  $(J_s)_{0 \rightarrow 1} = 1$ ;
1. Résolution du système 14.59 pour obtenir  $\mathbf{u}_{1 \rightarrow 2}$  et  $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ ;
  - 1.1  $\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$  est supposé connu;
  - 1.2 on calcule  $\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2} = \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}^\top \cdot \mathbf{C}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$ ;
  - 1.3 on calcule  $\mathbf{S}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2})$  et  $\mathbf{C}(\mathbf{C}_{0 \rightarrow 2})$ ;
  - 1.4 on en déduit les tenseurs  $\tilde{\mathbf{S}}$  et  $\tilde{\mathbf{C}}$  par les relations 14.54 et 14.58;
  - 1.4 on calcule (si nécessaire) le tenseur de Cauchy par la relation 14.55;
2. Mise à jour de la géométrie :  $\Omega^2 = \Omega^1 + \mathbf{u}_{1 \rightarrow 2}$ ;
  - 2.1  $\Omega^2$  devient  $\Omega^1$ ;
  - 2.2  $\mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$  est remplacé par  $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{F}_{0 \rightarrow 1}$  (cumul des prédéformations). Par conséquent,  $J_{0 \rightarrow 1}$  est remplacé par  $J_{1 \rightarrow 2} J_{0 \rightarrow 1}$  et  $(J_s)_{0 \rightarrow 1}$  est remplacé par  $(J_s)_{1 \rightarrow 2} (J_s)_{0 \rightarrow 1}$ ;
3. Remaillage (si nécessaire);
4. Réinterpolation des différentes variables sur le nouveau maillage (si nécessaire);
5. Retour à l'étape 1 pour l'incrément suivant

Les étapes 3 et 4 de remaillage et de réinterpolation sont délicates et feront l'objet d'une discussion détaillée un peu plus loin.

## 14.9 Exercices

1. Soit  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  des tenseurs d'ordre 2 et supposons que  $\boldsymbol{\sigma}$  est symétrique. Montrer que :

$$\boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^T}{2} \right) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$$

2. Soit  $\mathbf{C}$  un tenseur symétrique d'ordre 4 et  $\boldsymbol{\tau}$  un tenseur d'ordre 2. Montrer que :

$$\mathbf{C} : \left( \frac{\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^T}{2} \right) = \mathbf{C} : \boldsymbol{\tau}$$

3. En utilisant la relation 14.1, montrer que :

$$\mathbf{F}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \nabla_X(\mathbf{w})$$

4. Montrer que :

$$\frac{\partial(\mathbf{B} : \mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{B}$$

5. Montrer que dans le cas des petites déformations, la condition :

$$\det \mathbf{F} \simeq 1$$

est équivalente à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \simeq 0$$

6. Montrer à l'aide des expressions (D.19) que :

$$\text{tr} \left( \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} \right) = \text{tr} \left( \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} \right) = 0$$



## Chapitre 15

# Adaptation de maillages

### 15.1 Introduction

Que ce soit en mécanique des fluides ou des solides, pour l'équation de la chaleur, pour les problèmes de croissance de population (interactions prédateurs-proies), nous avons toujours eu à nous appuyer sur un ou plusieurs maillages pour calculer une solution. Nous avons pu constater que la précision dépendait, parfois fortement, de ces maillages. Jusqu'à maintenant, le choix du maillage n'a pas fait l'objet de discussions approfondies, malgré son extrême importance. C'est l'objectif de ce chapitre où nous allons présenter une brève introduction à l'adaptation de maillages. L'idée fondamentale derrière cette notion est que le maillage lui-même fait partie des inconnues du problème. Plus spécifiquement, le maillage étant une composante essentielle de la solution numérique, on peut considérer qu'il n'est pas fixé une fois pour toutes et qu'on peut le modifier dans le but d'améliorer la précision de la solution.

À la base de la méthode des éléments finis, on retrouve la notion de maillage constitué d'éléments de formes géométriques variées mais simples. Nous ne considérerons ici que les triangles en 2D et les tétraèdres en 3D. Historiquement, les livres d'introduction à la méthode des éléments finis recommandaient l'utilisation de quadrangles en dimension 2 et d'hexaèdres en dimension 3. Les triangles et tétraèdres avaient en effet la réputation d'être moins précis. Il est toutefois beaucoup plus facile et efficace de mailler une géométrie complexe avec des triangles et des tétraèdres. Quant à la précision, nous verrons que les triangles n'ont rien à envier aux quadrangles et de même pour les tétraèdres vis-à-vis des hexaèdres en dimension 3.

Quoi qu'il en soit, on peut définir la *qualité d'un élément* et plusieurs définitions existent et nous utiliserons au besoin les suivantes :

- (**En dimension 2**). Soit un élément triangulaire  $K$  dont les longueurs géométriques des côtés sont  $l_0$ ,  $l_1$  et  $l_2$  (norme euclidienne) et dont l'aire est  $A_K$ . La qualité de l'élément est alors donnée par l'une ou l'autre des expressions équivalentes suivantes

$$Q = \frac{27(l_0 + l_1 - l_2)(l_0 + l_2 - l_1)(l_1 + l_2 - l_0)}{(l_0 + l_1 + l_2)^3} = \frac{432A_K^2}{(l_0 + l_1 + l_2)^4} = \frac{4\sqrt{3}A_K}{l_0^2 + l_1^2 + l_2^2} \quad (15.1)$$

On obtient la première égalité par la formule de Héron et la dernière est démontrée dans Bank et Smith [3]. On remarquera sans peine que la qualité vaut 1 pour un triangle équilatéral

et se rapproche de 0 à mesure que le triangle dégénère (il suffit de tirer sur un sommet vers l'infini en maintenant en place les deux autres).

- **(En dimension 3)**. Soit un élément tétraédrique  $K$  dont les longueurs géométriques des arêtes sont  $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$  (norme euclidienne) et dont le volume est  $V_K$ . La qualité de  $K$  est définie par :

$$Q = \frac{20}{3} \frac{V_K}{\sqrt{l_0 l_1 l_2 l_3 l_4 l_5}} = \frac{36}{\sqrt[3]{3}} \frac{V_K^{\frac{2}{3}}}{\sum_{i=0}^5 l_i^2} \quad (15.2)$$

L'utilisation d'éléments de qualité aussi près que possible de 1 était donc la norme jusqu'au milieu des années 90. Il en résultait des maillages très réguliers et isotropes, en ce sens que tous les éléments avaient à peu près la même taille et la même forme dans tout le domaine de calcul. Les éléments très allongés dans une direction étaient essentiellement prohibés car ils avaient la réputation de donner de mauvaises solutions numériques.

S'il est vrai qu'un élément étiré dans une direction inappropriée peut mener à une solution imprécise, voire erronée, on s'est par la suite aperçu qu'un élément étiré dans une direction compatible avec la solution ne posait aucun problème. Il en résulte même dans beaucoup de cas un gain en précision. Des maillages présentant des éléments très étirés dans certaines directions privilégiées sont dits anisotropes et ce sera notre objectif lorsque la solution le permettra.

Nous essaierons, entre autres choses, de déterminer la position optimale des noeuds du maillage pour obtenir la meilleure précision possible. Pour un nombre de noeuds ou de triangles donné, le but est de déterminer le maillage qui minimise l'erreur dans une certaine norme. De manière presque équivalente, pour un niveau d'erreur donné, on cherchera le maillage atteignant cette précision avec un minimum de noeuds. Nous devons pour ce faire estimer l'erreur commise sur la solution numérique obtenue par éléments finis. Comme la solution est *a priori* inconnue, cela entraîne forcément un processus itératif.

Ce processus est appelé adaptation de maillage et se fait en gros en trois temps. À partir d'un maillage initial, on calcule une solution par la méthode des éléments finis (ou toute autre méthode numérique). Bien entendu, cette solution approximative est inexacte par rapport à une éventuelle solution analytique généralement inconnue. On estime ensuite l'erreur sur cette solution par différentes techniques dont nous verrons quelques exemples. L'adaptation du maillage consiste alors à ajouter des éléments là où l'erreur est jugée grande et à en retirer là où l'erreur estimée est petite. On essaie ainsi d'atteindre un objectif d'erreur uniforme sur tout le domaine. Il est en effet peu utile de s'assurer d'une grande précision dans une région tout en étant très imprécis dans une autre. C'est un peu le principe du maillon le plus faible d'une chaîne.

On décrira dans ce qui suit les bases de l'adaptation de maillage dite hiérarchique. Ce n'est certainement pas la seule approche possible et il existe une vaste littérature dans ce domaine mais nous n'avons nullement envie d'en faire une revue complète. Nous verrons comment estimer l'erreur, comment modifier localement le maillage en conséquence et comment on en arrive à un maillage quasi optimal.

## 15.2 Adaptation basée sur un estimateur d'erreur hiérarchique

L'idée d'estimer l'erreur sur une solution éléments finis en reconstruisant une nouvelle solution à l'aide d'une base hiérarchique remonte à plusieurs années. Le premier travail en ce sens remonte

à Ndikumagenge [46]. Toutefois, une implémentation plus rigoureuse en dimension 2 n'a été réalisée que récemment par Bois et al. [7, 8]. L'implémentation tridimensionnelle a été réalisée par Couët [17] en partant des travaux de Bois. Certains travaux ont ensuite aidé à grandement améliorer la technique, comme le mémoire de Grenier Gauthier [33] et la thèse de Briffard [12].

Nous allons maintenant décrire le principe de base de l'estimation d'erreur hiérarchique et de la stratégie d'adaptation de maillage qui en résulte. Soit donc  $u$  une solution analytique d'une équation aux dérivées partielles *a priori* quelconque. Pour fixer les idées on peut penser dans le cas le plus simple à une équation elliptique mais l'approche proposée peut s'appliquer à des équations beaucoup plus complexes. On dénote  $\mathcal{T}_h$  un maillage du domaine  $\Omega$ ,  $K$  les éléments de ce maillage et  $u_h^{(k)}$  une approximation éléments finis d'ordre  $k$  qui approche  $u$ . On parle ici d'une approximation classique de type Lagrange de degré  $k$  c.-à-d.  $u_h^{(k)}$  est une fonction continue par morceaux dont la restriction à chaque élément est un polynôme de degré  $k$  ( $P^{(k)}$ ). On notera :

$$V_h^{(k)} = \{v_h \in C^0(\Omega) \mid v_h|_K \in P^{(k)}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

On suppose donc que l'on a obtenu une solution  $u_h^{(k)} \in V_h^{(k)}$ . Comme dans [37], on fait l'hypothèse que l'on peut construire, à partir de  $u_h^{(k)}$ , une nouvelle solution  $\hat{u}_h^{(k+1)}$  de degré  $k+1$  qui est plus précise en ce sens que :

$$\|u - \hat{u}_h^{(k+1)}\| \leq \beta \|u - u_h^{(k)}\| \quad (15.3)$$

où  $\beta < 1$ . On doit distinguer ici entre l'approximation  $\hat{u}_h^{(k+1)}$ , reconstruite en principe à faible coût, et la solution éléments finis de degré  $k+1$  ( $u_h^{(k+1)}$ ) qui serait beaucoup plus coûteuse à calculer.

Pour le moment, on suppose son existence et l'inégalité triangulaire nous assure que :

$$\|u - u_h^{(k)}\| \leq \|u - \hat{u}_h^{(k+1)}\| + \|\hat{u}_h^{(k+1)} - u_h^{(k)}\| \leq \beta \|u - u_h^{(k)}\| + \|\hat{u}_h^{(k+1)} - u_h^{(k)}\|$$

et donc que :

$$\|u - u_h^{(k)}\| \leq \frac{1}{1 - \beta} \|\hat{u}_h^{(k+1)} - u_h^{(k)}\| \quad (15.4)$$

et en conséquence, l'erreur peut être contrôlée par le terme de droite dans une norme appropriée ( $L^2$  ou  $H^1$  par exemple). Plus spécifiquement, nous construirons une solution enrichie de la forme :

$$\hat{u}_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + c_h^{(k+1)} \quad (15.5)$$

où  $c_h^{(k+1)}$  peut être vue comme une correction de degré  $k+1$  de la solution éléments finis de degré  $k$ , d'où le nom hiérarchique. Sous cette forme, on peut approcher l'erreur à l'aide de :

$$\|u - u_h^k\| \simeq \|\hat{u}_h^{k+1} - u_h^k\| = \|c_h^{k+1}\| \quad (15.6)$$

dans la norme souhaitée.

Nous proposons maintenant une construction de  $\hat{u}_h^{(k+1)}$  reposant sur une approximation aussi précise que possible du gradient ( $\nabla u$ ) de la solution. On s'assurera que cette approximation (qui

sera notée  $\mathbf{g}_h^{(k)}$ ) est également continue par morceaux et qu'elle appartient à  $(V_h^{(k)})^n$  ( $n$  étant la dimension d'espace). On devra donc obtenir une approximation de ce gradient à tous les noeuds de calcul de la solution  $u_h^{(k)}$ . Rappelons que  $\nabla u_h^{(k)}$  est bien une approximation de  $\nabla u$  mais seulement de degré  $k - 1$  et discontinue aux interfaces entre les éléments et qu'elle n'appartient donc pas à  $(V_h^{(k)})^n$ . Il est généralement reconnu que l'on peut obtenir des approximations bien plus précises du gradient que  $\nabla u_h^{(k)}$ . Il n'est cependant pas du tout clair qu'il existe une méthode d'approximation optimale dans tous les cas, et en particulier sur les maillages fortement anisotropes. Nous utiliserons celle décrite dans Zhang et Naga [63, 34]) et qui est superconvergente sur les maillages réguliers de type différences finies. Cette méthode est rappelée à l'annexe E.

### 15.2.1 Construction de la solution enrichie

Voyons maintenant comment construire la solution enrichie  $\hat{u}_h^{(k+1)}$  et façon tout-à-fait générale et pouvant s'appliquer à des approximations d'ordre  $k$  quelconque. Nous nous concentrerons toutefois sur les cas linéaire et quadratique dans le cas bidimensionnel, la généralisation au cas tridimensionnel étant évidente.

Introduisons d'abord un peu de notation. Les sommets d'un élément (triangulaire ou tétraédrique)  $K$  seront notés  $\mathbf{x}_i$  et les coordonnées barycentriques associées  $\lambda_i$ .<sup>1</sup> L'arête entre deux sommets  $\mathbf{x}_i$  and  $\mathbf{x}_j$  sera dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{e}_{ij}$  et sera de longueur  $h_{ij}$ . Le vecteur direction de l'arête sera donc  $h_{ij}\mathbf{e}_{ij}$  alors que le point milieu de l'arête sera noté  $\mathbf{x}_{ij}$ .

La médiane entre le sommet  $\mathbf{x}_i$  et le milieu du côté opposé (de longueur  $l_i$ ) est dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{m}_i$ . Les trois médianes se rencontrent au barycentre du triangle noté  $\mathbf{x}_B$ . Similairement,  $\mathbf{g}_i^{(k)}$  et  $\mathbf{g}_{ij}^{(k)}$  dénotent gradients reconstruits aux sommets et sur les milieux d'arêtes respectivement, toujours suivant la méthode décrite au chapitre E.

L'idée de base derrière la construction de  $\hat{u}_h^{(k+1)}$  est en fait très simple. Puisque  $\hat{u}_h^{(k+1)}$  est une approximation de  $u$  and  $\mathbf{g}_h^{(k)} = (g_{hx}^{(k)}, g_{hy}^{(k)})$  est une approximation de  $\nabla u$ , alors les différentes dérivées partielles d'ordre  $k + 1$  de  $\hat{u}_h^{(k+1)}$  devraient coïncider avec les dérivées partielles appropriées d'ordre  $k$  d'une des composantes de  $\mathbf{g}_h^{(k)}$ . Dans le cas linéaire par exemple ( $k = 1$ ) :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_h^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial g_{hx}^{(1)}}{\partial x}$$

On note de plus, partant de (15.5), que puisque  $u_h^{(k)}$  est de degré  $k$ , ses dérivées  $(k + 1)$ -ièmes s'annulent et on a :

$$\frac{\partial^{k+1} \hat{u}_h^{(k+1)}}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^{k+1} c_h^{(k+1)}}{\partial x^m \partial y^n} \quad \text{avec } m + n = k + 1$$

de sorte que  $u_h^{(k)}$  disparaît complètement. La situation est illustrée à la figure 15.1 où on peut voir que la solution éléments finis de degré  $k$  ( $k = 1, 2$ ) est enrichie d'une correction de degré  $k + 1$  pour obtenir une nouvelle approximation.

1. Sur l'élément de référence, les coordonnées barycentriques  $\hat{\lambda}_i$  ne sont rien d'autre que les fonctions de base linéaires associées aux sommets et listées dans le tableau B.3. Les  $\lambda_i$  sont définis dans l'élément réel par la transformation  $T^K$  habituelle.

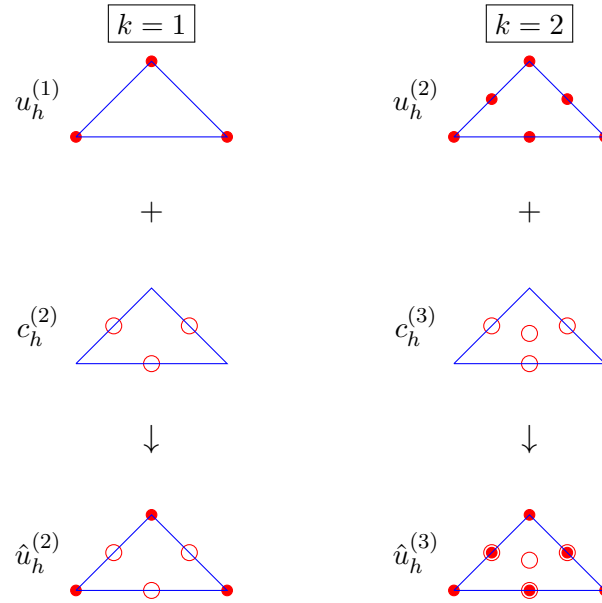


Figure 15.1 –  $u_h^{(k)} + c_h^{(k+1)} = \hat{u}_h^{(k+1)}$ , for  $k = 1, 2$

Nous allons détailler les cas linéaire et quadratique. Pour une solution éléments finis linéaire (dont les degrés de liberté se trouvent aux sommets), on va ajouter une correction de degré 2 associée aux milieux des arêtes. Sur chaque élément  $K$ , on cherche à déterminer  $\hat{u}_h^{(2)}$  de la forme :

$$u_h^{(1)} + c_h^{(2)} = u_h^{(1)} + c_{12,K}^{(2)}(4\lambda_1\lambda_2) + 4c_{23,K}^{(2)}(4\lambda_2\lambda_3) + c_{31,K}^{(2)}(4\lambda_3\lambda_1)$$

où on a exprimé les fonctions de base quadratiques aux milieux des arêtes sous forme barycentrique. Notons que le facteur 4 est optionnel mais permet de retrouver les fonctions de base quadratiques usuelles aux milieux des côtés, la fonction  $4\lambda_1\lambda_2$  valant 1 au milieu de l'arête. Dans le cas général, les fonctions de base associées à  $c_h^{(k+1)}$  ne sont pas forcément les fonctions de base de Lagrange usuelles mais bien celles de la base hiérarchique similaire à ce que l'on a vu au chapitre 5.

Les coefficients inconnus  $c_{ij,K}^{(2)}$  sont obtenus en comparant les dérivées partielles secondes de  $c_h^{(2)}$  (or  $\hat{u}_h^{(2)}$ ) à celles d'ordre 1 de  $g_h^{(1)}$ . Ainsi, on doit résoudre le système linéaire en trois inconnues (4 en dimension 3) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 c_h^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial g_{hx}^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 c_h^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{\partial g_{hy}^{(1)}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 c_h^{(2)}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{hx}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial g_{hy}^{(1)}}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (15.7)$$

La dernière équation traduit le fait que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g_{hx}^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial g_{hy}^{(1)}}{\partial x}$ . On tient ainsi compte de toutes les composantes du gradient reconstitué.

À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, les coefficients  $c_{ij,K}^{(2)}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} c_{12,K}^{(2)} &= \frac{1}{8}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{g}_2^{(1)} - \mathbf{g}_1^{(1)}) = \frac{h_{12}}{8} \mathbf{e}_{12} \cdot (\mathbf{g}_2^{(1)} - \mathbf{g}_1^{(1)}) \\ c_{23,K}^{(2)} &= \frac{1}{8}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \cdot (\mathbf{g}_3^{(1)} - \mathbf{g}_2^{(1)}) = \frac{h_{23}}{8} \mathbf{e}_{23} \cdot (\mathbf{g}_3^{(1)} - \mathbf{g}_2^{(1)}) \\ c_{31,K}^{(2)} &= \frac{1}{8}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{g}_1^{(1)} - \mathbf{g}_3^{(1)}) = \frac{h_{31}}{8} \mathbf{e}_{31} \cdot (\mathbf{g}_1^{(1)} - \mathbf{g}_3^{(1)}) \end{aligned} \quad (15.8)$$

On remarque immédiatement que  $c_{ij,K}^{(2)}$  ne dépend que des sommets  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$  et du gradient reconstitué à ces mêmes sommets, préservant ainsi la continuité de la solution enrichie aux interfaces entre les éléments. Il est en fait possible de calculer ces coefficients arête par arête mais il est plus simple de les calculer sur chaque élément.

**Remarque 15.1.** Les coefficients  $c_{ij,K}^{(2)}$  peuvent aussi s'interpréter en termes de longueur d'arête dans une certaine métrique. On a par exemple :

$$c_{12,K}^{(2)} = \frac{h_{12}}{8} \mathbf{e}_{12} \cdot (\mathbf{g}_2^{(1)} - \mathbf{g}_1^{(1)}) = \frac{(h_{12})^2}{8} \mathbf{e}_{12} \cdot \frac{(\mathbf{g}_2^{(1)} - \mathbf{g}_1^{(1)})}{h_{12}} \simeq \frac{(h_{12})^2}{8} \mathbf{e}_{12} \cdot H(\mathbf{x}_{12}) \cdot \mathbf{e}_{12}$$

où  $H(\mathbf{x}_{12})$  est la matrice hessienne de  $u$  évaluée au milieu de l'arête. Si cette matrice est définie positive, les coefficients sont liés à la longueur d'arête  $l_{12}$  dans la métrique induite par la matrice  $H$  par  $l_{12} = \sqrt{8c_{12,K}^{(2)}}$ . Notons toutefois, et c'est important, que nous n'avons nullement besoin du caractère défini positif de la matrice hessienne pour poursuivre. ◀

La généralisation aux approximations d'ordre plus élevé est presque triviale. Dans le cas quadratique, on commence avec une solution éléments finis quadratique  $u_h^{(2)}$  dont les degrés de liberté sont ici associés aux sommets et aux milieux d'arêtes (voir à droite de la figure 15.1). Pour obtenir une solution enrichie cubique, on a besoin de 4 degrés de liberté supplémentaires (10 en dimension 3). Pour y arriver, un deuxième degré de liberté est attaché aux milieux des arêtes et un autre au barycentre de l'élément. On a alors :

$$\begin{aligned} \hat{u}_h^{(3)} = u_h^{(2)} + c_h^{(3)} &= u_h^{(2)} + c_{12,K}^{(3)} \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) + c_{23,K}^{(3)} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_3) + c_{31,K}^{(3)} \lambda_3 \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_1) \\ &\quad + c_{4,K}^{(3)} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned}$$

On compare maintenant les dérivées troisièmes de  $c_h^{(3)}$  (de  $\hat{u}_h^{(3)}$ ) avec les dérivées secondes de  $\mathbf{g}_h^{(2)}$ ,

et on obtient un système de 4 équations en 4 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 c_h^{(3)}}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 g_{hx}^{(2)}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 c_h^{(3)}}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 g_{hy}^{(2)}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 c_h^{(3)}}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 g_{hx}^{(2)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_{hx}^{(2)}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 g_{hy}^{(2)}}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial^3 c_h^{(3)}}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 g_{hy}^{(2)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_{hy}^{(2)}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 g_{hx}^{(2)}}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (15.9)$$

En résolvant (sur chaque élément), on trouve :

$$\begin{aligned} c_{12,K}^{(3)} &= \frac{h_{12}}{3} \mathbf{e}_{12} \cdot (\mathbf{g}_1^{(2)} - 2\mathbf{g}_{12}^{(2)} + \mathbf{g}_2^{(2)}) \\ c_{23,K}^{(3)} &= \frac{h_{23}}{3} \mathbf{e}_{23} \cdot (\mathbf{g}_2^{(2)} - 2\mathbf{g}_{23}^{(2)} + \mathbf{g}_3^{(2)}) \\ c_{31,K}^{(3)} &= \frac{h_{31}}{3} \mathbf{e}_{31} \cdot (\mathbf{g}_3^{(2)} - 2\mathbf{g}_{31}^{(2)} + \mathbf{g}_1^{(2)}) \\ c_{4,K}^{(3)} &= \frac{2}{3} (l_1 \mathbf{m}_1 \cdot (\mathbf{g}_1^{(2)} - 3\mathbf{g}_B^{(2)} + 2\mathbf{g}_{23}^{(2)}) + l_2 \mathbf{m}_2 \cdot (\mathbf{g}_2^{(2)} - 3\mathbf{g}_B^{(2)} + 2\mathbf{g}_{31}^{(2)}) \\ &\quad + l_3 \mathbf{m}_3 \cdot (\mathbf{g}_3^{(2)} - 3\mathbf{g}_B^{(2)} + 2\mathbf{g}_{12}^{(2)})) \end{aligned} \quad (15.10)$$

où  $\mathbf{g}_B^{(2)}$  est la valeur de  $\mathbf{g}_h^{(2)}$  au barycentre.

**Remarque 15.2.** De toute évidence, les trois premiers coefficients sont reliés aux dérivées directionnelles d'ordre 2 de  $\mathbf{g}_h^{(2)}$  le long des arêtes. Le quatrième coefficient est quant à lui lié aux dérivées secondes mais dans les directions des médianes  $\mathbf{m}_i$ . Ils sont donc tous reliés aux dérivées troisièmes de  $u$ , comme on s'y attendrait pour une solution quadratique. ◀

Dans le cas général, on doit résoudre un système de dimension  $\dim(P^{(k+1)}) - \dim(P^{(k)})$  soit  $k + 2$  équations en dimension 2 et  $(k + 3)(k + 2)/2$  en dimension 3 pour déterminer entièrement  $c_h^{(k+1)}$  sur chaque élément.

En résumé, les principales étapes de notre stratégie d'adaptation de maillage sont les suivantes :

- Partant d'une solution éléments finis  $u_h^{(k)}$  d'une équation aux dérivées partielles ;
- Le gradient  $\mathbf{g}_h^{(k)}$  de cette solution est calculé à l'aide de la méthode décrite à l'annexe E ;
- On calcule les coefficients de  $c_h^{(k+1)}$  ; à l'aide de (15.8) ou (15.10) sur chaque élément ;
- On compose la solution enrichie  $\hat{u}_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + c_h^{(k+1)}$  ;
- La norme de l'erreur sur chaque élément est estimée par  $\|c_h^{(k)}\|$ .

### 15.2.2 Le cas unidimensionnel

Le cas unidimensionnel mérite que l'on s'y attarde un peu. Évidemment, tous les développements précédents sont faciles à expliciter et le système à résoudre se réduit à une seule équation dans tous les cas. Soit donc :

$$\hat{\phi}^{(2)}(\xi) = 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 = 4\frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1+\xi)}{2} = 1 - \xi^2$$

$$\hat{\phi}^{(3)}(\xi) = \hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2) = \frac{\xi}{4}(\xi^2 - 1)$$

les fonctions de base quadratique et cubique définie sur l'élément de référence. Par la transformation  $\xi = \frac{2x-(x_i+x_{i+1})}{h_K}$ , on revient sur l'élément réel  $K = [x_i, x_{i+1}]$  de longueur  $h_K$  et on a :

$$\phi_K^{(2)}(x) = 4\lambda_1\lambda_2 = \frac{4}{h_K^2}(x-x_i)(x_{i+1}-x)$$

$$\phi_K^{(3)}(x) = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{2}{h_K^3}(x-x_i)(x-x_B)(x_{i+1}-x)$$

où  $x_B = (x_i + x_{i+1})/2$ . On veut alors construire :

$$\hat{u}_h^{(2)}(x) = u_h^{(1)}(x) + c_{1,K}^{(2)}\phi_K^{(2)}(x) \text{ et } \hat{u}_h^{(3)}(x) = u_h^{(2)}(x) + c_{1,K}^{(3)}\phi_K^{(3)}(x)$$

Les coefficients  $c_{1,K}^{(2)}$  and  $c_{1,K}^{(3)}$  sont faciles à calculer. La deuxième (troisième) dérivée de  $\hat{u}_h^{(2)}(x)$  ( $\hat{u}_h^{(3)}(x)$ ) est comparée à la dérivée première (seconde) de  $g_h^{(1)}(x)$  ( $g_h^{(2)}(x)$ ) et un calcul très simple nous mène à :

$$c_{1,K}^{(2)} = -\frac{h_K}{8}(g_{i+1}^{(1)} - g_i^{(1)}) \text{ et } c_{1,K}^{(3)} = \frac{h_K}{3}(g_{i+1}^{(2)} - 2g_B^{(2)} + g_i^{(2)})$$

L'erreur est alors :

$$\begin{aligned} u(x) - u_h^{(1)}(x) &\simeq \hat{u}_h^{(2)}(x) - u_h^{(1)}(x) = c_{1,K}^{(2)}\phi_K^{(2)}(x) \\ &= -\frac{1}{2h_K}(g_{i+1}^{(1)} - g_i^{(1)})(x-x_i)(x_{i+1}-x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(g_{i+1}^{(1)} - g_i^{(1)})}{h_K}(x-x_i)(x-x_{i+1}) \\ &\approx \frac{1}{2}u''(x_B)(x-x_i)(x-x_{i+1}) \end{aligned}$$

dans le cas linéaire et :

$$u(x) - u_h^{(2)}(x) \simeq \hat{u}_h^{(3)}(x) - u_h^{(2)}(x) \simeq \frac{1}{3!}u'''(x_B)(x-x_i)(x-x_B)(x-x_{i+1})$$

dans le cas quadratique. L'erreur sur l'élément unidimensionnel n'est rien d'autre qu'une approximation de l'erreur d'interpolation classique de Lagrange.



## 15.3 Notion d'optimalité du maillage

Il est rapidement devenu évident que le maillage est une composante essentielle de la solution numérique par éléments finis. Optimiser le maillage, de manière à améliorer cette solution, est donc devenu un enjeu crucial. On a ainsi cherché à optimiser des maillages de différentes façons. Optimiser un maillage pour en maximiser la qualité des éléments est une première approche qui, malheureusement, ne tient aucun compte de la nature de la solution.

On peut formuler plus efficacement le problème d'optimisation en cherchant à obtenir, pour un nombre de noeuds donné, le maillage qui minimise une certaine norme de l'erreur. Bien entendu, on minimisera une erreur estimée seulement car la véritable erreur est généralement inconnue. Nous utiliserons donc l'estimateur d'erreur décrit à la section 15.2.1. Il reste à voir comment utiliser adéquatement l'information contenue dans l'estimateur d'erreur pour atteindre cet objectif.

### 15.3.1 Minimisation de l'erreur sur un élément

Nous présentons dans cette section un problème simplifié de minimisation d'erreur sur un seul élément. Bien entendu, le problème est beaucoup plus complexe en pratique mais les idées développées dans ce qui suit nous guideront dans le cas général. Nous considérerons d'abord un problème d'une interpolation linéaire et on fera abstraction pour le moment de la solution éléments finis.

Le problème peut se formuler comme suit. Pour un élément  $K$ , d'aire  $A^K$  et centré en  $(x^K, y^K)$ , quelle est la forme de l'élément  $K$  qui minimise l'erreur d'interpolation. Suivant Bank et Smith [3], nous utiliserons la semi-norme  $H^1$  et une fonction  $u(x)$  quadratique. L'idée derrière étant que localement, on peut approcher toute fonction régulière par un développement de Taylor de degré 2 et donc que, toujours localement, une fonction régulière se comporte quadratiquement. Le problème consiste alors à déterminer la forme du triangle qui minimise l'erreur. De ce fait, on cherche à minimiser l'erreur par unité d'aire.

Le développement suivant est tiré en grande partie de la thèse de Bois [7]. On cherche donc la position des sommets du triangle de manière à minimiser  $|\Pi_h^{(1)}(u) - u|_{1,K}$  où  $\Pi_h^{(1)}(u)$  est l'interpolé linéaire de  $u$  aux sommets du triangle. Le triangle résultant sera appelé optimal. Il s'agit donc de trouver l'interpolant optimal et on pose le problème en tant que problème d'interpolation pure.

Pour formuler le problème, on suppose, sans perte de généralité que l'élément est centré à l'origine. Le problème peut alors s'écrire :

$$\min_{\{V_1, V_2, V_3\}} \int_{K(V_1, V_2, V_3)} |\nabla(\Pi_h^{(1)}(u) - u)|^2 dx \quad (15.11)$$

$$\text{vérifiant } \text{Aire}(K(V_1, V_2, V_3)) = A_K \text{ et } V_1 + V_2 + V_3 = (0, 0)$$

où  $V_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  désignent les trois sommets du triangle  $K$ . Ce problème de minimisation sous contraintes peut facilement être résolu, notamment avec un logiciel de calcul symbolique comme Maple™ ou Mathematica® en réécrivant la fonction à minimiser en termes des  $V_i$  après avoir éliminé trois des inconnues à l'aide des contraintes. On obtient alors un problème de minimisation sans contraintes de trois inconnues au lieu de six. Supposons maintenant que  $v_1 = x_1$ ,  $v_2 = y_1$  and  $v_3 = y_2$  sont les trois inconnues qui restent. La solution vérifie alors un système de trois équations

en trois inconnues obtenues en dérivant la fonction à minimiser :

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left( \int_{K(V_1, V_2, V_3)} |\nabla(\Pi_h^{(1)}(u) - u)|^2 dx \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Comme nous le verrons, ce système n'a pas forcément une solution unique et de plus, la fonction à minimiser peut avoir des points de selle. Pour illustrer la situation, regardons de plus près quelques cas simples.

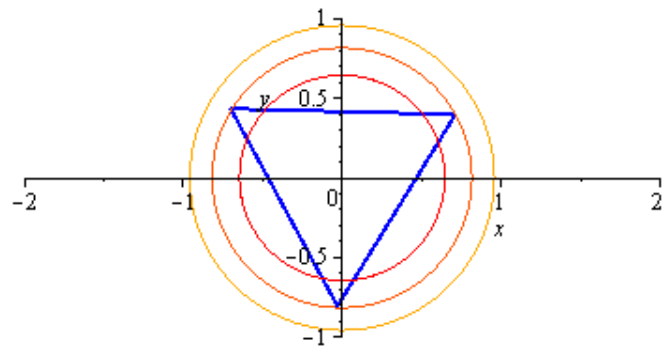
Considérons d'abord la fonction quadratique définie positive  $u(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  pour laquelle les courbes de niveau de l'erreur d'interpolation  $(\Pi_h^{(1)}(u) - u)$  sont des ellipses (des cercles si  $a = b = 1$ ). La Figure 15.2 montre trois cas différents :  $u(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $u(x, y) = x^2/10 + y^2/2$  et  $u(x, y) = x^2 + y^2/100$ . Dans chaque cas, le triangle optimal est illustré ainsi que quelques courbes de niveau de l'erreur. Puisque l'on a interpolé la fonction, les sommets du triangle sont situés sur la courbe de niveau 0.

Dans le premier cas correspondant à la fonction  $u(x, y) = x^2 + y^2$ , le triangle optimal est équilatéral. Le problème de minimisation (15.11) possède un nombre infini de solutions puisque toute rotation du triangle équilatéral est aussi une solution qui donne la même valeur de la fonction objectif (même erreur par unité d'aire). La deuxième fonction  $u(x, y) = x^2/10 + y^2/2$  ne possède cette fois que deux solutions distinctes, l'une étant la réflexion de l'autre par rapport à l'axe des  $y$  (voir la Figure 15.2b). La Figure 15.2c) montre clairement que minimiser la semi-norme de l'erreur peut mener à des éléments étirés dans une direction compatible avec la fonction et donc à des maillages anisotropes. C'est précisément le cas pour la fonction  $u(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{100}$ . Le triangle optimal est allongé dans la direction de l'axe des  $y$  et capture très bien la fonction  $u$ . À l'inverse, un triangle étiré dans la direction de l'axe des  $x$  produirait une très mauvaise approximation de  $u$ .

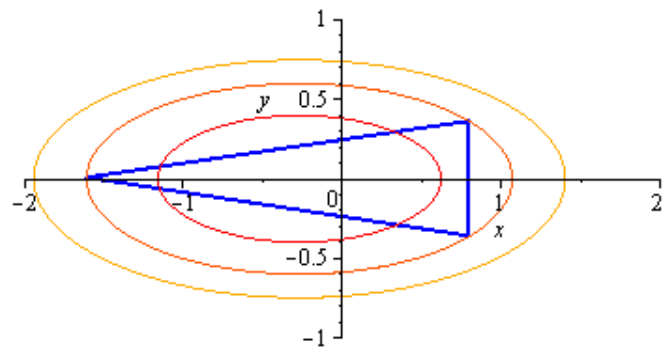
Regardons maintenant la fonction  $u(x, y) = x^2 - y^2$  dont le Hessien est indéfini (une valeur propre positive et l'autre négative) et pour laquelle les courbes de niveau de l'erreur sont des hyperboles. Le triangle optimal est présenté à la Figure 15.3a). La courbe de niveau 0 sur laquelle se trouvent les sommets est donnée par les deux asymptotes  $y = \pm x$ . L'un des côtés du triangle optimal est entièrement contenu dans l'une des asymptotes et le triangle résultant est droit. Il y a donc quatre configurations possibles pour le triangle optimal, chacune étant une rotation de  $\pi/2$  de la précédente.

Enfin, pour  $u(x, y) = xy$  (dont le hessien est singulier), on obtient encore un triangle rectangle illustré à la Figure 15.3b). mais orienté différemment par rapport à l'exemple précédent. Les courbes de niveau de l'erreur sont toujours des hyperboles mais dont les asymptotes coïncident avec les axes de coordonnées.

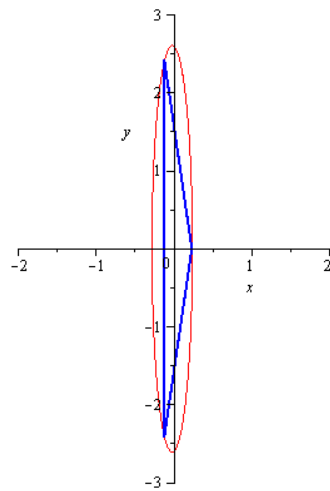
Nous avons ainsi couvert les trois cas possibles pour optimiser l'interpolation linéaire d'une fonction quadratique.



a)  $u(x, y) = x^2 + y^2$



b)  $u(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2}$



c)  $u(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{100}$

Figure 15.2 – Triangles optimaux pour des fonctions quadratiques définies positives.

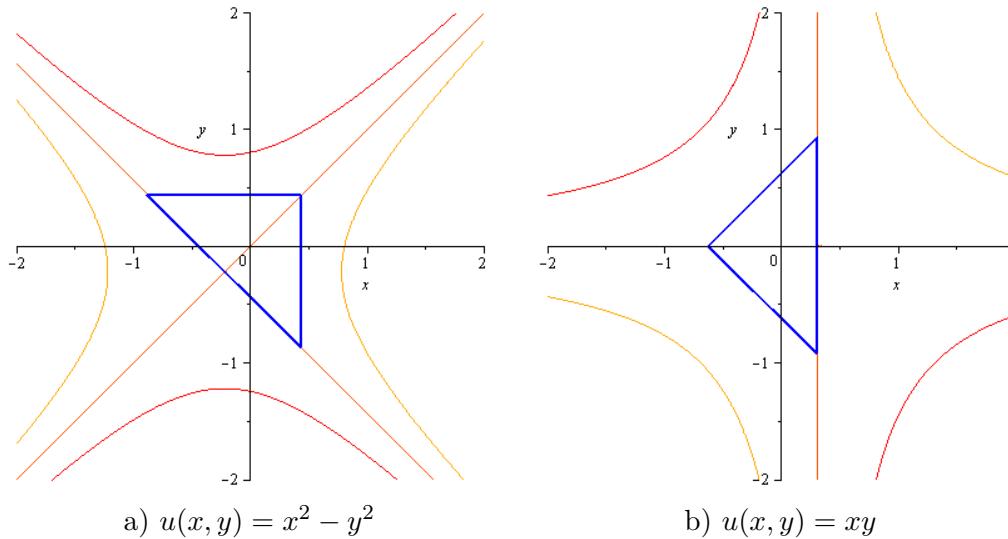


Figure 15.3 – Hessian indéfini.

### 15.3.2 Le cas quadratique

On peut faire une analyse similaire dans le cas quadratique c.-à-d. on considère le problème de la meilleure interpolation de degré 2 pour une fonction  $u(x)$  cubique (voir [9]). La situation est toutefois beaucoup plus complexe. D'une part, le problème de minimisation (15.11) devrait permettre de faire bouger également les noeuds aux milieux des arêtes, menant ainsi à des éléments courbes dans tout le domaine. Bien que naturelle, cette approche devient rapidement très coûteuse lors des opérations locales sur le maillage que nous verrons à la prochaine section. Il est en effet très difficile de déterminer si un élément courbe est valide. D'autre part, s'il n'y avait essentiellement que trois cas possibles pour une fonction quadratique (selon les propriétés de son hessien), il y en a beaucoup plus pour une fonction cubique et en faire l'analyse complète serait une tâche immense et pas forcément très utile. L'analyse des polynômes de degré 3 remonte à Newton qui a identifié 78 cas différents. On montre toutefois que si on garde les côtés droits, on peut quand même optimiser l'erreur par unité d'aire en suivant la même démarche que dans le cas linéaire.

## 15.4 Stratégie d'adaptation de maillage

On peut maintenant établir une stratégie complète d'adaptation de maillage. Nous aurons en gros deux objectifs complémentaires. On voudra d'abord atteindre un niveau d'erreur fixé dès le départ et par la suite optimiser le maillage en s'inspirant de ce que nous avons établi à la section précédente en minimisant le ratio de l'erreur sur l'aire (le volume en 3D). Nous avons choisi de travailler en norme  $L^2$  en ce qui concerne le niveau d'erreur souhaité. On essaiera donc d'atteindre

un niveau d'erreur global  $E_\Omega$  en norme  $L^2$  :

$$E_\Omega^2 = \|u - u_h^{(k)}\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega |u - u_h^{(k)}|^2 dv$$

Pour y arriver, il nous faudra en quelque sorte équilibrer l'erreur dans tout le domaine et atteindre une erreur à peu près constante partout soit :

$$u - u_h^{(k)} = c_{te} \quad (15.12)$$

De la section précédente, nous cherchions aussi à minimiser l'erreur par unité d'aire en minimisant la semi-norme de l'erreur, objectif qui va également dans le sens d'uniformiser l'erreur car si, ultimement, la norme du gradient de l'erreur s'annule, alors cette erreur est constante.

L'équation (15.12) nous permet d'écrire :

$$E_\Omega^2 = \int_\Omega |u - u_h^{(k)}|^2 dv = \int_\Omega c_{te}^2 dv = c_{te}^2 \text{mes}(\Omega) \quad (15.13)$$

où  $\text{mes}(\Omega)$  désigne la longueur, l'aire ou le volume suivant la dimension du domaine. Cet objectif global doit aussi pouvoir se traduire localement sur un élément ou sur une groupe d'éléments. Ainsi, sur chaque élément  $K$  :

$$E_K^2 = \int_K |u - u_h^{(k)}|^2 dv = c_{te}^2 \text{mes}(K) = \frac{E_\Omega^2 \text{mes}(K)}{\text{mes}(\Omega)}$$

Si on réalise ces objectif local sur chaque élément, alors en supposant qu'il y a  $N$  éléments au total dans le maillage, on aura :

$$\sum_{i=1}^N E_{K_i}^2 = \frac{E_\Omega^2 \sum_{i=1}^N \text{mes}(K_i)}{\text{mes}(\Omega)} = \frac{E_\Omega^2 \text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega)} = E_\Omega^2$$

et on aura atteint notre objectif global.

Il reste à voir comment modifier un maillage existant, sur lequel on a préalablement calculé une solution numérique  $u_h^{(k)}$  et par la suite estimé les dérivées nodales  $\mathbf{g}_k^{(k)}$ . Quatre opérations, dites topologiques, seront utilisées à cette fin. La division d'une arête et la suppression d'un noeud permettront de s'approcher du niveau d'erreur souhaité en norme  $L^2$ . On divisera les arêtes dans les régions où l'erreur estimée est grande et au contraire, on supprimera des noeuds là où cette erreur est jugée trop petite.

Le retournement d'arête et le déplacement de sommets permettront en revanche de minimiser l'erreur par unité d'aire (de volume en dimension 3). Nous aurons besoin de la notion de coquille autour d'un noeud ou d'une arête. Il s'agit simplement de tous les éléments du maillage contenant cette arête ou ce sommet. Les opérations locales et donc les modifications du maillage seront effectuées à l'intérieur de ces coquilles. Aucun remaillage global ne sera effectué.

Concrètement, on balaira les noeuds et les arêtes du maillage, on en extraira la coquille correspondante et on prendra la décision de la modifier ou non. Ainsi, pour trouver l'erreur locale désirée sur une coquille  $S$ , il suffit de sommer l'erreur sur tous les éléments la composant :

$$E_S^2 = \int_S |u - u_h^{(k)}|^2 dv = \sum_{K \in S} \frac{E_\Omega^2 \text{mes}(K)}{\text{mes}(\Omega)} = \frac{E_\Omega^2 \text{mes}(S)}{\text{mes}(\Omega)}. \quad (15.14)$$

Cette valeur se nomme le *seuil* et sera l'objectif à atteindre sur chaque coquille.

Bien entendu, l'erreur sera estimée à l'aide de la correction  $c_h^{(k)}$  de la section précédente. On notera donc :

$$e_K = \|c_h^{(k)}\|_{0,K} = \left( \int_K (c_h^{(k)})^2 dv \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \nabla e_K = |c_h^{(k)}|_{1,K} \left( \int_K (\nabla c_h^{(k)})^2 dv \right)^{1/2}$$

les erreurs estimées sur l'élément  $K$  en norme  $L^2$  et semi-norme  $H^1$  respectivement. Rappelons que l'évaluation de ces quantités ne nécessitent que les valeurs nodales du gradient de la solution  $\mathbf{g}_h^{(k)}$ .

### 15.4.1 Division d'arête



Figure 15.4 – Division d'une arête

La division d'une arête  $A$  a lieu lorsque l'erreur estimée en norme  $L^2$  sur la coquille associée  $S(A)$  est jugée trop élevée. Comme on peut le voir à la figure 15.4, on divise l'arête en lui ajoutant un nouveau nœud (noté  $\mathbf{V}'$ ) au milieu. Ce nœud doit ensuite être relié aux autres sommets pour former des triangles, générant ainsi une nouvelle coquille notée  $S(\mathbf{V}')$ . Pour estimer l'erreur sur cette nouvelle coquille et calculer les erreurs estimées  $e_K$ , on doit avoir une valeur de  $\mathbf{g}_h^{(k)}$  au sommet  $\mathbf{V}'$ . Mais comme  $\mathbf{g}_h^{(k)}$  est un champ défini dans tout le domaine, on peut facilement y arriver par simple interpolation. Ce n'est toutefois pas la méthode la plus rapide. On montre dans Briffard [12] qu'une méthode de krigeage sur la coquille complète (voir par exemple Fortin [26]) est beaucoup plus rapide.

On compare ensuite les erreurs estimées sur les coquilles  $S(A)$  et  $S(\mathbf{V}')$  et on conserve celle étant la plus près de l'erreur désirée  $E_S$  (15.14). Ainsi, nous conserverons la coquille modifiée  $S(\mathbf{V}')$  si :

$$\left| E_S^2 - \sum_{K \in S(\mathbf{V}')} e_K^2 \right| < \left| E_S^2 - \sum_{K \in S(A)} e_K^2 \right|$$

et sinon, on revient à la coquille initiale et on ne modifie pas le maillage.

Dans le cas 3D, l'opération de division d'arête est identique au cas 2D, mais la coquille résultante sera composée de beaucoup plus d'éléments. Il va de soi que bien que le principe de base soit identique en dimension 2 ou 3, les opérations topologiques sont toujours plus difficiles à effectuer en dimension 3.

### 15.4.2 Élimination d'un sommet

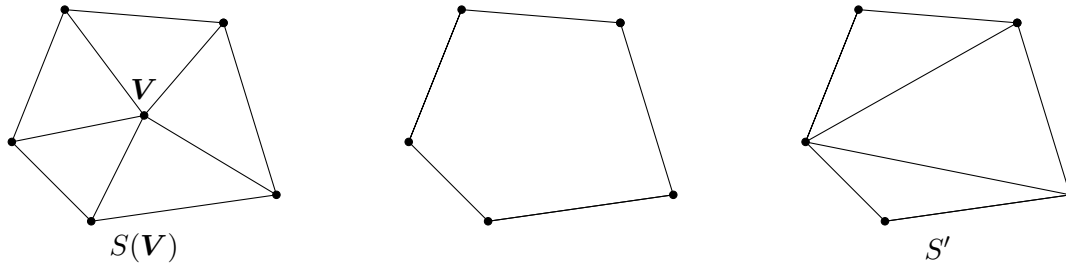


Figure 15.5 – Élimination d'un noeud

À l'inverse de la division d'arête, l'élimination du noeud  $V$  est effectuée lorsque l'erreur estimée sur la coquille  $S(V)$  qui lui est associée est trop élevée. La première étape, illustrée à la figure 15.5, consiste donc à retirer le noeud  $V$ , pour ainsi obtenir un polygone (polyèdre en dimension 3). Celui-ci doit être ensuite remaillé et il existe plusieurs façons d'y arriver. C'est quand même une opération délicate, parfois même impossible, particulièrement en dimension 3. On peut par exemple utiliser la méthode de *ear clipping*, développé dans [35] en dimension 2 et généralisée en dimension 3 dans [12]. Nous noterons cette nouvelle coquille  $S'$ . Ensuite, nous conserverons la coquille qui entre  $S(V)$  et  $S'$  se rapprochant le plus du seuil. Ainsi on conservera la coquille modifiée si :

$$\left| E_S^2 - \sum_{K \in S'} e_K^2 \right| < \left| E_S^2 - \sum_{K \in S(V)} e_K^2 \right|$$

et sinon on ne fait rien. L'idée est de toujours se rapprocher de l'objectif d'erreur locale et par conséquent de l'objectif d'erreur globale  $E_\Omega$  et les deux opérations précédentes vont en ce sens. pour l'erreur.

Les deux opérations qui suivent optimiseront l'erreur par unité d'aire (de volume).

### 15.4.3 Retournement d'arête

Pour déterminer si nous retournons une arête  $A$ , nous allons comparer les erreurs estimées sur la coquille initiale  $S(A)$  et sur la coquille où l'arête est retournée notée  $S(A')$  et conserver celle qui minimise la semi-norme  $H^1$  de l'erreur (voir la figure 15.4.3). On voit ainsi réapparaître la notion de minimiser l'erreur par unité d'aire, non pas sur un seul triangle mais bien sur une coquille. Autrement dit, l'arête sera retournée si :

$$\sum_{K' \in S(A')} (\nabla e_{K'})^2 < \sum_{K \in S(A)} (\nabla e_K)^2$$

Cette opération est faite en parcourant toutes les arêtes internes (non situées sur la frontière) du domaine.

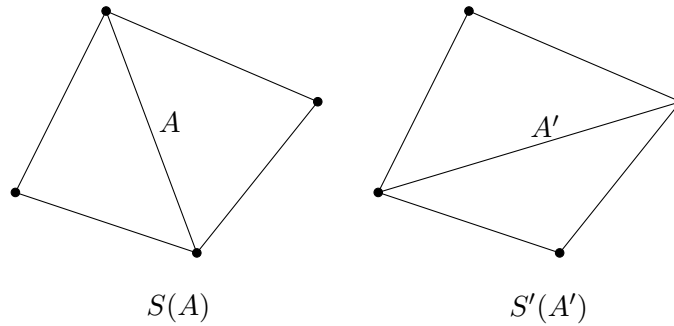


Figure 15.6 – Retournement d'une arête interne

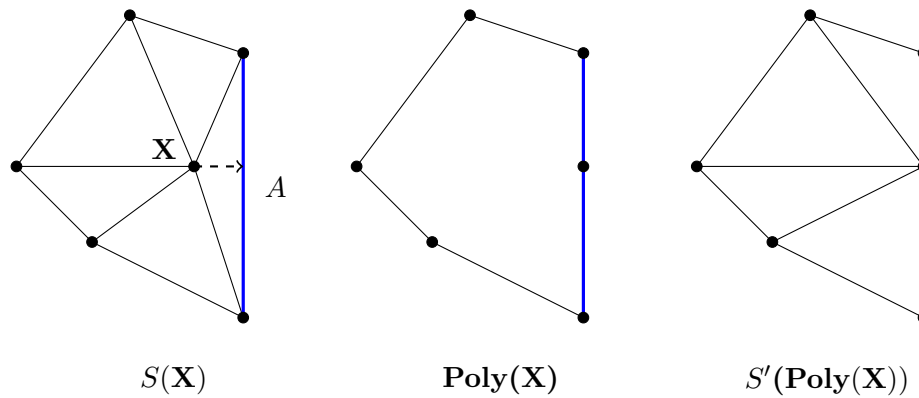


Figure 15.7 – Retournement d'une arête de bord

Bien que cela puisse sembler un peu absurde, il est parfois utile de retourner les arêtes situées sur la frontière  $\partial\Omega$ , dans un sens que nous allons maintenant préciser. Ce retournement ne se fera évidemment pas de la même manière que pour les arêtes internes car la géométrie du domaine doit être préservée et cette arête ne peut être déplacée. On considère pourtant le noeud  $\mathbf{X}$  se situant dans le même élément que l'arête  $A$  du bord mais ne touchant pas à la géométrie, ainsi que sa coquille associée  $S(\mathbf{X})$ , tel que présenté à la figure 15.7. Projetons ensuite ce sommet sur la géométrie pour obtenir un polygone  $\mathbf{Poly}(\mathbf{X})$ . Ce polygone sera ensuite remaillé de manière à minimiser la semi-norme  $H^1$  de l'erreur. Finalement, le nouvel ensemble d'éléments  $S'(\mathbf{Poly}(\mathbf{X}))$  sera conservé si celui-ci possède une erreur en semi-norme  $H^1$  plus basse que sur la coquille initiale.

Notons que cette opération locale est hybride. Nous la présentons comme un retournement d'arête mais elle comporte aussi un déplacement de sommet. Elle est équivalente à projeter sur la frontière, le noeud opposé à l'arête. L'expérience montre qu'elle permet d'améliorer les maillages au voisinage des frontières en éliminant des noeuds devenus inutiles.



Comme nous l'avons déjà mentionné, les opérations topologiques locales sont beaucoup plus difficiles à réaliser en dimension 3. S'il est généralement simple de voir ces opérations en dimension 2, la visualisation des cas tridimensionnels n'est pas une mince tâche. Le retournement d'arête ne fait pas exception. Notons tout d'abord que le nombre de tétraèdres d'une coquille peut varier lors d'un retournement d'arête, ce qui n'est pas le cas en dimension 2. Nous présentons deux situations aux figures 15.8 et 15.9. Ainsi, à la figure 15.8 la coquille initiale comporte initialement trois tétraèdres, nombre qui passe à deux après retournement.

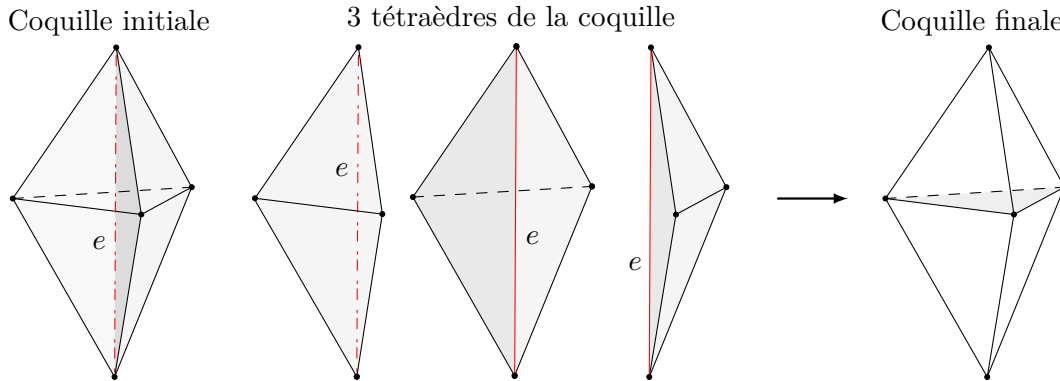


Figure 15.8 – Retournement d'arête dans une coquille à trois tétraèdres : coquille initiale (gauche et centre) et finale (à droite).

#### 15.4.4 Déplacement d'un sommet

Le déplacement du sommet  $\mathbf{V}$  est également utilisé pour minimiser la semi-norme de l'erreur. On considère donc la coquille  $S(\mathbf{V})$  associée au noeud et on cherchera la position  $\mathbf{x}$  qui minimise la semi-norme de l'erreur c.-à-d. qui minimise la fonction  $F$  définie par :

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{K \in S(\mathbf{x})} (\nabla e_K)^2$$

où  $S(\mathbf{x})$  est la nouvelle coquille obtenue en déplaçant le noeud  $\mathbf{V}$  à la position  $\mathbf{x}$ . Pour minimiser, on se déplacera dans la direction inverse du gradient  $\mathbf{d} = -\nabla F$  par une méthode de gradient standard. La principale difficulté est de calculer ce gradient et on le fera par différences finies. Plus précisément, on détermine d'une part l'arête la plus longue issue de  $\mathbf{V}$  ( $\mathbf{e}_{long}$ ) et d'autre part, l'arête qui est la plus orthogonale ( $\mathbf{e}_{orth}$ ) à la précédente. On calcule ensuite :

$$\begin{cases} \nabla F(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_{long} = \frac{F(\mathbf{V} + h\mathbf{e}_{long}) - F(\mathbf{V})}{h} \\ \nabla F(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_{orth} = \frac{F(\mathbf{V} + h\mathbf{e}_{orth}) - F(\mathbf{V})}{h} \end{cases} \quad (15.15)$$

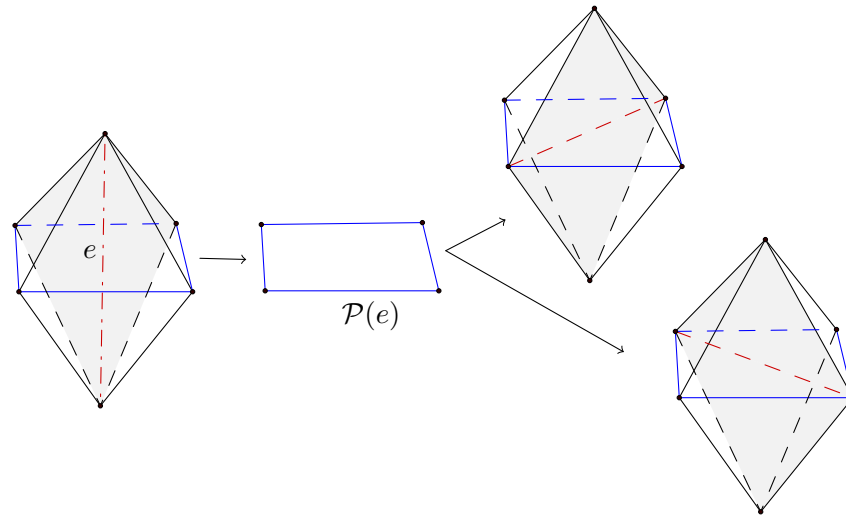


Figure 15.9 – Retournement d’arête dans une coquille à quatre tétraèdres : coquille initiale (gauche), polygone associé (centre) et coquilles finales (droite).

et on résout pour obtenir le gradient de  $F$  en  $\mathbf{V}$  et donc la direction de descente  $\mathbf{d}$ .

Par la suite, quelques itérations de la méthode du gradient suffisent pour minimiser la fonction. On doit par contre toujours s’assurer que le déplacement ne retourne pas les éléments (que le sommet ne sorte pas de la coquille) et que le maillage demeure valide (voir la Figure 15.10).

Le déplacement de sommet est une opération relativement coûteuse puisque de nombreuses réinterpolations de  $\mathbf{g}_h^{(k)}$  sont nécessaires. Les vérifications pour s’assurer de la validité du maillage sont également gourmandes en temps de calcul, particulièrement en dimension 3. Il existe des variantes moins coûteuses et surtout plus rapides. Briffard en présente une très intéressante dans sa thèse et basée sur l’idée que les arêtes connectées à un sommet agissent comme des ressorts dont la constante de rappel est proportionnelle à l’erreur. Notons qu’ici encore, bien que la méthode soit totalement différente, le déplacement ne sera effectué que si la semi-norme de l’erreur sur la coquille modifiée diminue. On se référera encore une fois à [12] pour les détails.

Terminons cette section par un algorithme rudimentaire résumant les différentes étapes de la stratégie d’adaptation.

1. On part d’un maillage initial, on calcule une solution  $u_k^{(k)}$  dont on reconstruit le gradient  $\mathbf{g}_h^{(k)}$  par la méthode Zhang et Naga (voir l’annexe E) ;
2. On établit une séquence pour les opérations topologiques de modification des maillages. Cette séquence est une heuristique pouvant prendre la forme suivante :
  - a) Parcourir les arêtes pour les diviser et parcourir les sommets pour les supprimer si nécessaire de manière à approcher l’objectif d’erreur  $E_\Omega$  en norme  $L^2$ .
  - b) Parcourir les arêtes pour les retourner et parcourir les sommets pour les déplacer afin d’optimiser l’erreur par unité d’aire ;
  - c) Répéter les deux étapes précédentes au besoin ;

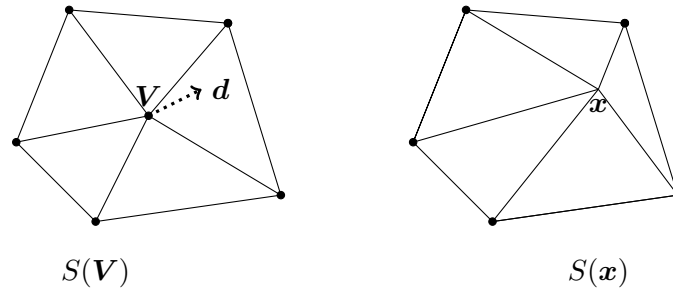


Figure 15.10 – Déplacement d'un sommet

3. Calculer une nouvelle solution  $u_k^{(k)}$  sur ce maillage modifié, réestimer son gradient et retourner à l'étape 2.

Cette procédure est répétée à quelques reprises jusqu'à ce que les nouvelles modifications apportées au maillage soient mineures. Il n'existe cependant pas de critère très précis pour ce faire. L'expérience montre que 5 ou 6 résolutions et adaptations suffisent dans un très grand nombre d'applications. Nous en présentons quelques unes dans la prochaine section.

## 15.5 Exemples

On commence par un problème de perturbation singulière rencontré au chapitre 10 et qui nous a obligé à introduire les méthodes de type SUPG.

**Exemple 15.3.** On considère l'équation différentielle 10.2 que nous rappelons ici :

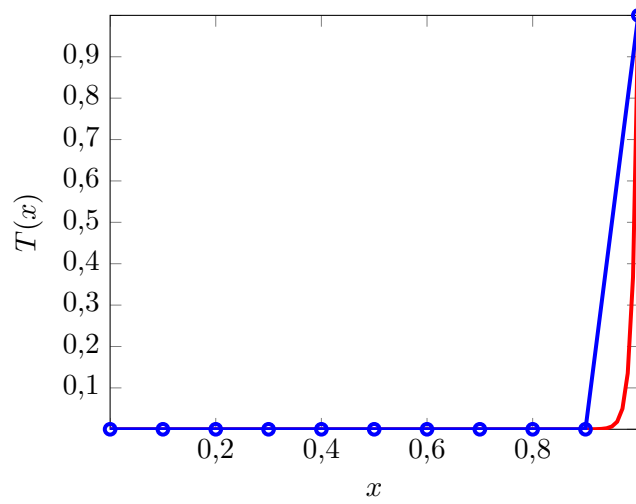
$$-\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + u \frac{dT}{dx} = 0$$

sous les mêmes conditions aux limites soit  $T(0) = 0$  et  $T(1) = 1$ . Nous avons constaté que le problème devient de plus en plus difficile à résoudre au fur et à mesure que le nombre de Peclet  $Pe = u/k$  augmentait. La raison principale est la présence d'une couche limite très fine en  $x = 1$  où la solution passe essentiellement de 0 à 1 dans un intervalle d'autant plus petit que  $Pe$  est grand.

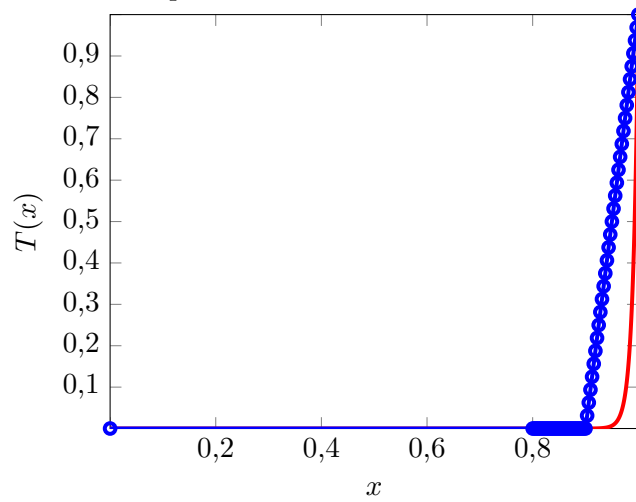
Dans un premier temps, on utilisera des éléments linéaires. L'erreur cible  $E_\Omega$  en norme  $L^2$  est fixée à  $10^{-4}$ . Le maillage de départ comporte seulement 10 éléments et donne une erreur en norme  $L^2$  de  $1,42 \times 10^{-1}$ , très loin de la cible (et une erreur de 6,30 en semi-norme  $H^1$ ). Une première adaptation mène à un maillage de 65 éléments et à des erreurs en norme  $L^2$  et  $H^1$  similaires au maillage initial, voire même très légèrement supérieures. On note toutefois sur la figure 15.11 que les noeuds de calcul se concentrent vers la couche limite en  $x = 1$ . La deuxième adaptation donne un maillage de 74 éléments et une erreur de  $6,3 \times 10^{-4}$ , légèrement supérieure à l'erreur cible. La semi-norme passe à  $1,43 \times 10^{-1}$ . La solution numérique passe très près de la solution exacte au point où on ne peut plus les distinguer à la figure 15.11. On note que le premier élément couvre tout l'intervalle  $[0, 0,85]$  où la solution est essentiellement nulle. Tous les éléments sont concentrés

dans la couche limite là où les variations sont importantes. Si on continue à adapter, le maillage continue de s'améliorer tout doucement mais le nombre d'éléments demeure à peu près constant. Les normes de l'erreur sur la solution linéaire passe à  $2,9 \times 10^{-5}$  et  $8,8 \times 10^{-2}$ , Notons enfin que si on regarde l'erreur sur la solution enrichie  $\hat{u}^{(2)}$ , elle passe à  $1,53 \times 10^{-3}$  en semi-norme. On a donc un gain important sur cette norme dû au fait que l'on récupère des dérivées plus précises.

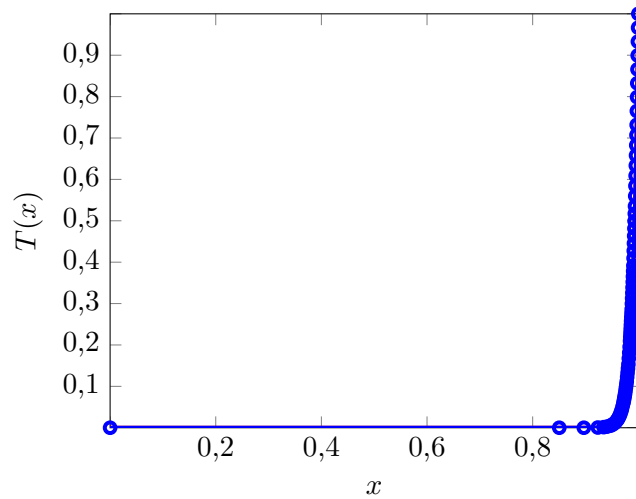
On observe un comportement similaire pour les éléments quadratiques à la figure 15.12. La même précision est obtenue mais avec beaucoup moins d'éléments. Notons enfin que la méthode d'adaptation capture parfaitement la solution à  $Pe = 1000$  ou  $Pe = 10\,000$ , solution qui est illustrée à la figure 15.13. On pourrait vérifier que, mis à part les deux premiers noeuds de calcul, tous les autres (75 au total) sont situées dans l'intervalle  $[0,996, 1]$  de manière à bien capturer la couche limite. ♦



Sans adaptation avec 10 éléments linéaires

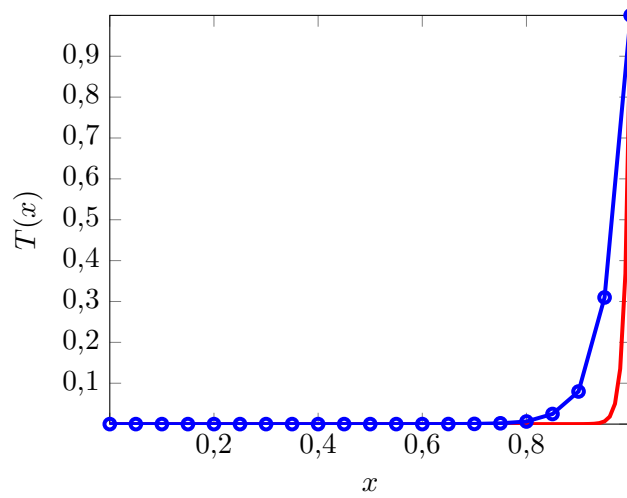


Première adaptation : 65 éléments linéaires

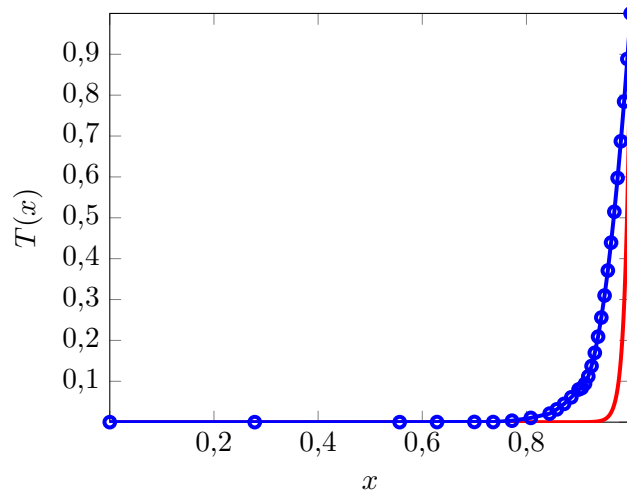


Deuxième adaptation : 74 éléments linéaires

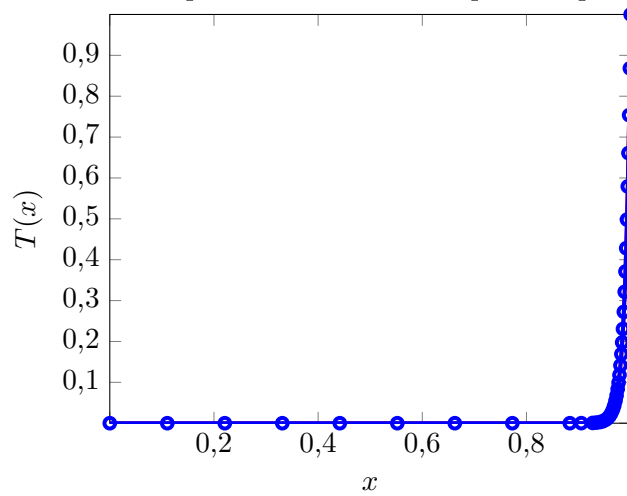
Figure 15.11 – Solutions à  $Pe = 100$



Sans adaptation avec 10 éléments quadratiques

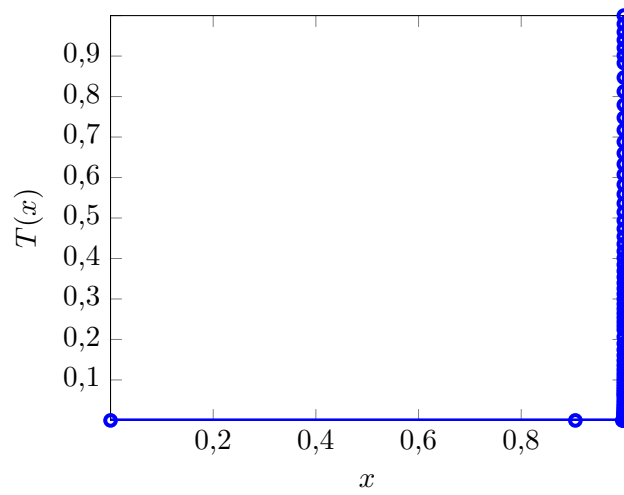


Première adaptation : 14 éléments quadratiques



Deuxième adaptation : 16 éléments quadratiques

Figure 15.12 – Solutions à  $Pe = 100$



Solution après 6 résolutions-adaptations

Figure 15.13 – Solution linéaire à  $Pe = 10\,000$





## Annexe A

# Rappels sur le théorème de la divergence

Nous rappelons dans cette section quelques résultats fondamentaux sur les fonctions de plusieurs variables réelles et notamment sur le théorème de la divergence qui est à la base de toute formulation variationnelle. Nous travaillerons généralement dans  $R^3$  ou plus particulièrement dans des ouverts  $\Omega$  de  $R^3$ . Les points de  $\Omega$  sont notés  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ , le cas bidimensionnel ne posant évidemment aucune difficulté. En dimension 1, on notera tout simplement  $x$ .

### A.1 Gradient, divergence et laplacien

Rappelons la définition du gradient d'une fonction.

**Définition A.1: Gradient d'une fonction**

Soit  $f(\mathbf{x})$  une fonction définie sur un ouvert  $\Omega$ . Le *gradient* de  $f$  en  $\mathbf{x}$  (noté  $\nabla f(\mathbf{x})$ ) est le vecteur pointant dans la direction de croissance maximale de la fonction  $f$  et dont le module est précisément donné par le taux de croissance maximal de  $f$  en  $\mathbf{x}$ .

Cette définition quelque peu étriquée permet de s'affranchir du système de coordonnées. Dans le cas cartésien, on peut montrer que :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

Il s'agit donc du vecteur des dérivées partielles de la fonction.

**Définition A.2: Dérivée directionnelle**

La dérivée directionnelle d'une fonction  $f(\mathbf{x})$  dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{d}$  ( $\|\mathbf{d}\|_2 = 1$ ) est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{d}} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d} = \|\nabla f(\mathbf{x})\|_2 \cos \theta$$

où  $\theta$  est l'angle entre les vecteurs gradient et  $\mathbf{d}$ .

La dérivée directionnelle donne le taux d'accroissement de la fonction  $f(\mathbf{x})$  dans la direction  $\mathbf{d}$ . Lorsque  $\theta = 0$ , les vecteurs gradient et  $\mathbf{d}$  sont dans la même direction et la dérivée directionnelle prend sa valeur maximale ( $\cos \theta = 1$ ), ce qui est bien cohérent avec la définition du gradient..

**Définition A.3: Divergence d'une champ de vecteurs**

Soit un champ de vecteurs  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . On définit la divergence de ce champ par l'expression :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

**A.2 Intégrales curvilignes et surfaciques****A.2.1 Rappel sur les intégrales curvilignes**

Si  $C$  est une courbe de l'espace et  $f(\mathbf{x})$  une fonction scalaire, on pose :

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

où  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  pour  $a \leq t \leq b$  est une paramétrisation de la courbe  $C$  et  $\|\gamma'(t)\|_2$  désigne la norme euclidienne du vecteur  $\gamma'(t)$  (voir Philippin [48]).

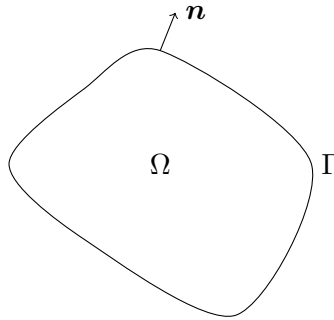
**A.2.2 Rappel sur les intégrales surfaciques**

Si  $S$  est une surface de l'espace et  $f(\mathbf{x})$  une fonction scalaire, on pose :

$$\int_S f ds = \int_D f(\boldsymbol{\sigma}(t_1, t_2)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t_2} \right\|_2 dt_1 dt_2$$

où  $\boldsymbol{\sigma}(t_1, t_2) = (\sigma_1(t_1, t_2), \sigma_2(t_1, t_2), \sigma_3(t_1, t_2))$  pour  $(t_1, t_2) \in D$  est une paramétrisation de la surface  $S$  et «  $\times$  » désigne le produit vectoriel. L'intégrale sur la surface  $S$  de la fonction  $f = 1$  donne l'aire de cette surface. De plus, la normale  $\mathbf{n}$  à la surface est donnée par :

$$\mathbf{n}(t_1, t_2) = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t_2}}{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t_2} \right\|_2}$$

Figure A.1 – Ouvert  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ 

et une autre forme de ce résultat est que pour une fonction vectorielle  $\mathbf{u}$ , on a :

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D \mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}(t_1, t_2)) \cdot \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t_2} \right) dt_1 dt_2$$

Voici quelques exemples de paramétrisation de surfaces.

— Toute surface de la forme  $x_3 = f(x_1, x_2)$  pour  $a \leq x_1 \leq b$  et  $c \leq x_2 \leq d$  peut être paramétrisée sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(t_1, t_2) = (t_1, t_2, f(t_1, t_2)) \quad a \leq t_1 \leq b, c \leq t_2 \leq d$$

### A.3 Théorème de la divergence

Nous sommes en mesure de formuler le théorème de la divergence ou théorème de Gauss-Ostrogradski que nous ne démontrons pas (voir par exemple Swokowski, réf. [58]). Pour un rappel sur les intégrales multiples et les intégrales curvilignes ou surfaciques, on se référera à Philippin [48].

#### Théorème A.4: de la divergence

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $R^n$  de frontière  $\Gamma$  (voir la figure A.1). Soit de plus  $\mathbf{n}$  le vecteur normal unitaire à  $\Gamma$  pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ . Si  $\mathbf{u}$  est un champ de vecteurs dont les dérivées partielles premières sont continues sur  $\Omega$ , alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, dv = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (\text{A.1})$$

**Remarque A.5.** Dans le théorème de la divergence, le terme de gauche est une intégrale double ou triple suivant que le problème est en 2 ou 3 dimensions. L'expression  $dv$  désigne donc un élément d'aire ou de volume, selon le cas. Le terme de droite est une intégrale curviligne si  $\Omega$  est un domaine

bidimensionnel ou une intégrale surfacique en 3 dimensions (voir les exercices de fin de chapitre). De même,  $da$  désigne un élément de longueur ou d'aire, selon le cas. Le terme de droite de l'équation A.1 est le *flux* du champ  $\mathbf{u}$  à travers la surface  $\Gamma$ . ◀

Il existe de nombreuses formes sous lesquelles le théorème de la divergence est utile. Nous en explicitons quelques unes.

### Corollaire A.6

Si le champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  a la forme particulière :

$$\mathbf{u} = (0, 0, \dots, f, 0, \dots, 0)$$

( $f$  apparaissant à la  $i^{\text{ième}}$  composante) où  $f(\mathbf{x})$  est une fonction dont les dérivées partielles premières sont continues, alors la divergence de  $\mathbf{u}$  s'écrit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  et le théorème de la divergence s'énonce comme suit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dv = \int_{\Gamma} f n_i ds \quad (\text{A.2})$$

*Démonstration.* La preuve vient immédiatement en se servant du théorème de la divergence. ■

### Corollaire A.7

Soit  $h(\mathbf{x})$  une fonction dont les dérivées partielles premières sont continues et si  $\mathbf{u}$  satisfait les hypothèses du théorème de la divergence, alors :

$$\int_{\Omega} h \nabla \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\Omega} \nabla h \cdot \mathbf{u} dv = \int_{\Gamma} h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{A.3})$$

En particulier, si le champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  a la forme particulière :

$$\mathbf{u} = (0, 0, \dots, f, 0, \dots, 0)$$

( $f$  apparaissant à la  $i^{\text{ième}}$  composante) où  $f(\mathbf{x})$  est une fonction dont les dérivées partielles premières sont continues, alors on a :

$$\int_{\Omega} h \frac{\partial f}{\partial x_i} dv + \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_i} f dv = \int_{\Gamma} h f n_i ds \quad (\text{A.4})$$

*Démonstration.* Il suffit de démontrer l'identité (voir les exercices de fin de chapitre) :

$$\nabla \cdot (h\mathbf{u}) = h \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla h \cdot \mathbf{u}$$

et d'appliquer directement le théorème de la divergence au champ  $\mathbf{u}_1 = (h\mathbf{u})$ . ■

La forme la plus répandue de ce théorème est sans doute la suivante.

### Corollaire A.8

Si le champ  $\mathbf{u}$  est le produit d'une fonction scalaire  $g$  avec le gradient d'une fonction scalaire  $f(\mathbf{x})$ , c.-à-d.  $\mathbf{u} = g\nabla f$ , alors on a :

$$\int_{\Omega} h\nabla \cdot (g\nabla f) dv + \int_{\Omega} g\nabla h \cdot \nabla f dv = \int_{\Gamma} hg\nabla f \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Gamma} h \left( g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \quad (\text{A.5})$$

En particulier, si  $g = 1$ , on a :

$$\int_{\Omega} h\nabla^2 f dv + \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla f dv = \int_{\Gamma} h \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds \quad (\text{A.6})$$

*Démonstration.* La démonstration est immédiate en appliquant la relation A.3 et en utilisant la définition du laplacien. ■

On peut étendre certains des résultats précédents aux tenseurs d'ordre 2. En particulier, on le résultat suivant qui est très utile en élasticité linéaire et en mécanique des fluides.

### Corollaire A.9

Si  $\boldsymbol{\sigma}$  est un tenseur symétrique d'ordre 2 et si  $\mathbf{w}$  est un vecteur, alors on a :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{w} dv + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} dv = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} ds \quad (\text{A.7})$$

Il existe un résultat similaire au théorème de la divergence mais qui concerne le rotationnel.

### Corollaire A.10

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $R^n$  de frontière  $\Gamma$  (voir la figure A.1). Soit de plus  $\mathbf{n}$  le vecteur normal unitaire à  $\Gamma$  pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ . Si  $\mathbf{u}$  est un champ de vecteurs dont les dérivées partielles premières sont continues sur  $\Omega$ , alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} dv = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{u} da \quad (\text{A.8})$$

*Démonstration.* On remarque immédiatement qu'il s'agit d'une égalité entre deux vecteurs. Pour

démontrer l'égalité, on peut donc y aller composante par composante. Rappelons que :

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \text{ et } \mathbf{n} \times \mathbf{u} = (n_2 v_3 - n_3 v_2, n_3 v_1 - n_1 v_3, n_1 v_2 - n_2 v_1)$$

Nous nous limiterons à montrer que :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dv = \int_{\Gamma} n_2 v_3 - n_3 v_2 da$$

Mais il suffit alors d'appliquer le théorème de la divergence [A.1](#) au champ  $\tilde{\mathbf{v}} = (0, v_3, -v_2)$ . On alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dv = \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} dv = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\Gamma} n_2 v_3 - n_3 v_2 da$$

Les autres composantes s'obtiennent de manière similaire. ■

## A.4 Exercices

1. Démontrer que si  $f(\mathbf{x})$  et  $g(\mathbf{x})$  sont des fonctions scalaires et  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  désigne un champ de vecteurs, on a les relations suivantes :

- a)  $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$   
 b)  $\nabla \cdot (g\mathbf{v}) = \nabla g \cdot \mathbf{v} + g\nabla \cdot \mathbf{v}$   
 c)  $\nabla \cdot (g\nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g\nabla^2 f$

2. Démontrer que :

a)

$$\int_{\Omega} (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dv = \int_S \left( f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

b)

$$\int_{\Omega} \nabla^2 f dv = \int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds$$

3. Donner une paramétrisation des courbes suivantes :

- a) La courbe  $y = x^2$  entre 0 et 1.  
 b) La courbe  $y = f(x)$  entre  $a$  et  $b$ .  
 c) Le cercle de rayon  $R$  et centré au point  $(x_1^c, x_2^c)$ .  
 d) Le segment de droite entre les points  $(1, 2)$  et  $(3, -1)$ .

4. Évaluer les intégrales curvilignes suivantes en donnant au préalable une paramétrisation de la courbe  $C$ .

a)

$$\int_C 1 ds$$

où  $C$  est le cercle de rayon 1 centré en l'origine.

**N.B.** L'intégrale sur la courbe  $C$  de la fonction 1 donne la longueur de cette courbe.

b)

$$\int_C x_1^2 ds$$

où  $C$  est le segment de droite joignant les points  $(1, 1)$  et  $(2, 3)$ .

5. Déterminer, à l'aide de l'intégrale curviligne appropriée, la longueur de l'ellipse :

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = a \cos t \\ \gamma_2(t) = b \sin t \end{cases}$$

pour  $t$  entre 0 et  $2\pi$ .

6. Évaluer les intégrales surfaciques suivantes :

a)

$$\int_S (x_1 + x_2 + x_3) ds$$

où  $S$  est la surface du plan  $x_3 = x_1 + x_2$  pour  $0 \leq x_2 \leq x_1$  et  $0 \leq x_1 \leq 1$ .

b)

$$\int_S (x_1 + 1) \, ds$$

où  $S$  est la surface définie par  $(\cos t_1, \sin t_1, t_2)$  pour  $0 \leq t_1 \leq 2\pi$  et  $0 \leq t_2 \leq 3$ .

7. Vérifier le théorème de la divergence en calculant séparément l'intégrale de volume et l'intégrale surfacique pour le champ  $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$  et le domaine  $\Omega$  constitué du cube de côté  $a : [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ .



## Annexe B

# Interpolation de Lagrange

Le but de ce chapitre est de rappeler les techniques classiques d'interpolation et en particulier la construction des fonctions d'interpolation de Lagrange. Dans le contexte de la méthode des éléments finis, nous nous limiterons à déterminer les fonctions d'interpolation seulement sur les éléments de référence. Nous procéderons de manière identique en dimension 1, 2 ou 3, même s'il existe des façons plus simples d'arriver au même résultat.

Deux espaces de polynômes jouent un rôle important en éléments finis. Dans un premier temps, nous noterons  $P_k$  l'espace des polynômes de degré  $k$ . On vérifie facilement que la dimension de l'espace  $P_k$  est :

$$\dim(P_k) = \frac{(n+k)!}{k!n!}$$

où  $n$  est la dimension d'espace ( $n = 1, 2$  ou  $3$ ). L'espace  $P_k$  est généralement utilisé sur les éléments triangulaires ou tétraédriques.

Nous travaillerons également avec l'espace  $Q_k$  des polynômes de degré  $k$  en chacune des variables d'espace. La dimension de cet espace est tout simplement :

$$\dim(Q_k) = (k+1)^n$$

En dimension 1, ces 2 espaces coïncident mais ils diffèrent en dimension 2 ou 3. L'espace  $Q_k$  est particulièrement adapté aux éléments quadrangulaires ou hexaédraux comme nous le verrons un peu plus loin dans ce chapitre. Bien sûr, il sera possible d'utiliser des variantes incomplètes des espaces  $P_k$  ou  $Q_k$  selon les besoins.

Quelque soit l'espace de polynômes utilisé, nous noterons  $N$  sa dimension. On se donne maintenant  $N$  points  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_N$  sur l'élément de référence. Les  $N$  fonctions de Lagrange  $L_i(\boldsymbol{\xi})$  sont des polynômes de  $P_k$  ou  $Q_k$  vérifiant :

$$\begin{cases} L_i(\boldsymbol{\xi}_i) = 1 & \forall i \\ L_i(\boldsymbol{\xi}_j) = 0 & \forall j \neq i \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Pour construire ces fonctions, il suffit de choisir une base généralement constituée de monômes de degré  $k$ . Nous noterons cette base de polynômes  $p_1(\boldsymbol{\xi}), p_2(\boldsymbol{\xi}), \dots, p_N(\boldsymbol{\xi})$ . Pour construire les

fonctions B.1, il suffit alors de poser :

$$L_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^N a_j p_j(\boldsymbol{\xi})$$

et d'imposer les contraintes de l'équation B.1 pour construire un système linéaire de dimension  $N$  sur  $N$  dont les inconnues sont les coefficients  $a_i$ . On obtient ainsi le système linéaire :

$$\begin{bmatrix} p_1(\boldsymbol{\xi}_1) & p_2(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & p_N(\boldsymbol{\xi}_1) \\ p_1(\boldsymbol{\xi}_2) & p_2(\boldsymbol{\xi}_2) & \cdots & p_N(\boldsymbol{\xi}_2) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ p_1(\boldsymbol{\xi}_i) & p_2(\boldsymbol{\xi}_i) & \cdots & p_N(\boldsymbol{\xi}_i) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_1(\boldsymbol{\xi}_N) & p_2(\boldsymbol{\xi}_N) & \cdots & p_N(\boldsymbol{\xi}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Le terme de droite est tout simplement le vecteur de base  $\mathbf{e}_i$  dont toutes les composantes sont nulles, sauf la  $i^{\text{ième}}$ . La résolution est immédiate puisque la matrice est généralement inversible. Notons de plus que la matrice est la même pour toutes les fonctions de Lagrange. Seul le terme de droite change.

On répète ce processus pour chaque fonction de Lagrange. Une fois ce travail accompli, le polynôme :

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^N u_j L_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{B.3})$$

est l'unique polynôme de degré  $k$  dont la valeur en  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_i$  est  $u_i$ , ce qui constitue un polynôme d'interpolation.

## B.1 Interpolation en dimension 1

En dimension 1, l'élément de référence est l'intervalle  $] -1, 1[$ . La dimension de  $P_k$  est tout simplement  $N = k+1$  et on choisit une base naturelle de cet espace de polynômes soit  $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^k$ .

### Polynômes de degré 1

On choisit naturellement comme points d'interpolation les coordonnées  $\xi_1 = -1$  et  $\xi_2 = 1$  de l'élément de référence. La base de monômes est constituée des polynômes 1 et  $\xi$ . Le système B.2 devient pour la fonction  $L_1(\xi)$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tandis que pour la fonction  $L_2(\xi)$ , le système est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polynômes de Lagrange $P_1$ (1D)		
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$
1	$\frac{1 - \xi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1 + \xi}{2}$	$\frac{1}{2}$

TABLE B.1 – Polynômes de Lagrange  $P_1$  sur l'intervalle de référence

On obtient ainsi les solutions :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Ces deux fonctions sont illustrées à la figure 5.4 s'expriment à l'aide de la relation B.3 sous la forme :

$$L_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \text{ et } L_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}$$

Pour compléter le développement, le tableau B.1 donne l'expression des fonctions de Lagrange de même que les dérivées qui sont utiles pour l'évaluation des systèmes élémentaires comme celui de la relation 5.5.

### Polynômes de degré 2

On choisit naturellement comme points d'interpolation les coordonnées  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 1$  et  $\xi_3 = 0$  de l'élément de référence (nous avons numéroté les extrémités ou noeuds géométriques de l'élément en premier). La base de monômes est constituée des polynômes 1,  $\xi$  et  $\xi^2$ . Nous ne ferons explicitement le calcul que pour la première fonction de Lagrange. Le système B.2 s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & +1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

et en vertu de l'équation B.3, on a donc la fonction :

$$L_1(\xi) = 0 - \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

Polynômes de Lagrange $P_2$ (1D)		
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$
1	$\frac{\xi(\xi - 1)}{2}$	$\xi - 1/2$
2	$\frac{\xi(\xi + 1)}{2}$	$\xi + 1/2$
3	$1 - \xi^2$	$-2\xi$

TABLE B.2 – Polynômes de Lagrange  $P_2$  sur l'intervalle de référence

De même, on obtient les autres fonctions de Lagrange listées au tableau B.2.

**Remarque B.1.** On peut procéder plus simplement et construire les polynômes de Lagrange directement. Pour obtenir par exemple  $L_1(\xi)$  on se sert directement de l'équation B.1. En effet, cette fonction doit s'annuler en  $\xi = 0$  et en  $\xi = 1$ . Il suffit donc d'introduire des facteurs  $\xi$  et  $(\xi - 1)$ . De plus, elle doit prendre la valeur 1 en  $\xi = -1$ . Or la fonction  $\xi(\xi - 1)$  vaut 2 à cette endroit. Il suffit donc de diviser par 2 et on obtient :

$$L_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

On construit les autres fonctions de lagrange par un raisonnement similaire. Cette façon de procéder est tout-à-fait générale et fonctionne pour les polynômes de degré quelconque. ◀

## B.2 Interpolation en dimension 2

Contrairement au cas unidimensionnel, nous avons ici le choix de la forme géométrique des éléments. Le plus souvent, on utilise des triangles ou des quadrilatères. Les espaces de polynômes correspondants sont légèrement différents.

### B.2.1 Interpolation sur les triangles

Voyons en premier lieu le cas des triangles. L'espace de polynômes le plus fréquemment utilisé est l'espace  $P_k$  dont on construit une base à l'aide du tableau suivant :

$$\begin{array}{l} P_0 : \\ P_1 : \\ P_2 : \\ P_3 : \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & \xi & & \eta \\ & & \xi^2 & & \xi\eta & \eta^2 \\ \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & \eta^3 \end{array} \right.$$

et ainsi de suite.

Pour déterminer uniquement un polynôme de degré  $k$ , on doit choisir  $N$  points d'interpolation distincts. Le choix des points d'interpolation est dicté par les propriétés de la fonction que l'on souhaite interpoler.

#### Polynômes de degré 1

Commençons par l'exemple le plus simple. Construisons les fonctions d'interpolation linéaires ( $P_1$ ) sur l'élément de référence. Du triangle précédent, la base de monômes est  $1, \xi, \eta$  de sorte que tout polynôme de  $P_1$  peut s'écrire :

$$p_1(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta$$

La dimension de cet espace étant 3, quoi de plus naturel que de choisir les 3 sommets du triangle  $\xi_1 = (0, 0)$ ,  $\xi_2 = (1, 0)$  et  $\xi_3 = (0, 1)$  (voir la figure 6.2). On va construire, suivant la démarche utilisée en dimension 1, des fonctions d'interpolation  $L_i(\xi, \eta)$  de sorte que :

$$L_j(\xi_i) = L_j(\xi_i, \eta_i) = \delta_i^j$$

Pour la première fonction d'interpolation, le système B.2 devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne immédiatement :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$L_1(\xi_i, \eta_i) = 1 - \xi - \eta$$

de manière similaire, on trouve les fonctions  $L_2(\xi, \eta)$  et  $L_3(\xi, \eta)$ . Le tableau B.3 résume la situation. Puisqu'elles sont également utiles pour l'évaluation des systèmes élémentaires, nous avons également indiqué les dérivées partielles des polynômes de Lagrange.

**Remarque B.2.** On pourrait également choisir comme points d'interpolation les 3 milieux de côtés. On obtient les fonctions de Lagrange dites  $P_1$  non conformes. La particularité de cette construction est que l'approximation par éléments finis qui en résulte n'est pas continue aux interfaces des éléments et n'appartient donc pas à l'espace  $H^1(\Omega)$ . ◀

Polynômes de Lagrange $P_1$ (2D)			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	$\xi$	1	0
3	$\eta$	0	1

TABLE B.3 – Polynômes de Lagrange  $P_1$  sur le triangle de référence

Polynômes de Lagrange $P_2$ (2D)			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$-\lambda(1 - 2\lambda)$	$1 - 4\lambda$	$1 - 4\lambda$
2	$-\xi(1 - 2\xi)$	$-1 + 4\xi$	0
3	$-\eta(1 - 2\eta)$	0	$-1 + 4\eta$
4	$4\xi\lambda$	$4(\lambda - \xi)$	$-4\xi$
5	$4\xi\eta$	$4\eta$	$4\xi$
6	$4\eta\lambda$	$-4\eta$	$4(\lambda - \eta)$

TABLE B.4 – Polynômes de Lagrange  $P_2$  sur le triangle de référence

### Polynômes de degré 2

Une base de l'espace  $P_2$  est constituée des polynômes  $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta$  et  $\eta^2$  ce qui constitue un espace de dimension 6 (voir la figure 6.2). Dans ce cas, on trouve le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_i$$

En résolvant ces 6 systèmes linéaires, on trouve les fonctions du tableau B.4. Pour simplifier les expressions, on a posé :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

**Remarque B.3.** On peut procéder différemment et éviter complètement la résolution d'un système linéaire. L'idée est de se servir de polynômes de degré 1 et d'annuler la fonction  $L_i(\xi, \eta)$  aux endroits appropriés. Pour illustrer ce processus, regardons le 3<sup>e</sup> noeud (de coordonnée  $(0, 1)$ ) de cet élément.

Polynômes de Lagrange $P_2$ hiérarchique (2D)			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$1 - \xi - \eta = \lambda$	-1	-1
2	$\xi$	+1	0
3	$\eta$	0	+1
4	$4\xi\lambda$	$4(1 - 2\xi - \eta)$	$-4\xi$
5	$4\xi\eta$	$4\eta$	$4\xi$
6	$4\eta\lambda$	$-4\eta$	$4(1 - \xi - 2\eta)$

TABLE B.5 – Polynômes de Lagrange  $P_2$  sur le triangle de référence

La fonction  $L_3(\xi, \eta)$  doit s'annuler aux autres noeuds. On peut dans un premier temps introduire le facteur  $\eta$  (qui s'annule aux noeuds 1, 2 et 4) et le facteur  $\eta - 1/2$  qui à son tour s'annule aux noeuds 5 et 6. La fonction résultante  $\eta(\eta - 1/2)$  s'annule à tous les noeuds sauf le troisième. Par contre, à ce noeud, elle vaut  $1/2$  ce qui bien sûr est différent de 1. Il suffit alors de diviser par cette valeur et on obtient :

$$L_3(\xi, \eta) = \frac{\eta(\eta - 1/2)}{1/2} = -\eta(1 - 2\eta)$$

qui est ce que l'on avait trouvé. Ce raisonnement peut s'appliquer en toutes dimensions et on y recourra fréquemment. ◀

**Remarque B.4.** On peut aussi construire des fonctions d'interpolation dites hiérarchiques. Cela consiste à utiliser des fonctions linéaires pour les 3 sommets de l'élément et des fonctions quadratiques sur les milieux de côtés. On obtient ainsi le tableau B.5.

Ceci constitue bien également un base de  $P_2$  mais ces fonctions ne vérifient pas la condition B.1. Si on pose ensuite :

$$u(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 u_j L_j(\xi, \eta)$$

l'interprétation des inconnues  $u_j$  n'est plus la valeur de  $u(x)$  au noeud correspondant. En effet :

$$u(\xi_1) = u(0, 0) = u_1$$

et c'est également le cas pour les 2 autres sommets. Par contre :

$$u(\xi_4) = u(1/2, 0) = u_4 + \frac{(u_1 + u_2)}{2}$$

de sorte que le degré de liberté associé au quatrième noeud s'interprète par la relation :

$$u_4 = u(\xi_4) - \frac{(u_1 + u_2)}{2} = u(\xi_4) - \frac{(u(\xi_1) + u(\xi_2))}{2}$$

Polynômes de Lagrange $Q_1$ (2D)			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)$
2	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)$
3	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 - \xi)$
4	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 + \xi)$

TABLE B.6 – Polynômes de Lagrange  $Q_1$  sur le carré de référence

et l'interprétation des inconnues (éventuellement des degrés de liberté) est plus délicate. Il faudra être prudent lors de l'imposition des conditions aux limites essentielles si on utilise de telles bases.



### B.2.2 Sur les quadrilatères

Nous utiliserons l'espace  $Q_k$  sur l'élément de référence  $[-1, 1]^2$ . Il est facile de construire une base pour cet espace puisqu'il suffit de faire le produit cartésien des ensembles  $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^k$  et  $1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^k$ .

#### Polynôme de degré 1 ( $Q_1$ )

Le cas le plus simple est bien sûr  $Q_1$  dont la dimension est 4. Une base possible est  $1, \xi, \eta, \xi\eta$ . Il nous faut donc 4 points d'interpolation et les 4 coins semblent un choix idéal (voir la figure 6.4). On obtient les 4 fonctions de Lagrange toujours de la même façon et nous nous limiterons à les lister.

**Remarque B.5.** Tout comme pour le cas triangulaire, on pourrait penser choisir comme points d'interpolation les 4 milieux de côtés soit les points  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(-1, 0)$ . Ce qui semble naturel ne fonctionne pas toujours. En effet, en se servant encore ici de la base  $1, \xi, \eta$  et  $\xi\eta$ , la



matrice du système B.2 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et est singulière. La solution n'est donc pas unique et on peut facilement le constater puisque les fonctions 0 et  $\xi\eta$  sont toutes deux des fonctions de  $Q_1$  qui prennent les mêmes valeurs (0) aux milieux des côtés. On ne peut donc pas choisir ces points d'interpolation pour construire des approximations non conformes, contrairement à ce que nous avons fait sur les triangles. ◀

**Polynôme de degré 2 ( $Q_2$ )**

La dimension de l'espace  $Q_2$  est 9 et il semble naturel de choisir les points illustrés sur la figure 6.4. On construit ainsi les polynômes de Lagrange du tableau B.7.

### B.3 Interpolation en dimension 3

#### B.3.1 Sur les tétraèdres

En dimension 3, on utilise les monômes suivants pour établir la base de l'approximation :

$$\begin{array}{l} P_0 : \\ P_1 : \\ P_2 : \\ P_3 : \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ \xi, \eta, \zeta, \\ \xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \\ \xi^3, \eta^3, \zeta^3, \xi^2\eta, \xi^2\zeta, \eta^2\zeta, \eta^2\xi, \zeta^2\xi, \zeta^2\eta, \xi\eta\zeta, \end{array} \right.$$

De manière similaire à celle présentée dans le cas bidimensionnel (voir la figure 6.6), on montre aisément que pour les fonctions de Lagrange de degré 1, on a le tableau B.8.

<b>Polynômes de Lagrange <math>Q_2</math> (2D)</b>			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 + \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 + \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 + 2\eta)$
2	$-\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 + \eta)\eta$	$-\frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 + \eta)\eta$	$-\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 + 2\eta)$
3	$\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 - \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 - \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 - 2\eta)$
4	$-\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 - \eta)\eta$	$-\frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 - \eta)\eta$	$-\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 - 2\eta)$
5	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta(1 + \eta)$	$-\xi\eta(1 + \eta)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + 2\eta)$
6	$-\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)(1 - \eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1 - 2\xi)(1 - \eta^2)$	$\xi(1 - \xi)\eta$
7	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)\eta$	$\xi\eta(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - 2\eta)$
8	$\frac{1}{2}(1 + \xi)\xi(1 - \eta^2)$	$\frac{1}{2}(1 + 2\xi)(1 - \eta^2)$	$(1 + \xi)\xi\eta$
9	$\xi(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$	$-2\xi(1 - \eta^2)$	$-2(1 - \xi^2)\eta$

TABLE B.7 – Polynômes de Lagrange  $Q_2$  sur le carré de référence

<b>Polynômes de Lagrange <math>P_1</math> (3D)</b>				
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \zeta}$
1	$1 - \xi - \eta - \zeta$	-1	-1	-1
2	$\xi$	1	0	0
3	$\eta$	0	1	0
4	$\zeta$	0	0	1

TABLE B.8 – Polynômes de Lagrange  $P_1$  sur le tétraèdre de référence

## Annexe C

# Intégration numérique

L'intégration numérique est une composante essentielle de toute méthode d'éléments finis. S'il est toujours préférable d'utiliser l'intégration exacte lorsque cela est possible, on doit toutefois recourir fréquemment à l'intégration numérique si on souhaite développer des méthodes d'éléments finis relativement générales.

Tout comme pour l'interpolation de Lagrange, nous ferons le développement des différentes formules d'intégration numérique sur les éléments de référence puisque c'est là que sont effectuées toutes les intégrales en éléments finis.

### C.1 En dimension 1

Nous choisissons l'intervalle d'intégration  $[-1, 1]$  qui est l'élément de référence pour les problèmes en dimension 1. Nous avons vu au chapitre 5 comment passer d'un élément quelconque à cet élément de référence à l'aide du changement de variable 5.6.

On cherche à évaluer une expression de la forme :

$$I = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (\text{C.1})$$

En éléments finis, la fonction  $g(\xi)$  fait intervenir les fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}_i(\xi)$  et leurs dérivées ainsi que les propriétés physiques du problème. Par exemple, on doit évaluer :

$$\int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) \frac{h^K}{2} d\xi$$

qui est bien de la forme C.1. Dans la plupart des programmes d'éléments finis, on utilise les quadratures de Gauss-Legendre qui consistent à approcher l'intégrale C.1 par une expression de la forme :

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \simeq \sum_{i=1}^{m_G} w_i g(\xi_i) \quad (\text{C.2})$$

qui soit la plus précise possible.

**Définition C.1: Quadrature de Gauss-Legendre**

L'expression C.2 est appelée *quadrature de Gauss-Legendre à  $m_G$  points*. Les  $\xi_i$  sont appelés *points d'intégration*, tandis que les coefficients  $w_i$  sont les *poids d'intégration*.

On choisit les points et les poids d'intégration de façon à ce que la quadrature C.2 soit exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible. De toute évidence, les points d'intégration  $\xi_i$  doivent tous être distincts les uns des autres et les poids d'intégration doivent être non nuls.

**Théorème C.2: Formule d'erreur**

La quadrature de Gauss-Legendre à  $m_G$  points C.2 est exacte pour les polynômes de degré  $(2m_G - 1)$  et le terme d'erreur de cette approximation est donné par :

$$\frac{2^{2m_G+1}(m_G!)^4}{(2m_G+1)((2m_G)!)^3} g^{(2m_G)}(\mu) \quad \text{où } \mu \in [-1, 1] \quad (\text{C.3})$$

Quadrature de Gauss-Legendre (1D)			
$m_G$	Points d'intégration $\xi_i$	Poids d'intégration $w_i$	Degré de précision
1	0	2	1
2	-0,577 350 269 189 625 +0,577 350 269 189 625	1 1	3
3	-0,774 596 669 241 483 0,0 +0,774 596 669 241 483	0,555 555 555 555 556 0,888 888 888 888 889 0,555 555 555 555 556	5
4	-0,861 136 311 594 052 -0,339 981 043 584 856 +0,339 981 043 584 856 +0,861 136 311 594 052	0,347 854 845 137 454 0,652 145 154 862 545 0,652 145 154 862 545 0,347 854 845 137 454	7
5	-0,906 179 845 938 664 -0,538 469 310 105 683 0,0 +0,538 469 310 105 683 +0,906 179 845 938 664	0,236 926 885 056 189 0,478 628 670 499 365 0,568 888 889 888 889 0,478 628 670 499 365 0,236 926 885 056 189	9

TABLE C.1 – Intégration numérique sur l'intervalle de référence

La table C.1 résume les premières quadratures de Gauss-Legendre en dimension 1 (voir Fortin, réf. [26]). La dernière colonne de cette table fournit le degré des polynômes pour lesquels la quadrature de Gauss-Legendre est exacte et qui vaut  $2m_G - 1$ . C'est ce que l'on appelle le *degré de précision*

de la formule de quadrature. En pratique, on choisit le nombre de points de Gauss-Legendre  $m_G$  en fonction des intégrales que l'on doit évaluer.

**Exemple C.3.** On veut évaluer :

$$I = \int_{-1}^{+1} \xi^2 + \xi dt$$

Il s'agit ici d'un problème très simple mais qui illustre bien ce qui peut se produire. La fonction à intégrer est polynômiale et une quadrature de Gauss-Legendre adéquate permettra d'évaluer l'intégrale exactement. Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 2, la quadrature de Gauss-Legendre à 2 points ( $m_G = 2$ ) suffira puisqu'elle est exacte pour des polynômes de degré jusqu'à 3 ( $2m_G - 1$ ). On a en effet :

$$\begin{aligned} I &= w_1(\xi_1^2 + \xi_1) + w_2(\xi_2^2 + \xi_2) \\ &= 1((-0,577\ 350\ 262\ 918\ 9625)^2 + (-0,577\ 350\ 262\ 918\ 9625)) \\ &\quad + 1((+0,577\ 350\ 262\ 918\ 9625)^2 + (+0,577\ 350\ 262\ 918\ 9625)) \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

soit la valeur exacte de l'intégrale. ♦

**Exemple C.4.** On a :

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi(\xi+1)}{4}\right) d\xi$$

La quadrature de Gauss-Legendre à 2 points donne l'approximation :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x dx &\simeq \frac{\pi}{4} \left( \sin\left(\frac{\pi(\xi_1+1)}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi(\xi_2+1)}{4}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} (\sin(0,331\ 948\ 322) + \sin(1,238\ 848\ 005)) \\ &= 0,998\ 472\ 614 \end{aligned}$$

Si on tient compte du fait que l'on a évalué la fonction  $\sin x$  en seulement deux points, ce résultat est d'une précision remarquable. Par ailleurs, la formule à trois points donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x dx &\simeq \frac{\pi}{4} \left( w_1 \sin\left(\frac{\pi(\xi_1+1)}{4}\right) + w_2 \sin\left(\frac{\pi(\xi_2+1)}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + w_3 \sin\left(\frac{\pi(\xi_3+1)}{4}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} ((0,555\ 555\ 556) \sin(0,177\ 031\ 362) \\ &\quad + (0,888\ 888\ 889) \sin(0,785\ 398\ 164) \\ &\quad + (0,555\ 555\ 556) \sin(1,774\ 596\ 669)) \\ &= 1,000\ 008\ 1821 \end{aligned}$$



## C.2 En dimension 2 ou 3

### C.2.1 Sur les quadrilatères

C'est le cas le plus simple puisque l'on peut utiliser directement les techniques d'intégration numériques développées en dimension 1. Puisque dans ce cas nous avons choisi le carré  $[-1, 1]^2$  comme élément de référence, il suffit de constater que :

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta \simeq \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^{m_G} w_i g(\xi_i, \eta) \right) d\eta = \sum_{i=1}^{m_G} w_i \int_{-1}^1 g(\xi_i, \eta) d\eta \simeq \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{m_G} w_i w_j g(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{C.4})$$

En quelque sorte, l'intégration numérique en dimension 2 sur le carré  $[-1, 1]^2$  consiste donc à utiliser les formules obtenues en dimension 1 pour chacune des variables. Il en est de même en dimension 3 sur le cube de référence  $[-1, 1]^3$  et on obtient de manière similaire :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \simeq \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{m_G} \sum_{k=1}^{m_G} w_i w_j w_k g(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (\text{C.5})$$

**Remarque C.5.** Il n'y a donc dans ce cas nul besoin de développer des méthodes d'intégration numérique particulière. Si la fonction à intégrer est un polynôme appartenant à l'espace  $Q_k$ , c'est-à-dire un polynôme de degré  $k$  en chacune des variables d'espace, il suffit de choisir une quadrature de Gauss-Legendre en dimension 1 qui soit exacte pour les polynômes de degré  $k$  et utiliser les formules C.4 ou C.5. ◀

### C.2.2 Sur les triangles

Les formules d'intégration numériques sont plus difficiles à obtenir sur les triangles. On ne peut plus utiliser directement les formules en dimension 1. Le tableau C.2 fournit quelques unes des quadratures dites de Hammer.

On passe d'un triangle quelconque au triangle de référence à l'aide de la transformation 6.5. On utilise ensuite la relation :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(\xi, \eta) d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_i w_i g(\xi_i, \eta_i)$$

où les  $w_i$ ,  $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont donnés dans la table C.2.

### C.2.3 Sur les tétraèdres

Sur les tétraèdres, il faut généralement utiliser encore plus de points d'intégration. La table C.3 donne quelques unes des formules de Hammer en dimension 3.

Quadrature de Hammer (2D)				
	Coordonnées des points d'intégration		Poids d'intégration	Degré de précision
$m_G$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$	
1	+0,333 333 333 333 3333	+0,333 333 333 333 3333	+0,500 000 000 000 0000	1
3	+0,666 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	+0,166 666 666 666 6667 +0,666 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	+0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	2
4	+0,333 333 333 333 3333 +0,200 000 000 000 0000 +0,200 000 000 000 0000 +0,600 000 000 000 0000	+0,333 333 333 333 3333 +0,200 000 000 000 0000 +0,600 000 000 000 0000 +0,200 000 000 000 0000	-0,281 250 000 000 0000 +0,260 416 666 666 6667 +0,260 416 666 666 6667 +0,260 416 666 666 6667	3
6	+0,108 103 018 168 070 +0,445 948 490 915 965 +0,445 948 490 915 965 +0,816 847 572 980 459 +0,091 576 213 509 771 +0,091 576 213 509 771	+0,445 948 490 915 965 +0,108 103 018 168 070 +0,445 948 490 915 965 +0,091 576 213 509 771 +0,816 847 572 980 459 +0,091 576 213 509 771	+0,111 690 794 839 0055 +0,111 690 794 839 0055 +0,111 690 794 839 0055 +0,054 975 871 827 6610 +0,054 975 871 827 6610 +0,054 975 871 827 6610	4
12	+0,873 821 971 016 996 +0,063 089 014 491 502 +0,063 089 014 491 502 +0,501 426 509 658 179 +0,249 286 745 170 910 +0,249 286 745 170 910 +0,636 502 499 121 399 +0,636 502 499 121 399 +0,310 352 451 033 785 +0,310 352 451 033 785 +0,053 145 049 844 816 +0,053 145 049 844 816	+0,063 089 014 491 502 +0,873 821 971 016 996 +0,063 089 014 491 502 +0,249 286 745 170 910 +0,501 426 509 658 179 +0,249 286 745 170 910 +0,310 352 451 033 785 +0,053 145 049 844 816 +0,636 502 499 121 399 +0,053 145 049 844 816 +0,310 352 451 033 785 +0,053 145 049 844 816	+0,025 422 453 185 1035 +0,025 422 453 185 1035 +0,025 422 453 185 1035 +0,058 393 137 863 1895 +0,058 393 137 863 1895 +0,058 393 137 863 1895 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870	6
16	+0,333 333 333 333 333 +0,081 414 823 414 454 +0,459 292 588 292 723 +0,459 292 588 292 723 +0,658 861 384 496 480 +0,170 569 307 751 760 +0,170 569 307 751 760 +0,898 905 543 365 938 +0,050 547 228 317 031 +0,050 547 228 317 031 +0,008 394 777 409 958 +0,008 394 777 409 958 +0,263 112 829 634 638 +0,263 112 829 634 638 +0,728 492 392 955 404 +0,728 492 392 955 404 +0,008 394 777 409 958 +0,263 112 829 634 638	+0,333 333 333 333 333 +0,459 292 588 292 723 +0,081 414 823 414 454 +0,459 292 588 292 723 +0,170 569 307 751 760 +0,658 861 384 496 480 +0,170 569 307 751 760 +0,050 547 228 317 031 +0,898 905 543 365 938 +0,050 547 228 317 031 +0,050 547 228 317 031 +0,263 112 829 634 638 +0,728 492 392 955 404 +0,008 394 777 409 958 +0,728 492 392 955 404 +0,008 394 777 409 958 +0,263 112 829 634 638	+0,072 157 803 838 8935 +0,047 545 817 133 6425 +0,047 545 817 133 6425 +0,047 545 817 133 6425 +0,051 608 685 267 3590 +0,051 608 685 267 3590 +0,051 608 685 267 3590 +0,016 229 248 811 5990 +0,016 229 248 811 5990 +0,016 229 248 811 5990 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175	8

TABLE C.2 – Intégration numérique sur le triangle de référence

<b>Quadrature de Hammer (3D)</b>			
Coordonnées des points d'intégration			Points d'intégration
$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$	$w_i$
Formule à 1 point, degré de précision = 1			
+0,250 000 000 000 000	+0,250 000 000 000 000	+0,250 000 000 000 000	+0,166 666 666 666 667
Formule à 4 points, degré de précision = 2			
+0,138 196 601 125 0105	+0,138 196 601 125 0105	+0,138 196 601 125 0105	+0,041 666 666 666 667
+0,138 196 601 125 0105	+0,138 196 601 125 0105	+0,585 410 196 624 9685	+0,041 666 666 666 667
+0,138 196 601 125 0105	+0,585 410 196 624 9685	+0,138 196 601 125 0105	+0,041 666 666 666 667
+0,585 410 196 624 9685	+0,138 196 601 125 0105	+0,138 196 601 125 0105	+0,041 666 666 666 667
Formule à 16 points, degré de précision = 4			
+0,771 642 902 067 2371	+0,076 119 032 644 254 30	+0,076 119 032 644 254 30	+0,008 395 632 350 020 469
+0,076 119 032 644 254 30	+0,771 642 902 067 2371	+0,076 119 032 644 254 30	+0,008 395 632 350 020 469
+0,076 119 032 644 254 30	+0,076 119 032 644 254 30	+0,771 642 902 067 2371	+0,008 395 632 350 020 469
+0,076 119 032 644 254 30	+0,076 119 032 644 254 30	+0,076 119 032 644 254 30	+0,008 395 632 350 020 469
+0,119 700 527 797 8019	+0,071 831 645 267 669 25	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,119 700 527 797 8019	+0,404 233 913 467 2644	+0,071 831 645 267 669 25	+0,011 090 344 772 215 398
+0,119 700 527 797 8019	+0,404 233 913 467 2644	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,071 831 645 267 669 25	+0,119 700 527 797 8019	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,071 831 645 267 669 25	+0,404 233 913 467 2644	+0,119 700 527 797 8019	+0,011 090 344 772 215 398
+0,071 831 645 267 669 25	+0,404 233 913 467 2644	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,119 700 527 797 8019	+0,071 831 645 267 669 25	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,119 700 527 797 8019	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,071 831 645 267 669 25	+0,119 700 527 797 8019	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,071 831 645 267 669 25	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,404 233 913 467 2644	+0,119 700 527 797 8019	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,404 233 913 467 2644	+0,071 831 645 267 669 25	+0,011 090 344 772 215 398

TABLE C.3 – Intégration numérique sur le tétraèdre de référence



## Annexe D

# Rappels sur les tenseurs

### D.1 Notions de base

Dans cette annexe, nous ferons un survol très rapide des notions relatives aux tenseurs. L'objectif n'est certainement pas de refaire de manière détaillée toute la théorie tensorielle mais bien de rappeler les principales définitions et les principaux outils : produits dyadiques, contractés, doublement contractés, etc.

#### D.1.1 Les vecteurs

On commence par introduire une base orthonormée  $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_i, i = 1, 2, 3\}$  de  $\mathcal{R}^3$ . Les vecteurs seront notés en caractères gras. Soit donc  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  des vecteurs de  $\mathcal{R}^3$ . On peut donc les écrire :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{E}_i = u_i \mathbf{E}_i \text{ et } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{E}_i = v_i \mathbf{E}_i$$

où nous avons introduit la convention d'Einstein sur les indices répétés.

#### Définition D.1: Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $\mathcal{R}^3$  est noté  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  et est défini par :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

où  $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  désigne le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs

On remarque immédiatement que si on applique cette définition aux vecteurs de la base orthonormée, on trouve que  $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = I_{ij}$  de sorte que :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_i \mathbf{E}_i) \cdot (v_j \mathbf{E}_j) = u_i v_j I_{ij} = u_i v_i$$

Pour un vecteur  $\mathbf{u}$  quelconque, on peut retrouver ses composantes  $u_i$  dans une base orthonormée donnée simplement en prenant le produit scalaire par  $i^{\text{ième}}$  vecteur de la base. En effet :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_i = u_j \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_i = u_j I_{ij} = u_i \quad (\text{D.1})$$

et ces composantes sont généralement représentées dans une matrice colonne :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Il ne faut jamais perdre de vue que cette notation est liée à la base  $\mathcal{E}$ . Si on se donne une autre base orthonormée  $\mathcal{E}^* = \{\mathbf{E}_i^*, i = 1, 2, 3\}$ , on peut écrire tout vecteur  $\mathbf{u}$  sous la forme :

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{E}_i \text{ mais aussi } \mathbf{u} = u_i^* \mathbf{E}_i^*$$

On aura ainsi deux matrices colonnes de coefficients pour le même vecteur :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{bmatrix}$$

chacune liée à une base différente. Pour passer de l'une à l'autre, il faut d'abord exprimer chaque nouveau vecteur de base  $\mathbf{E}_i^*$  dans la base  $\mathcal{E}$  de sorte que  $\mathbf{E}_i^* = A_{ij} \mathbf{E}_j$  (la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $A$  contient les composantes de  $\mathbf{E}_i^*$  dans la base  $\mathcal{E}$ ). En vertu de l'équation D.1, on a tout simplement  $A_{ij} = \mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_j$ . On a ainsi :

$$\mathbf{u} = u_i^* \mathbf{E}_i^* = u_i^* A_{ij} \mathbf{E}_j = u_j \mathbf{E}_j$$

de sorte que  $u_j = A_{ij} u_i^*$  ou encore :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{bmatrix}$$

Inversement, on peut exprimer les vecteurs de la base  $\mathcal{E}$  dans la nouvelle base. En posant  $B_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j^*$ , on a

$$\mathbf{E}_i = B_{ij} \mathbf{E}_j^* = B_{ij} A_{jk} \mathbf{E}_k$$

de sorte  $B_{ij} A_{jk} = I_{ik}$  et que les matrices  $B = A^{-1}$ . Puisque  $A_{ij} = \mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_j$  et  $B_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j^*$ , on remarque immédiatement que  $B_{ij} = A_{ji}$  de sorte  $B = A^\top$ .

### D.1.2 Les tenseurs d'ordre 2

#### Définition D.2: Tenseur d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2  $\mathbf{T}$  est une application linéaire de  $\mathcal{R}^3$  dans  $\mathcal{R}^3$ . Le tenseur  $\mathbf{T}$  associe donc à un vecteur  $\mathbf{u}$  un autre vecteur noté  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$ .

Un tenseur est donc une application linéaire et on a :

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} + \beta\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$$

Un exemple très simple de tenseur d'ordre 2 est le produit dyadique de deux vecteurs dont nous donnons la définition.

#### Définition D.3: Produit dyadique

Le produit dyadique de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est noté  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  et est défini par :

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{w}$$

En particulier,  $(\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j) \cdot \mathbf{E}_k = \mathbf{E}_i I_{jk}$ .

Le produit dyadique définit donc une application linéaire de  $\mathcal{R}^3$  dans  $\mathcal{R}^3$  et est donc un tenseur d'ordre 2. On remarque de plus qu'en faisant le produit dyadique de deux des vecteurs de la base orthonormée on obtient :

$$(\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{u})\mathbf{E}_i = u_j \mathbf{E}_i$$

En vertu de la linéarité, on a  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot (u_j \mathbf{E}_j) = u_j \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_j$  et comme nous l'avons vu, la  $j^{\text{ième}}$  composante de ce vecteur est

$$\mathbf{E}_i \cdot (u_j \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_j) = u_j (\mathbf{E}_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_j)) = T_{ij} u_j$$

où l'on a posé  $T_{ij} = (\mathbf{E}_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_j))$ . On a ainsi :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = T_{ij} u_j \mathbf{E}_i = T_{ij} (\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j) \cdot \mathbf{u}$$

Puisque le vecteur  $\mathbf{u}$  est arbitraire, on a :

$$\mathbf{T} = T_{ij} (\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j) \quad \text{où} \quad T_{ij} = (\mathbf{E}_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_j)) \quad (\text{D.2})$$

Les coefficients  $T_{ij}$  sont les coefficients du tenseur  $\mathbf{T}$  dans la base orthonormée. En fait, pour définir complètement un tenseur il suffit de connaître son comportement sur les vecteurs de la base orthonormée. Ainsi, en ce qui concerne le produit dyadique de deux vecteurs, on a :

$$(\mathbf{E}_i \cdot ((\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}_j)) = (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u})v_j = u_i v_j$$

de sorte que  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u_i v_j \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j$ .

Notons enfin qu'il est possible d'utiliser deux bases orthonormées différentes pour définir un tenseur. En effet, si on introduit une nouvelle base  $\mathbf{E}_i, i = 1, 2, 3$  reliée à la première par un tenseur orthogonal (de rotation)  $\mathbf{A}$  c.-à-d.  $\mathbf{e}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_k$ . Les composantes de ce tenseur sont donc :

$$A_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_j)$$

on a alors :

$$\mathbf{T} = T_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j) \quad \text{où} \quad T_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_j)) \quad (\text{D.3})$$

Cette dernière relation sera notamment utile pour les changements de coordonnées.

On peut aussi percevoir les tenseurs d'ordre 2 comme des applications bilinéaires de  $\mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$  dans  $\mathcal{R}$  définie par :

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (T_{ij}u_j \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{v} = T_{ij}u_j v_i \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$$

#### Définition D.4: Opérations sur les tenseurs

Si  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{S}$  désignent des tenseurs d'ordre 2 et  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  des vecteurs, alors :

1. **Addition** de 2 tenseurs :

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$$

2. **Produit** de 2 tenseurs :

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u})$$

3. **Inverse** d'un tenseur :

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{T}^{-1} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

4. La **transposée**  $\mathbf{T}^\top$  d'un tenseur  $\mathbf{T}$  est l'application linéaire notée  $\mathbf{T}^\top$  et vérifiant :

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}^\top \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$$

On vérifie facilement que :

$$\mathbf{T}^\top = T_{ji}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$

#### Définition D.5: Produit contracté

Le symbole  $\cdot$  désigne le produit contracté (somme sur l'indice du milieu) de deux tenseurs. Ainsi si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des tenseurs du deuxième ordre,  $\mathbf{C}$  un tenseur du quatrième ordre et  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  des tenseurs du premier ordre (des vecteurs) le produit contracté est défini par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} &= A_{ik} B_{kj} && \text{(un tenseur d'ordre 2)} \\ (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})_{ijkl} &= C_{ijkm} B_{ml} && \text{(un tenseur d'ordre 4)} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_k v_k && \text{(un scalaire)} \end{aligned}$$

Dans le cas de tenseurs du premier ordre (des vecteurs), on retrouve le produit scalaire habituel. Notons que l'ordre du tenseur résultant du produit contracté est la somme des ordres des tenseurs de départ moins deux.

#### Définition D.6: Produit doublement contracté

Le symbole  $\cdot$  désigne le produit doublement contracté (somme sur les deux indices du milieu) de deux tenseurs. Par exemple, si  $A$  et  $B$  sont des tenseurs du second ordre, on a :

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = T_{ij} S_{ij}$$

Si  $\mathcal{C}$  est un tenseur du quatrième ordre, alors :

$$\mathcal{C} : \mathbf{T} = C_{ijkl} T_{kl}$$

et désigne un tenseur du deuxième ordre. Notons que l'ordre du tenseur résultant du produit doublement contracté est la somme des ordres des tenseurs de départ moins quatre.

#### Définition D.7: Trace d'un tenseur

On définit la *trace d'un tenseur* du second ordre par l'expression :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n A_{ii} \quad (\text{D.4})$$

#### Proposition D.8: Propriétés de la trace et du produit contracté

Si  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont des vecteurs et  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  des tenseurs du deuxième ordre, alors :

1. **Trace du produit :**

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{D.5})$$

2. **Trace et produit doublement contracté :**

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I} \quad (\text{D.6})$$

3. **Orthogonalité :** Si  $\mathbf{A}$  est symétrique et  $\mathbf{B}$  est antisymétrique alors  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = 0$ .

4.  $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) : \mathbf{A} = \mathbf{A} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$

- 5.

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} : \mathbf{C}) \quad (\text{D.7})$$

### 6. Trace et produit doublement contracté :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\top) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^\top) \quad (\text{D.8})$$

7.

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C} = \mathbf{B} : (\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{D.9})$$

*Démonstration.* La démonstration utilise directement les différentes définitions.

1.  $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ii} = A_{ik}B_{ki} = B_{ki}A_{ik} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})_{kk} = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$ .
2.  $\mathbf{I} : \mathbf{A} = I_{ij}A_{ij} = A_{ii} = \text{tr}(\mathbf{A})$ .
3. On a  $A_{ij} = A_{ji}$ ,  $B_{ij} = -B_{ji}$  et  $B_{ii} = 0$  de sorte que  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}(B_{ij} + B_{ji}) = 0$ .
4.  $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) : \mathbf{A} = v_i w_j A_{ij} = (A_{ij} w_j) v_i = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ .
5.  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : \mathbf{C} = (A_{ij} B_{kl}) C_{kl} = A_{ij} (B_{kl} C_{kl}) = \mathbf{A} (\mathbf{B} : \mathbf{C})$ .
6. Par exemple,  $\text{tr}(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}) = A_{ik}^\top B_{ki} = A_{ki} B_{ki} = \mathbf{A} : \mathbf{B}$ .
7.  $\mathbf{B} : (\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{C}) = B_{ij} (A_{ik}^\top C_{kj}) = B_{ij} (A_{ki} C_{kj}) = (A_{ki} B_{ij} C_{kj}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C}$ .

■

## D.2 Calcul variationnel avec les tenseurs

Lors du processus de linéarisation des différentes formulations variationnelles des problèmes en grandes déformations, on doit dériver des expressions tensorielles par rapport à  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  ou tout simplement par rapport au déplacement  $\mathbf{u}$ . On trouvera dans ce qui suit un certain nombre de résultats utiles à cette fin.

### D.2.1 Résultats généraux

Pour dériver par rapport à un tenseur, on utilise la dérivée de Gâteaux 8.10 introduite au chapitre 8.

#### Définition D.9: Dérivée par rapport à un tenseur

Soit  $f : \mathbf{A} \rightarrow f(\mathbf{A}) \in \mathcal{R}$ . Alors la dérivée de  $f$  par rapport à  $\mathbf{A}$  est un tenseur d'ordre 2 (symétrique si  $\mathbf{A}$  l'est) défini par :

$$\frac{\partial(f(\mathbf{A}))}{\partial \mathbf{A}} : \delta \mathbf{A} = \left. \frac{d}{d\epsilon} f(\mathbf{A} + \epsilon \delta \mathbf{A}) \right|_{\epsilon=0} \quad (\text{D.10})$$

#### Lemme D.10: Règles de base

Soit  $f$  une fonction qui associe à un tenseur d'ordre un scalaire et soit  $\mathbf{T}$  une fonction qui

associe à un tenseur d'ordre 2 un autre tenseur d'ordre 2. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f(\mathbf{A})T(\mathbf{A}))}{\partial\mathbf{A}} &= \mathbf{T}(\mathbf{A}) \otimes \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{A}} + f(\mathbf{A}) \frac{\partial\mathbf{T}(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{A}} \\ \frac{\partial(T_1(\mathbf{A}):T_2(\mathbf{A}))}{\partial\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_2(\mathbf{A}): \frac{\partial T_1(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{A}} + \mathbf{T}_1(\mathbf{A}): \frac{\partial T_2(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{A}}\end{aligned}\tag{D.11}$$

### Lemme D.11

Si  $\mathbf{B}$  un tenseur d'ordre 2 :

$$\frac{\partial(\text{tr}\mathbf{B})}{\partial\mathbf{B}} = \mathbf{I}\tag{D.12}$$

De plus :

$$\frac{\partial(\det \mathbf{B})}{\partial\mathbf{B}} = (\det \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-\top}\tag{D.13}$$

et en particulier :

$$\frac{\partial J}{\partial\mathbf{F}} = J \mathbf{F}^{-\top} \quad \text{et} \quad \frac{\partial J}{\partial\mathbf{C}} = \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-1}\tag{D.14}$$

*Démonstration.* Soit donc  $\mathbf{B}$  un tenseur d'ordre 2. L'opérateur trace étant linéaire, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\text{tr}\mathbf{B})}{\partial\mathbf{B}}:\boldsymbol{\delta}_B &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \text{tr}(\mathbf{B} + \epsilon\boldsymbol{\delta}_B) \right]_{\epsilon=0} \\ &= \text{tr}(\boldsymbol{\delta}_B) = \mathbf{I}:\boldsymbol{\delta}_B\end{aligned}$$

d'où le premier résultat. De plus, par définition du déterminant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\det \mathbf{B})}{\partial\mathbf{B}}:\boldsymbol{\delta}_B &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \det(\mathbf{B} + \epsilon\boldsymbol{\delta}_B) \right]_{\epsilon=0} = \left[ \frac{d}{d\epsilon} \det(\mathbf{B} \cdot (\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_B)) \right]_{\epsilon=0} \\ &= \det \mathbf{B} \left[ \frac{d}{d\epsilon} \det(\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_B) \right]_{\epsilon=0}\end{aligned}$$

Si on pose  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_B$  et que l'on note  $\lambda_i^A$  ses valeurs propres, alors celles les valeurs propres de  $\epsilon\mathbf{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_B$  seront  $\epsilon\lambda_i^A$  de sorte que :

$$\det(\epsilon\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\epsilon\lambda_1^A - \lambda)(\epsilon\lambda_2^A - \lambda)(\epsilon\lambda_3^A - \lambda)$$

et qu'en prenant  $\lambda = -1$ , on a :

$$\det(\epsilon\mathbf{A} + \mathbf{I}) = (\epsilon\lambda_1^A + 1)(\epsilon\lambda_2^A + 1)(\epsilon\lambda_3^A + 1)$$

On montre ensuite facilement que :

$$\frac{d}{d\epsilon} \det(\epsilon A + \mathbf{I})|_{\epsilon=0} = (\lambda_1^A + \lambda_2^A + \lambda_3^A) = \text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_B) = \mathbf{B}^{-\top} : \boldsymbol{\delta}_B$$

en vertu de la relation D.8 et le résultat est donc démontré. La première relation de l'équation D.14 est un cas particulier. Pour la deuxième on a  $\det \mathbf{C} = J^2$  et du résultat précédent :

$$\frac{\partial(J^2)}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-\top} = J^2 \mathbf{C}^{-1}$$

mais on peut développer le terme de gauche de sorte que :

$$2J \frac{\partial(J)}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1}$$

et le résultat suit immédiatement. ■

### Lemme D.12

Soit  $\mathbf{B}$  un tenseur d'ordre 2. On a alors :

$$\frac{\partial(\mathbf{B}^{-1})}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B = -\mathbf{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_B \cdot \mathbf{B}^{-1} = -B_{ik}^{-1} B_{lj}^{-1} \delta B_{kl} \text{ c.-à-d. } \left( \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}} \right)_{ijkl} = -B_{ik}^{-1} B_{lj}^{-1} \quad (\text{D.15})$$

En particulier, on a :

$$\frac{\partial(\mathbf{C}^{-1})}{\partial \mathbf{C}} : \boldsymbol{\delta}_C = -\mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_C \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathcal{J} : \boldsymbol{\delta}_C$$

où le tenseur du quatrième ordre  $\mathcal{J}$  a pour composantes :

$$\mathcal{J}_{ijkl} = -\frac{1}{2} (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1})$$

en utilisant la symétrie de  $\mathbf{C}$ . On a aussi symétrisé le tenseur  $\mathcal{C}$  tel que suggéré par Bathe [5].

*Démonstration.* Puisque  $\mathbf{I} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ , en dérivant de chaque côté on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1})}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B = \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B \right) \cdot \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B \right) \\ &= \boldsymbol{\delta}_B \cdot \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B \right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$\mathbf{B} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B \right) = -\boldsymbol{\delta}_B \cdot \mathbf{B}^{-1}$$



et le résultat suit par une multiplication à gauche par  $\mathbf{B}^{-1}$  de chaque côté. De plus :

$$-\mathbf{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_B \cdot \mathbf{B}^{-1} = -B_{ik}^{-1} \delta_{Bkl} B_{lj}^{-1} = -B_{ik}^{-1} B_{lj}^{-1} \delta_{Bkl} = \mathcal{J} : \boldsymbol{\delta}_B$$

quel que soit  $\boldsymbol{\delta}_B$ . ■

### Lemme D.13

On a également :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{B}^{-\top}}{\partial \mathbf{B}} \right) = -\mathbf{B}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\delta}_B^{\top} \cdot \mathbf{B}^{-\top} = \mathcal{K} : \boldsymbol{\delta}_B \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}_{ijkl} = \frac{\partial B_{ij}^{-\top}}{\partial B_{kl}} = -B_{il}^{-\top} B_{kj}^{-\top} \quad (\text{D.16})$$

*Démonstration.*

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{-\top}}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B = \frac{\partial \mathbf{B}^{-\top}}{\partial \mathbf{B}^{\top}} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}^{\top}}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B \right) = -\mathbf{B}^{-\top} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}^{\top}}{\partial \mathbf{B}} : \boldsymbol{\delta}_B \right) \cdot \mathbf{B}^{-\top} = -\mathbf{B}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\delta}_B^{\top} \cdot \mathbf{B}^{-\top} = \mathcal{K} : \boldsymbol{\delta}_B$$

ce qui définit le tenseur du quatrième ordre  $\mathcal{K}_{ijkl} = -B_{il}^{-\top} B_{kj}^{-\top}$ . ■

## D.2.2 Dérivées des invariants

### Lemme D.14

Les dérivées premières des trois invariants de  $\mathbf{C}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{I} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} &= I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} &= I_3 \mathbf{C}^{-\top} = I_3 \mathbf{C}^{-1} = \text{cof } \mathbf{C} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

*Démonstration.* Pour  $I_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} : \boldsymbol{\delta}_C &= \frac{d}{d\epsilon} (\text{tr}(\mathbf{C} + \epsilon \boldsymbol{\delta}_C)) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} (\text{tr}(\mathbf{C}) + \epsilon \text{tr}(\boldsymbol{\delta}_C)) \Big|_{\epsilon=0} = \text{tr}(\boldsymbol{\delta}_C) \\ &= \mathbf{I} : \boldsymbol{\delta}_C \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque  $\delta_C$  est quelconque.

Pour  $I_2$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} &= \frac{1}{2} \left[ 2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} - \frac{\partial (\mathbf{C} : \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \right] \\
&= I_1 \mathbf{I} : \delta \mathbf{C} - \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{d\epsilon} ((\mathbf{C} + \epsilon \delta \mathbf{C}) : (\mathbf{C} + \epsilon \delta \mathbf{C})) \right]_{\epsilon=0} \\
&= I_1 \mathbf{I} : \delta \mathbf{C} - \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{d\epsilon} (\mathbf{C} : \mathbf{C} + \epsilon \mathbf{C} : \delta \mathbf{C} + \epsilon \delta \mathbf{C} : \mathbf{C} + \epsilon^2 \delta \mathbf{C} : \delta \mathbf{C}) \right]_{\epsilon=0} \\
&= I_1 \mathbf{I} : \delta \mathbf{C} - \mathbf{C} : \delta \mathbf{C} = (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) : \delta \mathbf{C}
\end{aligned}$$

et le résultat suit immédiatement.

Pour  $I_3$  :

C'est un cas particulier de la relation [D.13](#). ■

### Lemme D.15

Les dérivées secondes des trois invariants de  $\mathbf{C}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I_1}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial^2 I_2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathcal{I} \\
\frac{\partial^2 I_3}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= I_3 (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathcal{J}) \\
\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \frac{J}{4} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2\mathcal{J})
\end{aligned} \tag{D.18}$$

où  $\mathcal{I}$  est le tenseur identité du quatrième ordre défini par :

$$\mathcal{I} : \mathbf{B} = \mathbf{B} \quad \forall \mathbf{B} \quad \text{c.-à-d.} \quad \mathcal{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} (I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk})$$

*Démonstration.* La démonstration est une conséquence immédiate des lemmes précédents. ■

**Lemme D.16**Dérivées premières des  $J_i$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} I_3^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} I_1 I_3^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3^{-\frac{1}{3}} \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 I_3^{-\frac{4}{3}} \mathbf{C}^{-1} \\ \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} I_3^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} I_2 I_3^{-\frac{5}{3}} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) I_3^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}^{-1}\end{aligned}\tag{D.19}$$

*Démonstration.* Le résultat est immédiat en dérivant les relations (D.17). ■**Lemme D.17**Dérivées secondes des  $J_i$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J_1}{\partial \mathbf{C}^2} &= -\frac{1}{3} I_3^{-\frac{4}{3}} \left( \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} \right) + \frac{4}{9} I_1 I_3^{-\frac{7}{3}} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{3} I_1 I_3^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial^2 I_3}{\partial \mathbf{C}^2} \\ \frac{\partial^2 J_2}{\partial \mathbf{C}^2} &= -\frac{2}{3} I_3^{-\frac{5}{3}} \left( \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \right) + I_3^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial^2 I_2}{\partial \mathbf{C}^2} + \frac{10}{9} I_2 I_3^{-\frac{8}{3}} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{3} I_1 I_3^{-\frac{5}{3}} \frac{\partial^2 I_3}{\partial \mathbf{C}^2}\end{aligned}\tag{D.20}$$

*Démonstration.* Il faut bien entendu dériver les deux expressions (D.19). On ne développera pas outre mesure les expressions et on se limite à les exprimer en fonctions des dérivées premières et secondes des invariants  $I_j$ . On retrouve les mêmes expressions que dans [57]. ■**D.2.3 Application aux grandes déformations****Lemme D.18**

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = \nabla_X \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = \nabla_X^\top \mathbf{w}\tag{D.21}$$

*Démonstration.* On a immédiatement que :

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{F}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{w})]_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{F}(\mathbf{u}) + \epsilon \nabla_X \mathbf{w}]_{\epsilon=0} = \nabla_X \mathbf{w}$$

La deuxième relation se démontre de manière identique. ■

On tire des résultats précédents une identité qui nous servira à établir le théorème de transport de Reynolds.

**Lemme D.19**

On a :

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{D.22})$$

*Démonstration.* En utilisant le lemme précédent et la relation D.14, on a immédiatement que :

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \right) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \right) = J \mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \mathbf{v}$$

où  $\mathbf{v}$  est le champ de vitesse. Par la suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}} &= J \mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \mathbf{v} \\ &= J \operatorname{tr} \left( \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla_X \mathbf{v} \right) = J \operatorname{tr} \left( \nabla_X \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) \\ &= J \operatorname{tr} (\nabla \mathbf{v}) = J (\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

en utilisant D.8 et on a le résultat. ■

**Lemme D.20**

Le tenseur  $\mathbf{E}$  dépend de manière non linéaire du déplacement  $\mathbf{u}$ . On peut donc le linéariser et on a :

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \mathbf{w} + \nabla_X^\top \mathbf{w} \cdot \mathbf{F} \right) = \mathbf{F}^\top \gamma(\mathbf{w}) \mathbf{F} \quad (\text{D.23})$$

*Démonstration.* On a par définition :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \right) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \right) \right) \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \nabla_X^\top \mathbf{w} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot \nabla_X \mathbf{w} \right) \end{aligned}$$

en vertu du lemme précédent. La dernière égalité de D.23 découle de la relation 14.5. ■

**Remarque D.21.** On montre facilement que :

$$\frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{w})$$

On utilise de plus très souvent la notation :

$$\delta \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \delta e = \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{F}^\top \cdot \delta \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}$$

Nous avons choisi d'éviter cette notation qui, bien que très compacte, escamote quelque peu les dépendances des différents termes par rapport à  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$ . ◀

**Lemme D.22**

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \right) = J \mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \mathbf{w} = J \nabla \cdot \mathbf{w} \quad (\text{D.24})$$

*Démonstration.* La démonstration découle des relations D.14, D.21 et 14.4 et du fait que :

$$\mathbf{F}^{-\top} : \nabla_X \mathbf{w} = \text{tr} \left( \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla_X \mathbf{w} \right) = \text{tr}(\nabla \mathbf{w}) = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

■

### D.3 Exercices

1. Vérifier les identités suivantes pour  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  des tenseurs d'ordre 2 et  $\mathcal{T}$  un tenseur d'ordre 4.
  - a)  $\mathbf{A}:(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^\top):\mathbf{B} = (\mathbf{B}^\top\cdot\mathbf{A}):\mathbf{C}$
  - b)  $\mathcal{T}:(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}^\top):\mathbf{B}$  mais  $\neq (\mathbf{B}^\top\cdot\mathcal{T}):\mathbf{C}$
  - c)  $\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathbf{B}:\mathbf{A}$
  - d)  $(\mathcal{T}:\mathbf{B}):\mathbf{C} = \mathbf{C}:(\mathcal{T}:\mathbf{B}) = (\mathbf{C}:\mathcal{T}):\mathbf{B}$
  - e)  $(\mathcal{T}:(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})):(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}) = ((\mathbf{C}^\top\cdot\mathcal{T}\cdot\mathbf{B}^\top):\mathbf{A}):\mathbf{D}$
  - f) Si  $\mathcal{T}$  est symétrique, alors  $(\mathcal{T}:\mathbf{A}):\mathbf{B} = (\mathcal{T}:\mathbf{B}):\mathbf{A}$
  - g) Si  $\mathcal{T}$  est symétrique, alors  $(\mathcal{T}:(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})):(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}) = ((\mathbf{A}^\top\cdot\mathcal{T}\cdot\mathbf{D}^\top):\mathbf{C}):\mathbf{B}$
2. Démontrer les identités 14.56 et 14.57 en vous servant des identités du numéro précédent.
3. Soit  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  des tenseurs d'ordre 2 et supposons que  $\mathbf{A}$  est symétrique. Montrer que :

$$\mathbf{A}:\left(\frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top}{2}\right) = \mathbf{A}:\mathbf{B}$$

4. Soit  $\mathcal{T}$  un tenseur symétrique d'ordre 4 et  $\mathbf{A}$  un tenseur d'ordre 2. Montrer que :

$$\mathcal{T}:\left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top}{2}\right) = \mathcal{T}:\mathbf{A}$$

5. Soit  $\mathcal{T}$  un tenseur symétrique d'ordre 4 et  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux tenseurs d'ordre 2. Montrer que :

$$\left(\mathcal{T}:\left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top}{2}\right)\right):\left(\frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top}{2}\right) = (\mathcal{T}:\mathbf{A}):\mathbf{B}$$

6. Montrer que :

$$\frac{\partial(\mathbf{B}:\mathbf{B})}{\partial\mathbf{B}} = 2\mathbf{B}$$

7. Montrer que le tenseur du quatrième ordre  $\mathcal{I}$  ayant pour composantes  $\mathcal{I}_{ijkl} = I_{ik}I_{jl}$  vérifie  $\mathcal{I}:\mathbf{B} = \mathbf{B}$  pour tout tenseur  $\mathbf{B}$  d'ordre 2. Montrer de plus que  $\mathcal{I}:\mathcal{B} = \mathcal{B}$  pour tout tenseur  $\mathcal{B}$  d'ordre 4.

# Annexe E

## Estimation des dérivées

### E.1 Estimation des dérivées aux noeuds

Comme nous avons pu le constater, plusieurs méthodes d'adaptation de maillage se basent sur une bonne estimation des dérivées d'une solution éléments finis c.-à-d. sur l'estimation de la dérivée d'une fonction continue par morceaux. Plusieurs techniques existent et on retrouvera dans le mémoire de Pouliot [49] une excellente revue de la littérature. Dans ce rappel, nous présenterons la méthode qui, à ce jour, semble la plus performante. Cette méthode a été introduite par Zhang et Naga [63] en 2005.

Le problème général est de construire, à partir d'une solution éléments finis  $u_h^k$  de type  $P^k$  (de degré  $k$  dans chaque élément et continue aux interfaces entre les éléments), un gradient qui soit aussi de type  $(P^k)^n$ ,  $n$  étant la dimension d'espace. Rappelons que si l'on prend  $\nabla u_h^k$  on obtient une approximation de degré  $k - 1$  et discontinue aux interfaces. Nous ferons le développement en dimension 2, le cas général ne posant aucune difficulté supplémentaire.

On considère donc un sommet du maillage  $\mathbf{N} = (x_0, y_0)$  tel qu'illustré à la figure E.1. Pour chacun de ces sommets, on détermine un polynôme  $p_N$  de degré  $k + 1$  par un problème de minimisation de la forme :

$$\min_{p_N \in P^{k+1}} \sum_{i=1}^l (p_N(\mathbf{x}_i) - u_h^k(\mathbf{x}_i))^2$$

où les  $\mathbf{x}_i$  sont les  $l$  sommets immédiatement voisins de  $\mathbf{N}$ . Ces noeuds voisins incluent les sommets, les noeuds situés sur les arêtes et même éventuellement d'autres noeuds à l'intérieur des éléments. La figure E.1 illustre le cas d'une solution  $P^2$ .

Notons que la dimension de  $P^{k+1}$  est  $(k + 3)(k + 2)/2$  en dimension 2 et  $(k + 4)(k + 3)(k + 2)/6$  en dimension 3. Il faut donc s'assurer que le patch d'éléments contienne un nombre de noeuds  $l$  suffisamment grand ( $l > \dim P^{k+1}$ ) pour que le problème soit bien posé. Au besoin, on ajoutera une couche d'éléments supplémentaires autour de  $\mathbf{N}$ . Ce sera parfois nécessaire, notamment pour les noeuds situés sur la frontière du domaine.

Pour fixer les idées, on écrit  $p_N$  sous la forme :

$$p_N(x, y) = \sum_{i,j=0}^{i+j \leq k+1} a_{i,j} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

c.-à-d. que les constantes  $a_{i,j}$  correspondent, à une constante près, aux dérivées partielles  $\frac{\partial^{i+j} p_N}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0)$  de la fonction en  $\mathbf{N} = (x_0, y_0)$ . On voudrait déterminer  $p_N$  de sorte que :

$$p_N(x_i, y_i) = u_h^k(x_i, y_i), \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, l$$

ou sous forme matricielle  $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$  où :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) & (x_1 - x_0)^2 & \cdots & (y_1 - y_0)^{k+1} \\ 1 & (x_2 - x_0) & (y_2 - y_0) & (x_2 - x_0)^2 & \cdots & (y_2 - y_0)^{k+1} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 1 & (x_l - x_0) & (y_l - y_0) & (x_l - x_0)^2 & \cdots & (y_l - y_0)^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ a_{0,1} \\ \vdots \\ a_{0,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_h^k(x_0, y_0) \\ u_h^k(x_1, y_1) \\ u_h^k(x_2, y_2) \\ \vdots \\ u_h^k(x_l, y_l) \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

La matrice  $M$  est rectangulaire et il va de soi que la solution sera prise au sens des moindres carrés. On pourrait donc immédiatement résoudre :

$$M^T M \mathbf{a} = M^T \mathbf{b}$$

mais les problèmes de moindres carrés sont notoirement mal conditionnés, notamment lorsque les maillages deviennent très étirés. On résoudrait généralement par une méthode de décomposition en valeurs singulières, plus stable. Même dans ces conditions, on observe qu'un «scaling» de la matrice  $M$  réduit sensiblement le conditionnement du problème et en facilite la résolution. Dans [63], on propose de faire ce scaling uniformément dans toutes les directions d'espace. Ce choix est justifié par l'utilisation de maillages structurés isotropes. On rencontre cependant encore des difficultés à résoudre dans certains patch d'éléments très étirés dans une direction (anisotropes). Briffard propose donc dans [12] un scaling différent dans chaque direction. On considère donc les  $l$  nœuds  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$  constituant le patch d'éléments autour du sommet  $\mathbf{N} = (x_0, y_0)$ . On pose : qui consiste à poser :

$$R_x = \max_i |x_i - x_0| \text{ ainsi que } R_y = \max_i |y_i - y_0| \text{ et éventuellement } R_z = \max_i |z_i - z_0|$$

On pose ensuite  $\xi_i = \frac{(x_i - x_0)}{R_x}$  et  $\eta_i = \frac{(y_i - y_0)}{R_y}$  et on remarque ensuite que  $M\mathbf{a} = \hat{M}\hat{\mathbf{a}}$  où :

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \xi_1 & \eta_1 & \xi_1^2 & \eta_1^2 & \cdots & \eta_1^{k+1} \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \xi_2^2 & \eta_2^2 & \cdots & \eta_2^{k+1} \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 1 & \xi_l & \eta_l & \xi_l^2 & \eta_l^2 & \cdots & \eta_l^{k+1} \end{bmatrix}$$

et :

$$\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_{0,0}, \hat{a}_{1,0}, \hat{a}_{0,1}, \dots, \hat{a}_{0,k+1}]^T = [a_{0,0}, R_x a_{1,0}, R_y a_{0,1}, \dots, R_y^{k+1} a_{0,k+1}]^T \quad (\text{E.2})$$

et on résoudra ensuite :

$$\hat{M}^T \hat{M} \hat{\mathbf{a}} = \hat{M}^T \mathbf{b}$$



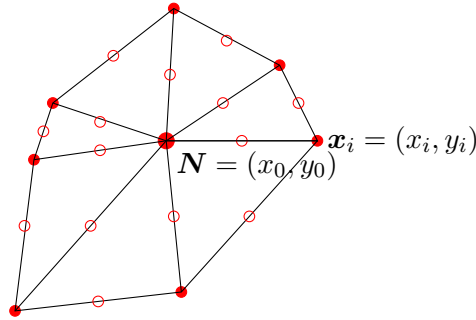


Figure E.1 – Patch d’éléments et ses noeuds autour d’un sommet  $\mathbf{N}$

Une fois ce système résolu pour  $\hat{\mathbf{a}}$ , on récupère le vecteur  $\mathbf{a}$  par la relation E.2 et les différentes dérivées partielles en divisant par la factorielle appropriée. Notons que pour l’adaptation hiérarchique, seules les dérivées partielles premières sont requises alors que pour l’adaptation utilisant une métrique on doit aller jusqu’aux dérivées secondes pour former la matrice hessienne. Ainsi, pour la reconstruction du gradient nécessaire à la section 15.2.1, on aurait :

$$\mathbf{g}_h^k(\mathbf{N}) = \nabla p_N(\mathbf{N})$$

Un tel problème est résolu pour chaque sommet  $\mathbf{N}$  du maillage. Pour un noeud  $\mathbf{N}_{12}$  situé sur une arête de sommets  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  on ne résout pas de problème de moindres carrés et un traitement particulier est requis. Pour obtenir les dérivées en un tel noeud, on détermine les deux polynômes  $p_{N_1}$  et  $p_{N_2}$  (de degré  $k + 1$ ) associés aux deux sommets de l’arête. On évalue ensuite ces deux polynômes au noeud  $\mathbf{N}_{12}$  en question et on prend la moyenne pondérée. Si  $\mathbf{N}_{12} = \alpha\mathbf{N}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{N}_2$ , alors les dérivées partielles en  $\mathbf{N}_{12}$  seraient :

$$\alpha \frac{\partial^{i+j} p_{N_1}}{\partial x^i \partial y^j}(\mathbf{N}_{12}) + (1 - \alpha) \frac{\partial^{i+j} p_{N_2}}{\partial x^i \partial y^j}(\mathbf{N}_{12})$$

Pour un milieu d’arête, on aurait  $\alpha = 1/2$ .

**Remarque E.1.** Cette procédure n’est pas équivalente à interpoler linéairement les valeurs des dérivées partielles aux sommets de l’arête que l’on écrirait :

$$\alpha \frac{\partial^{i+j} p_{N_1}}{\partial x^i \partial y^j}(\mathbf{N}_1) + (1 - \alpha) \frac{\partial^{i+j} p_{N_2}}{\partial x^i \partial y^j}(\mathbf{N}_2)$$



Pour un sommet interne à un élément, on utilise une procédure similaire. On dérive les polynômes associés aux trois sommets du triangle et on fait une moyenne pondérée des valeurs obtenues. Ainsi pour le barycentre d’un élément triangulaire, on aurait cette fois une pondération  $\alpha = 1/3$  pour chaque sommet du triangle.

**Remarque E.2.** De nombreuses variantes de cette méthode existent. L'une d'elle consiste à considérer que la valeur de  $p_N$  en  $\mathbf{N}$  est simplement  $u_h^k(\mathbf{N})$ . Le coefficient  $a_{0,0}$  est forcé de prendre la valeur  $u_h^k(\mathbf{N})$ . Il suffit pour ce faire d'éliminer la première ligne et la première colonne du système E.1 et de remplacer le vecteur  $\mathbf{b}$  par le vecteur :

$$\mathbf{b} = \left[ u_h^k(x_1, y_1) - u_h^k(x_0, y_0), u_h^k(x_2, y_2) - u_h^k(x_0, y_0), \dots, u_h^k(x_l, y_l) - u_h^k(x_0, y_0) \right]^T$$

C'est cette méthode (dite BFC) qui est décrite dans Belhamadia et al. [6]. ◀

# Réponses aux exercices

## Réponses aux exercices du chapitre 2

1. a)  $T'_f = \delta_0 - \delta_1$ ;  $T''_f = \delta'_0 - \delta'_1$ ;  
b)  $T'_f = T_g$  où :

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(la fonction  $f(x)$  est continue en  $x = 0$ ).

$T''_f = T'_g = T_h + 2\delta_0$  où :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -\sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(la fonction  $g(x)$  a un saut de hauteur 2 en  $x = 0$ ).

c)  $T'_f = T_g + \delta_0$  où :

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ -\sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(la fonction  $f(x)$  a un saut de hauteur 1 en  $x = 0$ ).

$T''_f = T'_g + \delta'_0 = T_h + \delta_0 + \delta'_0$  où :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -\cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(la fonction  $g(x)$  possède un saut de hauteur 1 en  $x = 0$ ).

2. Dans  $L^2(]-1, 1[)$  : a, b et c ; Dans  $H^1(]-1, 1[)$  : b seulement ; Dans  $H^2(]-1, 1[)$  : aucune.
3. La fonction  $u$  est continue sur l'axe  $y = x$ . De plus,  $\nabla u_1 = (-2, 2)$ ,  $\mathbf{n}_1 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ ,  $\nabla u_2 = (2x, -2y)$ , et  $\mathbf{n}_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ . Le saut de la dérivée normale est donc :  $k_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1 - k_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1 = x + y + 4$ . La divergence est donc :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si } x > y \end{cases}$$

plus une simple couche le long de l'axe  $y = x$  d'intensité  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = x + y + 4$ .

4. La fonction  $f(x) = 1$  est dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Il suffit de remarquer que l'on intègre sur un compact (fermé et borné); Pour la fonction  $f(x) = \ln x$ , la difficulté vient du point  $x = 0$ . Or, un compact de  $]0, 1[$  ne peut pas contenir ce point et la fonction sera intégrable.
5.  $|x|$  est dans  $H^1(]-1, 1[)$  car elle est de carré sommable et sa dérivée au sens des distributions est  $T_g$  où :

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

qui est aussi de carré sommable). Par contre, elle n'est pas dans  $H^2(]-1, 1[)$  puisque la dérivée seconde fait apparaître une distribution de Dirac en  $x = 0$ .

6. Pour  $f(x) = x(1-x)$ ,  $f(0) = f(1) = 0$  mais  $f'(0) = 1 \neq 0$  et cette fonction n'est pas dans  $H^2_0(]0, 1[)$ . Par contre, on vérifie facilement que la fonction  $f(x) = x^2(1-x)^2$  est bien dans  $H^2_0(]0, 1[)$ .
7.  $x^r$  est dans  $L^2(]0, 1[)$  pour  $r > -1/2$ ; dans  $H^1(]0, 1[)$  pour  $r > 1/2$  et  $r = 0$ ; dans  $H^2(]0, 1[)$  pour  $r > 3/2$ ,  $r = 0$  et  $r = 1$ .

### Réponses aux exercices du chapitre 3

1. La symétrie des 4 formes bilinéaires découle de la commutativité du produit de deux fonctions et du produit scalaire de deux vecteurs.

a)

$$|a(u, w)| \leq p_2 \int_{\Omega} u w \, dv \leq p_2 \|u\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega}$$

$$|a(w, w)| \geq p_1 \int_{\Omega} w w \, dv = p_1 \|w\|_{0,\Omega}^2$$

b)

$$|a(u, w)| \leq q_2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dv \leq q_2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dv \leq n q_2 |u|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega}$$

$$|a(w, w)| \geq q_1 \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w \, dv = q_1 |w|_{1,\Omega}^2$$

en remarquant que  $|w|_{1,\Omega}$  est bien une norme sur  $H^1_0(\Omega)$ .

c)

$$|a(u, w)| \leq q_2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dv \leq q_2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dv \leq n q_2 |u|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega} \leq n q_2 \|u\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}$$

$$|a(w, w)| \geq q_1 \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w \, dv = q_1 |w|_{1,\Omega}^2$$

et on ne peut pas conclure car  $|w|_{1,\Omega}$  n'est pas une norme sur  $H^1(\Omega)$ . La forme bilinéaire n'est pas coercive sur  $H^1(\Omega)$ .

d)

$$\begin{aligned}
|a(u, w)| &\leq p_2 \int_{\Omega} u w \, dv + q_2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dv \leq p_2 \|u\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega} + q_2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dv \\
&\leq p_2 \|u\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega} + nq_2 \|u\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \leq (p_2 + nq_2) \|u\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \\
|a(w, w)| &\geq p_1 \int_{\Omega} w w \, dv + q_1 \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w \, dv \geq \min(p_1, q_1) \|w\|_{1,\Omega}^2
\end{aligned}$$

2. a) On pose  $V = H_0^1(]0, 1[)$  et la formulation variationnelle est :

$$\int_0^1 \nu_2 u'(x) w'(x) \, dx = \int_0^1 f(x) w(x) \, dx \quad \forall w \in V$$

Le relèvement des conditions essentielles est nul.

b) On pose  $V = H^1(]0, 1[)$  et la formulation variationnelle est :

$$\int_0^1 \nu_1 u w + \nu_2 u'(x) w'(x) \, dx = \int_0^1 f(x) w(x) \, dx \quad \forall w \in V$$

Il n'y a pas de relèvement à faire.

c) On pose  $V = H_0^1(]0, 1[)$  et par exemple  $u_g = a + (b-a)x$  pour le relèvement. La formulation variationnelle est :

$$\int_0^1 \nu_2 \delta'_u(x) w'(x) \, dx = \int_0^1 (f(x) w(x) - \nu_2 (b-a) w'(x)) \, dx \quad \forall w \in V$$

Notons que le dernier terme de droite, qui tient compte du relèvement de la condition essentielle, s'annule pour cet exemple, mais que ce n'est pas le cas en général.

d) On pose  $V = \{w \in H^1(]0, 1[) | w(0) = 0\}$  et par exemple  $u_g = a$  pour le relèvement. La formulation variationnelle est :

$$\int_0^1 q(x) \delta'_u(x) w'(x) \, dx = \int_0^1 f(x) w(x) \, dx + b w(1) \quad \forall w \in V$$

Pour démontrer la continuité de  $l(w)$ , il faut utiliser la continuité de la trace au bord.e) On pose  $V = \{w \in H^2(]0, L[) | w(0) = w(L) = 0\}$  et par exemple  $u_g = a + (b-a)x/L$  pour le relèvement. La formulation variationnelle est :

$$\int_0^L q(x) \delta''_u(x) w''(x) \, dx = \int_0^L f(x) w(x) \, dx + d w'(L) - c w'(0) \quad \forall w \in V$$

Pour démontrer la continuité de  $l(w)$ , il faut utiliser la continuité de la trace au bord.f) On pose  $V = \{w \in H^1(\Omega) | w = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$  et on prendra un relèvement  $u_g$  tel que  $u_g = g$  sur  $\Gamma_0$ . La formulation variationnelle est :

$$\int_{\Omega} q(x) \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f(x) w(x) \, dx - \int_{\Omega} q(x) \nabla u_g \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Gamma_1} h w \, ds \quad \forall w \in V$$

g) On pose  $V = H^1(\Omega)$  et il n'y a pas de relèvement à faire. La formulation variationnelle est :

$$\int_{\Omega} \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f(x)w(x) \, dx + \int_{\Gamma} hw \, ds \quad \forall w \in V$$

La forme bilinéaire n'est pas coercive sur  $V$  (voir exercice 1-c). On remarque également que si on a une solution  $u$ , alors  $u + c$  est aussi une solution. Il n'y a pas unicité.

h) On pose  $V = H^1(\Omega)$  et il n'y a pas de relèvement à faire. La formulation variationnelle est :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Gamma} uw \, ds = \int_{\Omega} f(x)w(x) \, dx + \int_{\Gamma} hw \, ds \quad \forall w \in V$$

Pour démontrer la coercivité de la forme bilinéaire, il faudrait démontrer que  $(|w|_{1,\Omega}^2 + |w|_{0,\Gamma}^2)^{1/2}$  est une norme sur  $H^1(\Omega)$  équivalente à la norme habituelle, ce qui est le cas.

3. Les deux dernières conditions aux limites ne peuvent être imposées au même endroit. Le problème est mal posé.
4. On a  $a(u, w) = l(w)$  pour tout  $w$  dans  $V$  et donc  $a(u, u) = l(u)$ . Le résultat suit en vertu de la coercivité et de la définition de  $\|l\|$ .
5. On pose  $V = H_0^1(]0, 1[)$  et la formulation variationnelle est :

$$\int_0^1 c_1 u'(x)w'(x) + c_2 u'(x)w(x) \, dx = \int_0^1 f(x)w(x) \, dx \quad \forall w \in V$$

La continuité des formes linéaire et bilinéaire est évidente. Pour la coercivité, on a :

$$|a(w, w)| \geq c_1 \int_{\Omega} (w'(x))^2 + c_2 w'(x)w(x) \, dv = c_1 |w|_{1,\Omega}^2 + \frac{c_2}{2} w(x) \Big|_0^1 = c_1 |w|_{1,\Omega}^2$$

car le deuxième terme s'annule.

## Réponses aux exercices du chapitre 4

1.  $\phi_i(x) = (x(1-x))^i$ , pour  $i \geq 1$ .
2.  $\phi_i(x) = x^i$ , pour  $i \geq 0$  (il est important d'inclure la fonction  $\phi_0(x) = 1$  car autrement la solution serait forcément nulle en  $x = 0$ ).
3.  $u_g(x) = a + (b-a)x$  et  $\phi_i(x) = (x(1-x))^i$ , pour  $i \geq 1$ .
4.  $u_g(x) = a$  et  $\phi_i(x) = x^i$ , pour  $i \geq 1$ .
5.  $u_g(x) = a + (b-a)x/L$  et  $\phi_i(x) = (x(L-x))^i$ , pour  $i \geq 1$ .
6. Le relèvement doit vérifier les 3 premières conditions aux limites et on prendra par exemple  $u_g(x) = a + \frac{b-a}{L^2}x^2$ . Les fonctions  $\phi_i(x)$  doivent donc s'annuler en 0 et  $L$  et leur dérivée doit s'annuler en 0. On prendra par exemple  $\phi_i(x) = (x^2(L-x))^i$  pour  $i \geq 1$ .
7. Le relèvement est  $u_g(x, y) = 1$  et  $\phi_i(x, y) = (xy)^i$ .
8. Le relèvement est  $u_g(x) = (x+1)^2$  et  $\phi_i(x) = (x^2(1-x))^i$  pour  $i \geq 1$ .

9. On pose  $V = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur les axes } x = 1 \text{ et } y = 1\}$  et il n'y a pas de relèvement à faire. La formulation variationnelle est :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} qw(x) \, dx \quad \forall w \in V$$

On a donc :

$$A_{11} = \int_0^1 \int_0^1 k \left( -2x(1-y^2), -2y(1-x^2) \right) \cdot \left( -2x(1-y^2), -2y(1-x^2) \right) \, dx dy = \frac{64k}{45}$$

et :

$$F_1 = \int_0^1 \int_0^1 q(1-x^2)(1-y^2) \, dx dy = \frac{4q}{9}$$

Le coefficient de la seule fonction de Ritz sera donc  $5q/16k$ .

10. On pose  $V = \{w \in H^1(]0, 1[) \mid w(0) = 0\}$  et par exemple  $u_g = 1$  pour le relèvement. La formulation variationnelle est :

$$\int_0^1 q(x) \delta'_u(x) w'(x) \, dx = \int_0^1 (2 - 2x + 6x^2) w(x) \, dx - 2w(1) \quad \forall w \in V$$

On prend ensuite  $\phi_i(x) = x^i$  pour  $i \geq 1$ . On a alors :

$$A_{ij} = ij \left( \frac{1}{i+j+1} + \frac{1}{i+j-1} \right) \text{ et } F_i = \frac{2}{i+1} - \frac{2}{i+2} + \frac{6}{i+3} - 2$$

Si on prend 2 fonctions de Ritz, on trouve  $c_1 = 1$  et  $c_2 = -1$  de sorte que la solution approchée est  $u(x) = 1 + x - x^2$ .

11. La matrice de la méthode de Ritz a pour terme général  $A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$ . On a alors :

$$A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) x_j = a \left( \sum_{j=1}^n x_j \phi_j, \phi_i \right) = a(w, \phi_i) \text{ où } w(x) = \sum_{j=1}^n x_j \phi_j(x)$$

on a donc :

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a(w, \phi_i) x_i = a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V > 0$$

## Réponses aux exercices du chapitre 5

1. On a la situation suivante :

$$u^K(x_i^K) = \sum_{j=1}^3 u_j^K \psi_j^K(x_i^K) = \sum_{j=1}^3 u_j^K \hat{\psi}_j(\xi_i)$$

Si on se place aux noeuds géométriques, on a  $u^K(x_i^K) = u_i^K$  mais au point milieu, on a ;

$$u^K(x_3^K) = \sum_{j=1}^3 u_j^K \hat{\psi}_j(0) = \frac{u_1^K + u_2^K}{2} + u_3^K$$

et par conséquent :

$$u_3^K = u^K(x_3^K) - \frac{u_1^K + u_2^K}{2} = u^K(x_3^K) - \left( \frac{u(x_1^K) + u(x_2^K)}{2} \right)$$

2.

3. Pour la première fonction, on cherche une expression de la forme  $\tilde{\psi}_1(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$ . Les conditions à vérifier sont  $\tilde{\psi}_1(-1) = 1$ ,  $\tilde{\psi}_1'(-1) = 0$ ,  $\tilde{\psi}_1(+1) = 0$  et  $\tilde{\psi}_1'(+1) = 0$ . On obtient le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On trouve  $a_0 = 1/2$ ,  $a_1 = -3/4$ ,  $a_2 = 0$  et  $a_3 = 1/4$ . On a alors :

$$\tilde{\psi}_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi)$$

Les autres fonctions de base s'obtiennent de manière similaire.

4. a) Sur le premier élément :

$$u^{K_1}(x) = \sum_{j=1}^3 u_j^{K_1} \phi_j^{K_1} = \sum_{j=1}^3 u_j^{K_1} \hat{\psi}_j(\xi)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{du^{K_1}}{dx}(0) &= \sum_{j=1}^3 u_j^{K_1} \frac{2}{h^{K_1}} \frac{d\hat{\psi}_j}{d\xi}(-1) \\ &= \frac{2}{h^{K_1}} \left( -0,355 \frac{d\hat{\psi}_2}{d\xi}(-1) - 0,235 \frac{d\hat{\psi}_3}{d\xi}(-1) \right) \\ &= -0,2925 \end{aligned}$$

puisque  $h^{K_1} = 2$ . On a donc  $-400 \frac{du^{K_1}}{dx}(0) = 117$ . Le calcul de la même quantité en utilisant cette fois la variable secondaire (réaction nodale)  $s_{11}^{K_1}$  donne 103,67 qui est beaucoup plus précis.

- b) Le relèvement serait  $2\phi_8 - 3\phi_9$  ou encore  $2\psi_1^{K_1}(x) - 3\psi_2^{K_1}(x)$ .



5. On doit évaluer la matrice élémentaire de terme général :

$$a_{ij}^K = \int_{x_1^K}^{x_2^K} c_2(\psi_j^K)'(x)\psi_i^K(x) dx = \int_{-1}^1 c_2\hat{\psi}_j'(\xi)\hat{\psi}_i(\xi) d\xi$$

et on a :

$$A^K = \frac{c_2}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. La formulation variationnelle (sans faire le relèvement) est :

$$\int_0^1 (x^3 u'(x)w'(x) + x^2 u(x)w(x)) dx = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x} dx$$

a)  $\psi_3(\xi) = \frac{27}{16}(\xi^2 - 1)(\xi - 1/3)$ .

b) Le relèvement implicitement construit sera  $-\phi_9 + 3\phi_{10}$  (les  $\phi_i$  sont les fonctions de Ritz cubiques par élément).

c) Le degré maximal à intégrer est 8. Il faut donc 5 points de Gauss.

d)

Numéros des ddl				
Table <i>adres</i>				
Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3	Ddl #4
1	9	3	1	2
2	3	6	4	5
3	6	10	7	8

e)  $a_{33} = a_{22}^{K_1} + a_{11}^{K_2}$  et  $a_{14} = 0$  (les degrés de liberté 1 et 4 n'étant pas connectés).

## Réponses aux exercices du chapitre 6

1.

2. Il suffit de remarquer que :

$$\int_K 1 dv = \int_{\hat{K}} J^K d\hat{v} \text{ ou encore } mes(K) = J^K mes(\hat{K})$$

si le jacobien  $J^K$  est constant et où  $mes$  désigne l'aire en dimension 2 et le volume en dimension 3.

3.

4.

5.

6.

7.

8. Puisque les côtés sont droits, la transformation géométrique est linéaire pour les triangles et bilinéaires pour les quadrangles. Sur un triangle, après passage à l'élément de référence, l'intégrand est de degré 3 puisque le jacobien est constant de même que les coefficients de la matrice  $B^K$  (voir la relation 6.10). Une formule de Hammer à 4 points intégrera exactement. Par contre, sur un quadrangle, le jacobien ne sera pas constant et les coefficients de  $B^K$  sont des quotients de polynômes (voir la relation 6.12). Aucune formule de quadrature de Gauss ne pourra intégrer exactement.

9.  $\hat{\psi}_4(\xi, \eta) = \frac{27}{2}\xi(1 - \xi - \eta)(\frac{2}{3} - \xi - \eta)$

10.

11. En inversant la transformation linéaire, on montre que :

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

Le point  $(4, 3)$  correspond donc à  $(\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$  dans l'élément de référence et :

$$u(4, 3) = \sum_{j=1}^3 u_j^K \hat{\psi}_j(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) = 31,66$$

de même que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(4, 3) &= \sum_{j=1}^3 u_j^K \left( \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi}(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta}(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 u_j^K \left( \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi}(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \frac{4}{18} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta}(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \frac{-1}{18} \right) = 8,66 \end{aligned}$$

12. On multiplie par une fonction test  $w_T$  (qui s'annule en entrée) et on intègre par parties :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{K}(\mathbf{x}) \nabla T) \cdot \nabla w_T dA - \int_{\Gamma_N} (\mathbf{K} \nabla T) \cdot \mathbf{n} w_T ds = 0$$

où  $\Gamma_N$  comprend la sortie ainsi que la frontière en forme de U. Sur cette dernière partie, la condition de Neumann est nulle  $(\mathbf{K} \nabla T) \cdot \mathbf{n} = 0$  alors qu'en sortie  $(\mathbf{K} \nabla T) \cdot \mathbf{n} = 1$  de sorte qu'il ne reste que :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{K}(\mathbf{x}) \nabla T) \cdot \nabla w_T dA = \int_{\Gamma_{\text{sortie}}} w_T ds$$

On peut, bien que ce ne soit pas forcément nécessaire de le souligner, relever les conditions aux limites de Dirichlet. On construit donc  $T_0$  valant 100 à l'entrée et on résout :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{K}(\mathbf{x}) \nabla \delta_T) \cdot \nabla w_T dA = \int_{\Gamma_{\text{sortie}}} w_T ds - \int_{\Omega} (\mathbf{K}(\mathbf{x}) \nabla T_0) \cdot \nabla w_T dA$$

On pourrait prendre  $T_0 = 100$  de sorte que le dernier terme de droite s'annule. Une fois le problème résolu, on pose  $T = T_0 + \delta_T$ .

## Réponses aux exercices du chapitre 8

1. La formulation variationnelle (non linéarisée) est :

$$\int_{\Omega} [k(1 + \lambda u^2)^m] \nabla u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f(x_1, x_2)w(x_1, x_2) \, dv + \int_{\Gamma_1} hw \, ds$$

À la première itération, on peut prendre  $u_0$  solution du problème linéaire suivant :

$$\int_{\Omega} k \nabla u_0 \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f(x_1, x_2)w(x_1, x_2) \, dv + \int_{\Gamma_1} hw \, ds$$

obtenu en prenant  $m = 0$  ou  $\lambda = 0$  pour rendre le problème linéaire. On devra ainsi introduire un relèvement des conditions aux limites essentielles et résoudre :

$$\int_{\Omega} k \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv = - \int_{\Omega} k \nabla u_g \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Omega} f(x_1, x_2)w(x_1, x_2) \, dv + \int_{\Gamma_1} hw \, ds$$

et poser  $u_0 = u_g + \delta_u$ . Pour les itérations suivantes, on remet  $m$  ou  $\lambda$  à sa vraie valeur et on pose  $u = u_k + \delta_u$  ( $u_k$  vérifiant les conditions essentielles) et :

$$R(u, w) = \int_{\Omega} [k(1 + \lambda u^2)^m] \nabla u \cdot \nabla w \, dv - \int_{\Omega} f(x_1, x_2)w(x_1, x_2) \, dv - \int_{\Gamma_1} hw \, ds$$

On linéarise ensuite en dérivant :

$$\begin{aligned} D_u R(u_k, w)[\delta_u] &= \frac{d}{d\epsilon} [R(u_k + \epsilon \delta_u, w)] |_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} [k(1 + \lambda u_k^2)^m] \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv \\ &\quad + \int_{\Omega} [2\lambda m k u_k (1 + \lambda u_k^2)^{m-1}] \delta_u \nabla u_k \cdot \nabla w \, dv \end{aligned}$$

On résout alors à chaque itération :

$$\int_{\Omega} [k(1 + \lambda u_k^2)^m \nabla \delta_u] \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Omega} [2\lambda m k u_k (1 + \lambda u_k^2)^{m-1}] \delta_u \nabla u_k \cdot \nabla w \, dv = -R(u_k, w)$$

et on met à jour en posant :  $u_{k+1} = u_k + \delta_u$ . On itérera ainsi jusqu'à ce que  $\|\delta_u\|_{\infty} < \epsilon$  où  $\epsilon$  est la tolérance désirée.

2. La non-linéarité provient cette fois de la condition aux limites. La formulation variationnelle non linéarisée est :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Gamma_1} h(u^4 - u_{\infty}^4)w \, ds = \int_{\Omega} f(x_1, x_2)w(x_1, x_2) \, dv$$

On peut démarrer les itérations pour résoudre ce problème en résolvant le problème linéaire :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega} f(x_1, x_2)w(x_1, x_2) \, dv$$

obtenu en posant  $h = 0$  ou mieux encore, en résolvant :

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Gamma_1} h(u - u_{\infty}^4) w \, ds = \int_{\Omega} f(x_1, x_2) w(x_1, x_2) \, dv$$

qui est aussi linéaire mais plus près du véritable problème. Les itérations de la méthode de Newton ont la forme :

$$\int_{\Omega} k \nabla \delta_u \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Gamma_1} 4h(u_k)^3 \delta_u w \, ds = -R(u_k, w)$$

où :

$$R(u_k, w) = \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dv + \int_{\Gamma_1} h(u^4 - u_{\infty}^4) w \, ds - \int_{\Omega} f(x_1, x_2) w(x_1, x_2) \, dv$$

1. Nous devons démontrer la relation (9.4), soit

$$\left| \frac{1 - (1 - \theta)z}{1 + \theta z} \right| \leq 1.$$

Pour cela, utilisons l'équation que nous obtenons par l'équation (9.3) :

$$U_{n+1} = \left( \frac{1 - \Delta t(1 - \theta)\lambda}{1 + \theta\lambda\Delta t} \right) U_n.$$

En posant le changement de variable proposé ( $z = \lambda\delta t = x + iy$ ), nous obtenons

$$U_{n+1} = \left( \frac{1 - (1 - \theta)z}{1 + \theta z} \right) U_n.$$

Ici, nous voulons que la solution soit décroissante dans le temps, car nous voulons obtenir une convergence. Pour obtenir cette convergence (et parce que nous travaillons avec des nombres potentiellement complexes), nous nous intéressons donc au cas où la norme sera plus petite que 1, d'où

$$\left| \frac{1 - (1 - \theta)z}{1 + \theta z} \right| \leq 1.$$

2. Nous devons trouver la zone de stabilité absolue de la méthode d'Euler explicite. Pour cela, nous pouvons utiliser la relation (9.5)

$$(1 - 2\theta)(x^2 + y^2) < 2x$$

avec  $\theta = 0$ . Nous obtenons ainsi

$$x^2 + y^2 < 2x.$$

En complétant le carré, nous trouvons

$$(x - 1)^2 + y^2 < 1,$$

ce qui démontre que la zone de stabilité absolue de la méthode d'Euler explicite est le disque du plan complexe de centre 1 et de rayon 1.

3. Nous devons montrer que, pour un lambda réel, le schéma de Crank-Nicholson peut rendre la suite  $U_n$  décroissante, mais non monotone. Notons que nous avons l'inégalité

$$\left| \frac{1 - \lambda\Delta t - \theta\lambda\Delta t}{1 + \theta\lambda\Delta t} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow (1 - (1 - \theta)\lambda\Delta t)^2 \leq (1 + \theta\lambda\Delta t)^2,$$

pour lambda réel. Nous obtenons par la suite

$$-1 < \frac{1 - (1 - \theta)\lambda\Delta t}{1 + \theta\lambda\Delta t} < 1.$$

Comme le maximum est atteint en  $\theta = 1/2$ , nous trouvons

$$-1 < \frac{1 - 1/2\lambda\Delta t}{1 + 1/2\lambda\Delta t} < 1$$

$$-1 < \frac{2 - \lambda\Delta t}{2 + \lambda\Delta t} < 1.$$

Intéressons-nous au cas où la valeur sera négative, soit

$$-1 < \frac{2 - \lambda\Delta t}{2 + \lambda\Delta t} < 0.$$

En effet, dans ce cas, nous constaterons des oscillations. Comme le dénominateur est toujours positif (n'oublions pas que lambda est considéré comme un réel positif), cela arrivera seulement lorsque

$$2 - \lambda\Delta t < 0 \Rightarrow \Delta t > \frac{2}{\lambda}.$$

4. Nous devons montrer la condition de stabilité générale du thêta-schéma (9.6). Pour cela, utilisons l'équation

$$-1 < \frac{1 - (1 - \theta)\lambda\Delta t}{1 + \theta\lambda\Delta t} < 1,$$

car lambda est réel et positif.

Intéressons-nous à l'inégalité de droite. Nous trouvons

$$\frac{1 - (1 - \theta)\lambda\Delta t}{1 + \theta\lambda\Delta t} < 1$$

$$1 - \Delta t\lambda + \Delta t\theta\lambda < 1 + \Delta t\theta\lambda$$

$$-\Delta t\lambda < 0$$

$$\Delta t > 0.$$

De l'autre côté, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1 - (1 - \theta)\lambda\Delta t}{1 + \theta\lambda\Delta t} &> -1 \\ -\Delta t\lambda + 2\Delta t\theta\lambda &> -2 \\ \Delta t\lambda - 2\Delta t\theta\lambda &< 2 \\ \Delta t\lambda(1 - 2\theta) &< 2 \\ \Delta t &< \frac{2}{(1 - 2\theta)\lambda}. \end{aligned}$$

## Réponses aux exercices du chapitre 14

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
6. On a que :

$$\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} = I_3^{-1/3} \mathbf{C} - \frac{1}{3} I_1 I_3^{-1/3} \mathbf{I}$$

de sorte que la trace est nulle. De plus :

$$\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} = (I_1 \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}) I_3^{-2/3} - \frac{2}{3} I_2 I_3^{-2/3} \mathbf{I}$$

et on rappelle que  $\text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}) = I_1^2 - 2I_2$ . Le résultat suit immédiatement.

# Bibliographie

- [1] Agassant, J. F., P. Avenas, J. Ph. Sergent et P. Carreau: *Polymer Processing, Principles and Modeling*. Hanser Publishers, Munich, 1991.
- [2] Arnold, D. N., F. Brezzi et M. Fortin: *A stable finite element for the Stokes equations*. *Calcolo*, 21 :337–344, 1984.
- [3] Bank, R. E. et K. R. Smith: *Mesh smoothing using a posteriori error estimates*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(3) :979–997, 1997.
- [4] Bartle, R.G.: *The Elements of Integration*. Wiley, New York, 1966.
- [5] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996, ISBN 0-13-301458-4.
- [6] Belhamadia, Y., A. Fortin et É. Chamberland: *Anisotropic mesh adaptation for the solution of the Stefan problem*. *Journal of Computational Physics*, 194(1) :233–255, 2004, ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-49Y99TT-2/2/14d271b6cd0b61b22134b56502538f18>.
- [7] Bois, R.: *Adaptation de maillages anisotropes par un estimateur d'erreur hiérarchique*. Thèse de doctorat, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, Canada, Août 2012. [http://www.giref.ulaval.ca/files/theses\\_et\\_memoires/richard\\_bois.pdf](http://www.giref.ulaval.ca/files/theses_et_memoires/richard_bois.pdf).
- [8] Bois, R., M. Fortin et A. Fortin: *A fully optimal anisotropic mesh adaptation method based on a hierarchical error estimator*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209-212 :12–27, 2012, ISSN 0045-7825.
- [9] Bois, R., M. Fortin, A. Fortin et A. Couët: *High order optimal anisotropic mesh adaptation using hierarchical elements*. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 21(1-2) :72–91, 2012.
- [10] Bonet, J. et D. R. Wood: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge, 1997, ISBN 0-521-57272-X.
- [11] Brezzi, F. et M. Fortin: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, tome 15 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [12] Briffard, T.: *Contributions à l'adaptation de maillages hiérarchiques*. Thèse de doctorat, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, Canada, 2017.
- [13] Burden, R.L. et J.D. Faires: *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Pacific Grove, 7<sup>e</sup> édition, 2001, ISBN 0-534-38216-9.

- [14] Chamberland, É., A. Fortin et M. Fortin: *Comparison of the performance of some finite element discretizations for large deformation elasticity problems*. *Comp. & Struct.*, 88(11-12) :664–673, 2010, ISSN 0045-7949. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V28-4YTM66F-1/2/deeb7748678d4ff78563cfb8cf09dff>.
- [15] Ciarlet, P.G.: *The Finite Element Method for Elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [16] Courant, R.L.: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49 :1–23, 1943.
- [17] Couët, A.: *Méthode hiérarchique tridimensionnelle d'adaptation de maillages anisotropes*. Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, Canada, 2011. [http://www.giref.ulaval.ca/files/theses\\_et\\_memoires/depotFinalACouet.pdf](http://www.giref.ulaval.ca/files/theses_et_memoires/depotFinalACouet.pdf).
- [18] Céa, J.: *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 14 :345–444, 1964.
- [19] Delfour, M. C. et J. P. Zolézio: *Shapes and Geometries : Analysis, Differential Calculus, and Optimization*, tome 4 de *Advances in Design and Control*. SIAM, Philadelphia, 2001, ISBN ISBN 0-89871-489-3.
- [20] Dhatt, G. et G. Touzot: *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les presses de l'Université Laval, Québec, 1981.
- [21] Durán, R. G., A. L. Lombardi et M. I. Prieto: *Superconvergence for finite element approximation of a convection-diffusion equation using graded meshes*. *IMA J. Numer. Anal.*, 32(2) :511–533., 2012.
- [22] Duvaut, G.: *Mécanique des milieux continus*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1990.
- [23] Duvaut, G. et J.L. Lions: *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [24] Engelman, M. et M. Jamnia: *Transient flow past a circular cylinder : a benchmark solution*. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11 :985–1000, 1990.
- [25] Fortin, A.: *Analyse numérique pour ingénieurs*. Presses Internationales Polytechnique, 4<sup>e</sup>  dition, novembre 2011, ISBN 978-2-553-01427-7. <http://www.polymtl.ca/pub/doc.php?id=8509&l=fre>.
- [26] Fortin, A.: *Analyse numérique pour ingénieurs*. Presses Internationales Polytechnique, 5<sup>e</sup>  dition, décembre 2015, ISBN 978-2-553-01680-6. <http://www.polymtl.ca/pub/doc.php?id=8509&l=fre>.
- [27] Fortin, A., M. Jarda , R. Pierre et J. J. Gervais: *Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems*. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24(11) :1185–1210, 1997. [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19970615\)24:11<1185::AID-FLD535>3.0.CO;2-X](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19970615)24:11<1185::AID-FLD535>3.0.CO;2-X).
- [28] Fortin, M. et A. Fortin: *Experiments with several elements for viscous incompressible flows*. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 5(10) :911–928, 1985. <http://dx.doi.org/10.1002/flid.1650051005>.
- [29] Fortin, M. et R. Glowinski: *Résolution numérique de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté*. Dunod, 1983.



- [30] Gander, M.J. et F. Kwok: *Chladni figures and the Tacoma bridge : motivating PDE eigenvalues problems via vibrating plates*. SIAM Review, 54(3) :573–596, 2012.
- [31] Gasquet, C. et P. Witomski: *Analyse de Fourier et applications*. Masson, Paris, 1990.
- [32] George, A. et J. Liu: *Computer solution of large sparse positive definite systems*. Prentice-Hall, 1981.
- [33] Grenier Gauthier, V.: *Adaptation de maillages pour problèmes singuliers*. Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, 2015. [http://www.giref.ulaval.ca/files/theses\\_et\\_memoires/Grenier-Gauthier.pdf](http://www.giref.ulaval.ca/files/theses_et_memoires/Grenier-Gauthier.pdf).
- [34] Guo, H., Z. Zhang, R. Zhao et Q. Zou: *Polynomial preserving recovery on boundary*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, ISSN 0377-0427. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042716301133>, Available online.
- [35] Habashi, W. G., M. Fortin, D. Ait-Ali-Yahia, S. Boivin, Y. Bourgault, J. Dompierre, M.P. Robichaud, A. Tam et M G. Vallet: *Anisotropic Mesh Optimisation : Towards a Solver-Independant and Mesh-Independent CFD*. Lecture Series on Computational Fluid Dynamics, 1996.
- [36] Hirsch, M.W., S. Smale et R.L. Devaney: *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*. Academic Press, 2003.
- [37] Huang, W., L. Kamenski et J. Lang: *A new anisotropic mesh adaptation method based upon hierarchical a posteriori error estimates*. Journal of Computational Physics, 229(6) :2179 – 2198, 2009, ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4XVRYVW-1/2/da4bba259dc0235e0c391b0342fe5725>.
- [38] Hughes, T. J. R. et A. N. Brooks: *A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*, tome 34 de *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, pages 19–35. Amer. Soc. of Mech. Eng., New York, 1979.
- [39] Hughes, T. J. R. et A. N. Brooks: *A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions. Applications to the streamline upwind procedure*. Dans Gallagher, R. H. (rédacteur) : *Finite element in fluids*, tome IV, pages 47–65. Wiley, London, 1982.
- [40] Hughes, Thomas J.R.: *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [41] Jean, R.: *Mesure et intégration*. Les presses de l’université du Québec, Montréal, 1975.
- [42] Lotka, A.J.: *Elements of Physical Biology*. Williams and Wilkins, Baltimore, 1925.
- [43] Lucquin, B.: *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations*. Mathématiques à l’université. Ellipses, Paris, 2004.
- [44] The MathWorks Inc.: *Matlab User’s guide*, 1996.
- [45] Medvinsky, A.B., S.V. Petrovskii, I.A. Tikhonova, H. Malchow et B. L. Li: *Spatiotemporal complexity of plankton and fish dynamics*. SIAM review, 44(3) :311–370, 2002.
- [46] Ndikumagenge, F.: *Estimateur d’erreur a posteriori basé sur une méthode hiérarchique et adaptation de maillage*. Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, 2001.
- [47] Ozell, B. et C. Pic: *Manuel d’utilisation du logiciel configurable de visualisation scientifique VU*. CERCA, Montréal, 1998.

- [48] Philippin, G.: *Cours d'analyse à l'usage des ingénieurs*, tome 2. Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1994.
- [49] Pouliot, B.: *La récupération des dérivées : développement d'une nouvelle méthode d'estimation des dérivées avec une étude numérique*. Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, Canada, 2010. <http://www.theses.ulaval.ca/2010/27716/27716.pdf>, In french.
- [50] Raviart, P.A. et J.M. Thomas: *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [51] Reddy, J.N.: *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw Hill, New York, 1986.
- [52] Reddy, J.N.: *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, 2<sup>e</sup> édition, 1993.
- [53] Ritz, W.: *Ueber eine neue Methode zur Losung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik*. J. Reine Angew. Math., 135 :1–61, 1908.
- [54] Roache, P.J.: *Code verification by the method of manufactured solutions*. J. Fluids Eng., 124(1) :4–10, 2002, ISSN 00982202.
- [55] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*. Dunod, Paris, 1965.
- [56] Strang, G. et G. Fix: *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [57] Sussman, T. et K. J. Bathe: *A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis*. Comput. & Struct., 26(1/2) :357–409, 1987, ISSN 0045-7949. [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90265-3](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(87)90265-3).
- [58] Swokowski: *Analyse*. De Boeck Université, Bruxelles, 5<sup>e</sup> édition, 1993.
- [59] Turner, M.J., R.W. Clough, H.C. Martin et L.C. Topp: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*. Journal of the Aeronautical Sciences, 23 :805–882, 1956.
- [60] Verdier, M.: *Méthodes numériques pour le calcul dans l'artère carotide*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique, Montréal, 2007.
- [61] Volterra, V.: *Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically*. Nature, 118 :558–560, 1926.
- [62] Xie, Y.M.: *An assessment of time integration schemes for non-linear dynamic equations*. Journal of Sound and Vibration, 192(1) :321–331, 1996, ISSN 0022-460X. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X9690190X>.
- [63] Zhang, Z. et A. Naga: *A New Finite Element Gradient Recovery Method : Superconvergence Property*. SIAM Journal for Scientific Computing, 26(4) :1192–1213, 2005, ISSN 1064-8275.
- [64] Zienkiewicz, O.C. et R.L. Taylor: *The finite element method : basic formulations and linear problems*, tome 1. McGraw-Hill, London, 4<sup>e</sup> édition, 1989.
- [65] Zienkiewicz, O.C. et R.L. Taylor: *The finite element method : solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*, tome 2. McGraw-Hill, London, 4<sup>e</sup> édition, 1989.

# Index

- algorithme
  - de lagrangien actualisé, 357
  - de Newton, 178, 183
- allée de von Karman, 292
- amortissement
  - de Rayleigh, 211
  - numérique, 215
- assemblage, 98
  
- base hiérarchique, 89, 128, 363, 397
- bifurcation de Hopf, 292
  
- coefficient de Poisson, 245
- coefficients de Lamé, 245, 302
- compact, 8
- complétude, 26
- condition aux limites
  - essentielle, 46
  - naturelle, 45, 50, 134, 267
- continuité
  - fonctionnelle, 12
- contrainte normale, 246
- convergence, 162
- coquille, 371
  
- déviateur, 302
- degré de liberté, 76, 133
- degré de précision, 90, 146, 403
- déplacement de sommet, 375
- différentiation amont, 221
- diffusion artificielle, 221
- discontinuités de première espèce, 15
- distribution, 12
  - de Dirac, 12
  - régulière, 14
- divergence d'une distribution, 20
- divergence tangentielle, 350
  
- division d'arête, 372
- déformation
  - isochorique, 330
  - volumique, 330
- dérivée d'une distribution, 15
  
- écoulement de Poiseuille, 280, 286
- élément, 73, 75
  - de Crouzeix et Raviart, 280
  - de référence, 82
  - de Taylor-Hood, 276
  - Mini, 275, 281
  - réel, 82
- éléments compatibles, 275
- élimination de sommet, 373
- équation
  - de convection-diffusion, 219
  - de réaction-diffusion, 205
- espace
  - $P_k$ , 391
  - $\mathcal{D}'(\Omega)$ , 12
  - complet, 26
  - de Hilbert, 26
  - de Sobolev, 26
  - dual, 12, 40
  - fonctionnel linéaire, 21
- évolution de la masse volumique, 318
  
- figures de Chladni, 67
- fluide
  - newtonien, 265, 280
  - non newtonien, 285
  - viscoplastique, 285
- flux, 386
- fonction
  - continue par morceaux, 15
  - de Heaviside, 16

- de Ritz, 92–94, 96, 154, 257, 294
- localement intégrable, 13
- fonctionnelle, 9
  - continuité, 12
  - d'énergie, 11, 42
  - domaine de définition, 9
  - linéaire, 11
- fonctions
  - d'interpolation, 81
  - de Ritz, 57
- forme
  - bilinéaire, 40
  - bilinéaire coercive, 41
  - bilinéaire elliptique, 41
  - bilinéaire symétrique, 40
  - linéaire, 39
- formulation
  - faible, 4
  - forte, 4
  - quasi-variationnelle, 191
  - variationnelle, 3
- formule
  - de Nanson, 316
  - de Piola, 317
- gradient, 383
  - de déformation, 314
- génération de maillage, 132
- interactions prédateurs-proies, 205
- intégrale de Lebesgue, 11
- inégalité
  - de Korn, 246
  - triangulaire, 26
- jacobien, 138
  - surfaccique, 317
- largeur de bande, 133
  - maximale, 133
- loi
  - de Carreau-Yasuda, 285
  - de comportement, 243
  - puissance, 285, 286
- maillage, 75, 132, 148
  - anisotrope, 360
  - génération, 132
  - isotrope, 360
- matrice
  - élémentaire, 81
  - bande, 104, 133
  - creuse, 97, 133
  - de rigidité, 81
  - définie positive, 41
  - en ligne de ciel, 104, 133
  - jacobienne, 138, 177
  - masse, 193
  - pleine, 104
  - tangente, 202
- matériau
  - hyperélastique, 323
  - linéaire élastique, 243
  - orthotrope, 247
  - semi-déformable, 304
- mesure, 11
- module
  - de compressibilité, 245
  - de compressibilité, 331
  - de Young, 245
- modèle
  - d'Ogden, 326
  - de Carreau, 285, 287
  - de Carreau-Yasuda, 285
  - de Mooney-Rivlin, 331
  - de Saint-Venant-Kirchhoff, 324
  - néo-hookéen, 324
- méthode
  - de Newton, 176
  - de continuation, 185
  - de Petrov-Galerkin, 58
  - de points fixes, 176
  - de Rayleigh-Ritz, 58
  - de Ritz, 57, 58
  - en espace-temps, 191
  - GMRES, 184
- nœuds
  - d'interpolation, 75
  - de calcul, 75, 132
  - géométriques, 75, 132

- nombre
  - de Peclet, 220
  - de Peclet local, 225
  - de Reynolds, 291
- norme, 25
  - induite, 26
- normes
  - équivalentes, 31
- ordre de convergence, 162, 164
- pas de temps, 188
- perte de charge, 287
- Petrov-Galerkin, 225
- poids d'intégration, 402
- points d'intégration, 146, 402
- Poiseuille, 280, 286
- polynôme
  - $P_1$  non conforme, 395
  - d'Hermite, 117
- première variation, 180
- pression suiveuse, 337, 340, 343
- problème
  - en grande déformation, 313
  - mêlé, 47
  - non linéaire, 175
- produit
  - dyadique, 409
  - scalaire, 25
- quadrature
  - de Gauss-Legendre, 401, 402
  - de Hammer, 404
- qualité d'un élément, 359
- réaction nodale, 128, 257, 430
  - calcul, 102, 103, 111
  - définition, 101, 154
  - portance, 294
- relèvement des conditions aux limites, 29, 34, 46
- retournement d'arête, 373
- schéma
  - BDF1, 193
- schéma
  - d'Euler explicite, 188
  - BDF2, 193
  - conditionnellement stable, 189
  - d'Euler explicite, 188
  - d'Euler implicite, 187, 188
  - de Crank-Nicholson, 188
  - de différence arrière d'ordre 2, 187
  - de Gear, 188, 193
  - de Newmark, 209
  - inconditionnellement stable, 189
  - simple couche, 19
  - solution manufacturée, 166
  - suite de Cauchy, 26
  - support, 92, 133
    - d'une fonction, 7
  - système élémentaire, 81, 254
- tableau
  - adres*, 77, 134
  - connec*, 75, 132
  - coor*, 75, 132
  - numer*, 76, 134
  - d'adressage, 77
  - de numérotation, 76
- tenseur
  - d'élasticité, 243, 301
  - de Cauchy, 293, 321
  - de Cauchy-Green, 315
  - de déformation, 242, 301, 315
  - de déformation de Green-Lagrange, 320
  - de Finger, 333
  - de Piola-Kirchhoff (deuxième), 321, 322
  - de Piola-Kirchhoff (premier), 321
  - de taux de déformation, 266
  - des contraintes de Cauchy, 241, 243, 321
  - gradient de déformation, 242, 314
- theta-schéma, 188
- théorème
  - de la divergence, 385
  - de Lax-Milgram, 41, 43, 44, 47
- trace
  - au bord, 29
  - d'un tenseur, 411
  - normale, 33
- traction, 246, 267, 282, 293

transformation géométrique, [82](#), [136](#), [138](#), [140](#),  
[141](#)

upwinding, [221](#)

variable

primaire, [80](#)

secondaire, [80](#), [115](#), [134](#)

vecteur

global des degrés de liberté, [146](#)

d'adressage, [77](#)

de contraintes normales, [244](#)

de traction, [246](#), [267](#), [282](#), [293](#)

des degrés de liberté élémentaires, [82](#)

des réactions nodales, [154](#)

des sollicitations élémentaires, [82](#)

global des degrés de liberté, [76](#), [101](#)

résidu, [177](#)